

MEMORIE
DELLA
REALE ACCADEMIA
DELLE SCIENZE
DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO VII.

TORINO
DALLA STAMPERIA REALE

MDCCLXIV

MEMORIE

DELLA REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

S. 1109. B. 47.

MEMORIE

REALE ACCADEMIA
DELLE SCIENZE
DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO VII.

TORINO
DALLA STAMPERIA REALE

MDCCCXLV.

BRITISH MUSEUM

NATURAL HISTORY

GEOL. DEPT.

1880



INDICE

ELENCO degli Accademici Nazionali e Stranieri	pag. VII
MUTAZIONI accadute nel Corpo Accademico dopo la pubblicazione del precedente Volume »	XVIII
DONI fatti alla Reale Accademia delle Scienze di Torino dal 1.° set- tembre 1844 sino al 12 di giugno 1845 »	XIX

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NOTIZIA STORICA dei lavori della Classe delle Scienze Fisiche e Ma- tematiche nel corso dell'anno 1844; scritta dall'Accademico Professore Giuseppe GENÈ, Segretario aggiunto di essa Classe »	XLV
Lettera del Professore CHAMOUSSET sulla temperatura media di Seiamberi »	XLVI
Cenni sull' <i>acido eugenico</i> ; del Dottore Ascanio SOBRERO »	LI
Nota sui prodotti della decomposizione dell' <i>etere nitroso</i> sotto l'influenza del calore; dello stesso Dott. SOBRERO »	LIV
Sunto di una statistica inedita dell'isola di Santorino , inviata all'Accademia dal Conte Giuseppe DE CIGALLA »	LV

MICROMYCETES ITALICI novi vel minus cogniti. Decad. III.^a et IV.^a,
 auctore Josepho DE NOTARIS pag. 1

OBSERVATIONS sur les grêles tombées en 1840 dans les États de
 terreferme de S.M. le Roi de Sardaigne, d'après les renseignemens
 recueillis par la Commission Supérieure de Statistique; par
 M.^r DESPINE » 31

MÉMOIRE sur la distribution de l'électricité à la surface de deux
 sphères conductrices complètement isolées; par M.^r Jean PLANA 71



ELENCO

DEGLI ACCADEMICI NAZIONALI E STRANIERI

AL XII DI GIUGNO MDCCCXLV.

ACCADEMICI NAZIONALI.

PRESIDENTE

SALUZZO, Conte Alessandro, Grande di Corona, Ministro di Stato, Luogotenente Generale, Cavaliere dell'Ordine Supremo della Santissima Nunziata, Cavaliere di Gran Croce decorato del Gran Cordone dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere di Gran Croce del Real Ordine Ellenico del Salvatore, Commendatore dell'Ordine Imperiale di Leopoldo d'Austria, Vice-Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria.

VICE-PRESIDENTE

PLANA, Barone Giovanni, Regio Astronomo, Professore d'Analisi nella Regia Università, Direttore Generale degli studi nella Regia Accademia Militare, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Commendatore dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere e Consigliere dell'Ordine Civile di Savoia, Cavaliere della Corona Ferrea d'Austria e della Legion d'Onore di Francia.

TESORIERE

PEYRON, Abate Amedeo, Teologo Collegiato, Riformatore, Professore di Lingue Orientali nella Regia Università, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Cavaliere dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere e Consigliere dell'Ordine Civile di Savoia.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Direttore

AVOGADRO DI QUAREGNA, Conte Amedeo, Mastro Uditore nella Regia Camera de' Conti, Professore emerito di Fisica Sublime nella Regia Università, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Membro della Commissione Superiore di Statistica, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, e dell'Ordine Civile di Savoia.

Segretario

CARENA, Giacinto, Professore di Filosofia, Membro della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, Cavaliere e Consigliere dell'Ordine Civile di Savoia, Cavaliere di Croce in Oro del Real Ordine Ellenico del Salvatore.

Segretario Aggiunto

GENÈ, Dottore Giuseppe, Professore di Zoologia e Direttore del Museo Zoologico della Regia Università, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Vice-Presidente della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, e dell'Ordine Civile di Savoia.

ACCADEMICI RESIDENTI

MICHELOTTI, Ignazio, Ispettore generale nel Corpo Reale degli Ingegneri Civili e delle Miniere, Intendente generale, Direttore dei Regii canali, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Membro della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino, del Congresso permanente d'acque e strade, e del Regio Consiglio degli Edili, Decurione della Città di Torino, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro.

PLANA, Giovanni, *predetto*.

CARENA, Giacinto, *predetto*.

CISA DI GRESY, Cavaliere Tomaso, Professore emerito di Meccanica nella Regia Università, Cavaliere dell'Ordine dei Santi Maurizio e Lazzaro.

BELLINGERI, Dottore Carlo Francesco, Medico della Real Corte e Casa, Membro e Consigliere del Collegio di Medicina nella Regia Università, Membro della Società Medico-Chirurgica, Medico Ordinario e Consulente dell'Ospedale Maggiore dell'Ordine Equestre de' Ss. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia.

AVOCADRO DI QUAREGNA, Amedeo, *predetto*.

COLLA, Luigi, Avvocato Collegiato, Membro della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro.

MORIS, Dottore Giuseppe Giacinto, Professore di Materia Medica e di Botanica nella Regia Università, Consigliere nel Magistrato del Protomedicato, Direttore del Regio Orto Botanico, Membro della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere e Consigliere dell'Ordine Civile di Savoia.

LAVINI, Giuseppe, Dottore Collegiato in Filosofia, Professore Straordinario di Chimica Medica e Farmaceutica nella Regia Università, Consigliere Straordinario nel Consiglio Superiore Militare di Sanità per la parte Chimico-Farmaceutica, Membro della Reale Accademia di Agricoltura di Torino.

CANTÙ, Gian Lorenzo, Dottore Collegiato in Medicina, Professore di Chimica generale nella Regia Università, Consigliere nel Magistrato del Protomedicato, Membro del Consiglio delle Miniere, e della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro.

GENÈ, Giuseppe, *predetto*.

BOTTO, Giuseppe Domenico, Professore di Fisica nella Regia Università di Torino, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro.

SISMONDA, Angelo, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo Mineralogico della Regia Università di Torino, Membro della Reale Accademia d'Agricoltura e del Consiglio delle Miniere, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, e dell'Ordine Civile di Savoia.

SERIE II. TOM. VII.

MENABREA, Nobile Luigi Federigo, Capitano nel Corpo Reale del Genio Militare, Dottore Collegiato di Matematica, Professore di Geometria descrittiva nella Regia Accademia Militare, Professore di Meccanica applicata e di costruzioni civili e militari nella Scuola d'applicazione delle Armi speciali.

GIULIO, Carlo Ignazio, Rettore, Professore di Meccanica e Consigliere della Classe di Matematica nel Collegio di Scienze e Lettere della Regia Università di Torino, Consigliere di S. M., Membro della Reale Accademia d'Agricoltura, della Regia Camera d'Agricoltura e di Commercio, e della Commissione Superiore di Statistica, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro.

RIBERI, Alessandro, Professore di Operazioni Chirurgiche nella Regia Università, Chirurgo di S. M. e della Reale Famiglia, Chirurgo Primario delle Guardie del Corpo di S. M., e del Venerando Spedale Maggiore di S. Giovanni Battista, Consigliere nel Magistrato del Protomedicato, Presidente del Consiglio Superiore militare di Sanità, Vice-Presidente della Società Medico-Chirurgica di Torino, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, e dell'Ordine Civile di Savoia.

MOSCA, Carlo Bernardo, Primo Architetto di S. M., Ispettore di Prima Classe nel Corpo Reale del Genio Civile, Maggiore ne' Reali Eserciti, Membro del Consiglio degli Edili, della Reale Accademia delle Belle Arti di Torino, dell' I. e R. Accademia delle Belle Arti di Milano, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere e Consigliere dell'Ordine Civile di Savoia.

SISMONDA, Eugenio, Dottore in Medicina, Assistente al Museo Mineralogico della Regia Università degli studi.

SOBRERO, Ascanio, Dottore in Medicina ed in Chirurgia, Professore di Chimica applicata alle Arti presso la Regia Camera d'Agricoltura e di Commercio, Applicato alla Cattedra di Chimica generale nella Regia Università degli studi.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

BORGNIS, Giuseppe Antonio, Ingegnere Civile, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, Membro dell' I. R. Istituto Lombardo, Professore Ordinario di Matematica applicata nell' I. R. Università di Pavia.

BERTOLONI, Antonio, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, Professore di Botanica, a Bologna.

MARIANINI, Stefano, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, Presidente della Società Italiana delle Scienze, Professore di Fisica sperimentale nella Ducale Università di Modena.

DE NOTARIS, Giuseppe, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, Dottore in Medicina, Professore di Botanica nella Regia Università di Genova.

MAGISTRINI, Giambatista, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, Professore di Calcolo Sublime nella Pontificia Università di Bologna.

PARETO, Marchese Lorenzo, a Genova.

SPINOLA, Marchese Massimiliano, a Genova.

BILLIET, Monsignor Alessio, Cavaliere di Gran Croce decorato del Gran Cordone dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, Arcivescovo di Sciambèri.

MOSSOTTI, Ottaviano Fabrizio, Cavaliere degli Ordini de' Ss. Maurizio e Lazzaro, e del Merito sotto il titolo di S. Giuseppe di Toscana, Professore di Fisica e di Meccanica Celeste nell'I. R. Università di Pisa.

BELLI, Dottor Giuseppe, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, Membro dell'I. R. Istituto Lombardo di Milano, Professore di Fisica nell'I. R. Università di Pavia.



CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

SAULI D'IGLIANO, Conte Lodovico, Consigliere di Legazione, Commissario Generale de' Confini, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Cavaliere dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, e dell'Ordine Civile di Savoia.

Segretario

GAZZERA, Abate Costanzo, Professore di Filosofia, Membro e Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, e della Giunta d'Antichità e Belle Arti, Prefetto della Biblioteca della Regia Università, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, e dell'Ordine Civile di Savoia.

ACCADEMICI RESIDENTI

SALUZZO, Cavaliere Cesare, Luogotenente Generale, Grande Scudiere, Governatore delle LL. AA. RR. i Duchì di Savoia e di Genova, Cavaliere dell'Ordine Supremo della Santissima Nunziata, Cavaliere di Gran Croce decorato del Gran Cordone dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, Cavaliere di Gran Croce dell'Ordine Reale di S. Stefano d'Ungheria, Ispettore della Regia Accademia Militare, Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro della Giunta d'Antichità e Belle Arti, e del Consiglio delle Arti, Segretario-Perpetuo-Direttore Emerito della Reale Accademia Albertina delle Belle Arti, Decurione della Città di Torino.

CARENA, Giacinto, *predetto*.

PEYRON, Amedeo, *predetto*.

CORDERO de' Conti di SAN QUINTINO, Cavaliere Giulio, Membro della Reale Accademia di Agricoltura di Torino.

GAZZERA, Costanzo, *predetto*.

MANNO, Barone Giuseppe, Presidente-Capo, Reggente di Toga nel Supremo Consiglio di Sardegna, Vice-Presidente della Commissione Superiore di Statistica, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, e della Giunta d'Antichità e Belle Arti, Commendatore dell'Ordine Militare de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere e Consigliere dell'Ordine Civile di Savoia.

SAULI d'IGLIANO, Lodovico, *predetto*.

SCLOPIS DI SALERANO, Conte Federigo, Avvocato Generale di S. M. presso il Real Senato di Piemonte, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Cavaliere dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, dell'Ordine Civile di Savoia, e dell'Ordine del Merito sotto il titolo di S. Giuseppe di Toscana.

BALBO, Conte Cesare, Colonnello ne'Regii Eserciti, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia.

CIERARIO, Nobile Giovanni Antonio Luigi, Collaterale nella Regia Camera de' Conti, Membro e Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro della Giunta d'Antichità e Belle Arti, Cavaliere dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, dell'Ordine Civile di Savoia, Cavaliere di Seconda Classe dell'Ordine Imperiale di S. Stanislao di Russia, Cavaliere dell'Ordine del Merito sotto il titolo di S. Giuseppe di Toscana, e dell'Ordine Belgico di Leopoldo, fregiato della grande Medaglia d'oro di Russia pel Merito Scientifico e Letterario.

SALUZZO, Alessandro, *predetto*.

LAVY, Filippo, Mastro Uditore nella Regia Camera de' Conti, Membro del Consiglio delle Miniere, Cavaliere dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro.

BAUDI DI VESME, Cavaliere Carlo, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria.

BERTOLOTTI, Davide, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia e dell'Ordine Belgico di Leopoldo.

PROMIS, Domenico Casimiro, Bibliotecario di S. M., Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, e della Regia Com-

missione di Revisione de' libri e stampe, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro.

PETITTI DI RORETO, Conte Carlo Ilarione, Consigliere di Stato Ordinario, Commendatore dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia.

PROVANA DEL SABBIONE, Cavaliere L. G., Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria.

RICOTTI, Ercole, Luogotenente nel Corpo Reale del Genio Militare, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia.

EANDI, Avvocato Giovanni, Vice-Intendente Generale d'Azienda, Amministratore in secondo interinale delle Regie Zecche, Membro della Commissione Superiore di Statistica, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro.

BON-COMPAGNI, Cavaliere Carlo, Senatore, Sostituto Avvocato Generale di S. M. presso il Senato di Piemonte, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria e della Commissione Superiore di Statistica, Decurione della Città di Torino.

PROMIS, Carlo, Professore di Architettura Civile nella Regia Università, Regio Archeologo, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Accademico d'onore dell'Accademia Reale di Belle Arti.

GORRESIO, Abate Gaspare, Dottore del Collegio di Scienze e Lettere, Assistente alla Biblioteca della Regia Università, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, e della Legion d'Onore di Francia.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

DE MAISTRE, Conte Saverio, Generale negli Eserciti dell'Imperatore di tutte le Russie, Socio onorario della Reale Accademia delle Belle Arti di Torino, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, a Pietroburgo.

FERRERO DELLA MARMORA, Conte Alberto, Maggior Generale, Ispettore delle Miniere di Sardegna, Membro della Commissione Superiore di Statistica, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, dell'Ordine Militare di Savoia, Cavaliere e Consigliere Onorario dell'Ordine Civile di Savoia, Comandante della Regia Scuola di Marineria, in Genova.

CANINA, Luigi, Architetto, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, della Legion d'Onore di Francia, e dell'Ordine di Danebrog di Danimarca, Accademico di merito residente della Pontificia Accademia di S. Luca, Socio ordinario della Pontificia Accademia di Archeologia, a Roma.

TADINI, S. Em. il Cardinale D. Placido Maria, Carmelitano, Cavaliere di Gran Croce decorato del Gran Cordone dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Arcivescovo di Genova.

VARESE, Carlo, Dottore in Medicina, Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, a Voghera.

COPPI, Abate Antonio, Membro della Pontificia Accademia di Archeologia, a Roma.

CHARVAZ, Monsignor Andrea, Cavaliere di Gran Croce decorato del Gran Cordone dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Vescovo di Pinerolo.

GROBERTI, Abate Vincenzo, Dottore Collegiato nella Facoltà di Teologia della Regia Università di Torino, Professore a Bruxelles.

CALLERI, Giuseppe Maria, a Canton.



ACCADEMICI STRANIERI.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

ARAGO, Domenico Francesco Giovanni, Commendatore della Legion d'Onore, Membro e Segretario dell'Istituto di Francia per le Scienze Fisiche e Matematiche, Membro dell'Ufficio delle Longitudini, a Parigi.

BERZELIO, J. Jacob, Commendatore dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro e della Legion d'Onore, Professore di Chimica, a Stoccolma.

DI HUMBOLDT, Barone Alessandro, Commendatore della Legion d'Onore, Membro dell'Istituto di Francia e della Reale Accademia delle Scienze di Berlino.

GAUSS, Consigliere Carlo Federico, Direttore della Specola Astronomica e Professore nell'Università di Gottinga.

VENTUROLI, Cavaliere Giuseppe, Professore emerito nella Pontificia Università di Bologna, Presidente del Consiglio degli Ispettori d'Acque e Strade, a Roma.

GAY-LUSSAC, Luigi Giuseppe, Pari di Francia, Ufficiale della Legion d'Onore, Membro dell'Istituto, a Parigi.

ÉLIE DI BEAUMONT, Giambatista Armando Lodovico Leonzio, Ingegnere in Capo delle Miniere, Membro dell'Istituto, Professore di Storia Naturale nel Collegio di Francia, Ufficiale della Legion d'Onore, Cavaliere dell'Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, a Parigi.

DUCROTAY DI BLAINVILLE, Arrigo Maria, Professore d'Anatomia comparativa nel Museo di Storia Naturale, Membro dell'Istituto di Francia, Cavaliere della Legion d'Onore, a Parigi.

HERSCHEL, Giovanni, Astronomo, Membro della Società Reale di Londra.

BROWN, Roberto, Membro della Società Reale di Londra.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

DÉPÉRET, Gabricle, Professore emerito, a Parigi.

MAI, S. Em. il Cardinale Angelo, Prefetto della Sacra Congregazione dell'Indice, a Roma.

BRUGIÈRE DI BARANTE, Barone Amabile Guglielmo Prospero, Grand' Ufficiale della Legion d' Onore, Membro dell' Istituto, Pari, e Ambasciatore di Francia presso S. M. l' Imperatore di tutte le Russie, a Parigi.

MANZONI, D. Alessandro, Accademico della Crusca, a Milano.

SAVIGNY, F. C., Ministro della giustizia, già Professore nella Regia Università e Membro della Reale Accademia delle Scienze di Berlino.

LETRONNE, Giovanni Antonio, Membro dell' Istituto di Francia, Ufficiale della Legion d' Onore, Conservatore della Biblioteca Reale, a Parigi.

BORGHESI, Bartolomeo, Cavaliere dell' Ordine del Merito di Prussia, Patrizio della Repubblica di San Marino.

DI HAMMER-PURGSTALL, Barone Giuseppe, a Vienna d' Austria.

ROSMINI-SERBATI, Abate Antonio, a Pallanza.



MUTAZIONI

*accadute nel Corpo Accademico dopo la pubblicazione
del precedente Volume.*

ELEZIONE DI UFFICIALI

PLANA, Barone Giovanni, confermato il 27 febbraio 1845, in adunanza delle due Classi, nella carica triennale di *Vice-Presidente dell'Accademia*.

NOMINE

GIOBERTI, Abate Vincenzo, Dottore Collegiato nella Facoltà di Teologia della Regia Università di Torino, nominato il 28 novembre 1844 ad *Accademico Nazionale non residente* per la Classe delle Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

CALLERI, Giuseppe Maria, nominato lo stesso giorno ad *Accademico Nazionale non residente* per la medesima Classe.

ROSMINI-SERBATI, Abate Antonio, nominato lo stesso giorno ad *Accademico Straniero* per la medesima Classe.

BROWN, Roberto, Membro della Società Reale di Londra, nominato il 5 gennaio 1845 ad *Accademico Straniero* per la Classe delle Scienze Fisiche e Matematiche.

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

DAL 1.º SETTEMBRE 1844 SINO AL 12 DI GIUGNO 1845.

La Reale Galleria di Torino, illustrata da Roberto d'Azeglio, dedicata a S. M. il Re CARLO ALBERTO, e pubblicata dalla Calcografia dell'Accademia Albertina di Belle Arti. Fasc. 27.º Torino, Fontana, 1844, fol. fig.

S. M. IL RE
CARLO ALBERTO

Famiglie celebri Italiane. Duchi di Savoia; di Pompeo Litta. Parte XIII-XIV. Milano, Ferrario, 1844-1845, fol. fig.

Ramayana. Poema indiano di Valmici, testo sanscrito, secondo i codici manoscritti della scuola Gaudana; per Gaspare Gorresio. Volumi primo e secondo. Parigi, Stamperia Reale, 1843-1844, 8.º

IL MINISTRO
DEGLI
AFFARI INTERNI

Familles historiques de Savoie. Les Scigneurs de Compey; par le Marquis Costa de Beauregard. Chambéry, Puthod, 1844, 1 vol., 4.º

COSTA
DE BEAUREGARD

Per onorare il collocamento nella insigne Pontificia Accademia Romana delle Belle Arti, denominata di S. Luca, della effigie del suo Consigliere e Primo Professore di scultura Alberto Thorwaldsen, scolpita in marmo dal Prof. Cav. Pietro Tenerani; discorso letto nel giorno 23 giugno 1844 dal Prof. Cav. Luigi Canina. Roma, dai tipi dello stesso Canina, 1844, 4.º

CANINA

Risposte del Dott. Ambrogio Fusinieri, su la rugiada, su la scomparsa della neve, ecc., ad articoli dei signori Macedonio Melloni ed Angelo Bellani (Appendice ai Bim. V-VI, 1844 degli *Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto*), 4.º

FUSINIERI

- MITTERMAIER Kritische Zeitschrift für Rechtswissenschaft und Gesetzgebung des Aus-
landes; herausgegeben von Mittermaier und R. v. Mohl. Sechzehnter
Band. Drittes Heft. Heidelberg, Mohr, 1844, 8.º
- DE CAUMONT Statistique routière de Caen à Rouen; par M. De Caumont. Caen,
1843, 8.º
- Lettre sur les cartes agronomiques, et sur l'influence de la nature du
sol sur les productions agricoles; adressée à MM. J. Girardin et Alph.
Du Breuil, par M. de Caumont. Rouen, Pérou, 1844, 8.º
- Inspection des Monuments historiques; par M. De Caumont. Caen,
Hardel, 1844, 8.º
- BALBI De l'activité littéraire de l'Italie; Mémoire de M. Adrien Balbi, lu à
la 2^{ème} Session du Congrès scientifique de France tenue à Strasbourg,
dans la Séance générale du 4 octobre 1842 (Extrait de la *Gazette*
privilegiée de Milan, 1843, N.º 247). 8.º
- D'HOMBRES-FIRMAS Notice biographique sur les Déparcieux, oncle et neveu; par M. le Bon
D'Hombres-Firmas. Alais, Martin, 1844, 8.º
- VANDERMAELEN Essai sur la Statistique générale de la Belgique; composé sur des docu-
ments publics et particuliers, par Xavier Heusschling. Supplément à
la 2^{ème} édition. Bruxelles, Jozef-Hoeberechts, 1844, 4.º
- CAVEDONI Osservazioni critiche di C. Cavedoni sopra i Monumenti antichi inediti
di recente pubblicati dal Cav. Giuseppe Micali (estratte dal Tom. XVII
della *Continuazione delle Memorie di religione, di morale e di let-*
teratura). Modena, eredi Soliani, 1844, 8.º
- CALVI Intorno a due Memorie del Cav. Cibrario (*Dell'uso e della qualità degli*
schiaffi nell'anno 1347 ecc. — Della storia di Ginevra e di alcune
fonti poco note della medesima); di Gottardo Calvi (estr. dal fasc.
11-12 della *Rivista Europea* di Milano, 1844), 8.º
- Discussioni sul progetto di legge del Governo francese, intorno alla ri-
forma delle carceri: art. 1.º e 2.º Riassunto della discussione gene-
rale fatto dal sig. De Tocqueville, relatore, (estr. dai fasc. 9.º
e 10.º della *Rivista Europea* di Milano, 1844). 8.º
- PORRO Dei modi di pubblicità adoperati dai Congressi italiani; di Carlo Porro.
(Estr. dal fasc. 4.º della *Rivista Europea* di Milano, 1844), 8.º
- GIOVANELLI Dei Rezi, dell'origine de' popoli d'Italia, e d'una iscrizione Rezio-Etrusca;
pensieri di Benedetto Conte Giovanelli. Trento, Monanni, 1844, 1
vol., 8.º

- Alterthümliche Entdeckungen im Südtirol seit dem Jahre 1838; von Benedikt Grafen v. Giovanelli. Innsbruck, 1844, 8.° fig.
- Alterthümliche Entdeckungen im Südtirol im Jahre 1838, und über eine auf das alte tirolische Münzwesen bezügliche Urkunde Kaisers Heinrich VII. Beschrieben von Benedikt Grafen v. Giovanelli. Innsbruck, 1840, 8.° fig.
- Della urgenza di riformare il presente sistema delle quarantene: dissertazione di G. F. Barnuffi. Milano, Silvestri, 1844, 8.° BARUFFI
- Di una tempesta e di una tromba terrestre, relazioni con note intorno ad alcuni fenomeni di meteorologia; del Dottore Antonio Perego. Brescia, Tipografia della Minerva, 1844, 8.° con una carta topogr. PEREGO
- Replica di Eugenio Albèri ad un articolo del Prof. Guglielmo Libri (*Journal des Savans*, giugno 1844) relativo alla questione insorta in Firenze circa i lavori di Galileo e di Renieri intorno i Satelliti di Giove, che si conservano nella I. e R. Biblioteca Palatina dei Pitti. Firenze, 1844, 8.° ALBERI
- Des canaux d'arrosage de l'Italie septentrionale dans leurs rapports avec ceux du midi de la France. Traité théorique et pratique des irrigations envisagées sous les divers points de vue de la production agricole, de la science hydraulique et de la législation; par M. Nadault de Buffon. Tom. III. Paris, Fain et Thunot, 1844, 1 vol., 8.° NADAULT DE BUFFON
- Sull'archivio meteorologico centrale italiano, ragguaglio, indirizzato alla sesta Riunione degli Scienziati italiani, di Vincenzo Antinori. Firenze, Tip. Galileiana, 1844, 8.° ANTINORI
- Saggio di classificazione naturale delle Ficce; del Dott. Giovanni Zanardini, aggiunti nuovi studii sopra l'Androsace degli antichi, con tavola miniata ed enumerazione di tutte le specie scoperte e raccolte dall'Autore in Dalmazia. Venezia, Tasso, 1843, 1 vol., 4.° ZANARDINI
- Sulle Corallinee (*Polipai caliciferi* di Lamouroux); rivista del Dottore Giovanni Zanardini. Venezia, Tasso, 1844, 8.°
- Stirpes italicæ rariores vel novæ, descriptionibus iconibusque illustratae; auctore Vincentio e Dyn. Cesati. Accedunt animadversiones in characteres plantarum, pariter tabulis adumbratae. Fasciculus tertius. Mediolani, Pirola, 1844, fol. mass.° CESATI
- Polipi della famiglia dei Tubuliporiani finora osservati nell'Adriatico; Memoria del Prof. Giuseppe Meneghini (Estr. dal Vol. VI dei *Nuovi* MENEGHINI

saggi della I. e R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova).
Padova, Sicca, 1844, 4.°

JORI

Osservazioni critiche sperimentali sull'acido Valerianico; di B. Jori. Milano, Borroni e Scotti, 1844, 8.°

Saggio di fenomeni elettro-chimici nella ripristinazione dell'argento da diverse sue soluzioni saline col mezzo del ferro solo, ed accoppiato ad altri metalli; di B. Jori. Milano, Borroni e Scotti, 1844, 8.°

OSCULATI

Note d'un viaggio nella Persia e nelle Indie orientali negli anni 1841-1842; di Gaetano Osculati. Monza, Corbetta, 1844, 8.° fig.

MONTAGNA

Sul perfezionamento della litotomia nel Veneto; cenni storici del Dottore Giuseppe Montagna. Parma, Carmignani, 1844, 8.°

PASSERINI

Notizie relative a tre specie d'insetti nocivi all'olivo il *Phloiotribus Olae*, l'*Hylesinus adspersus* ed una specie di *Coccus*; del Dott. Carlo Passerini. Firenze, Tipogr. Galileiana, 1843, 8.°

Istoria dei bruci o larve della *Lithosia caniola*, comunissimi in alcuni anni nella città di Firenze; del Dottore Carlo Passerini. Firenze, Tipogr. Galileiana, 1844, 8.°

BALDASSINI

Alcuni cenni storici sul gelso delle Filippine, in riguardo allo allevamento de' bachi da seta, e sulla causa probabile del contrario successo che ora si ottiene; Memoria del Marchese Francesco Baldassini. (Estr. dal Vol. II delle *Memorie della Società Agraria di Bologna*, 1843). 8.°

DE LA CASA

Proposizioni fondamentali del metodo differenziale dimostrate sinteticamente, ecc., con due appendici intorno ai metodi delle flussioni del Newton e delle derivate; Memoria di Vittorio De La Casa (estr. dagli *Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto*, Bim. III-IV, 1844). Vicenza, Tremeschin, 1844, 4.°

Risposta alle osservazioni inserite negli Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, pubblicate coi Bim. IV e V dell'anno 1839, usciti in Venezia sulla fine di gennaio del 1840 con alcune brevi riflessioni intorno al metodo primitivo Leibniziano, nonchè al nuovo metodo differenziale; di Vittorio De La Casa. Padova, Sicca, 1841, 4.°

Sulle equazioni di terzo e quarto grado; Memoria di Vittorio De La Casa. Padova, Cartallier e Sicca, 1840, 4.°

LOMBARDI

Elogi storici dei Socii defunti Cavalieri Domenico Morichini, Valeriano Luigi Brera, e Paolo Mascagni, scritti dal Socio e Segretario Antonio Lombardi. Inseriti nella *Parte Fisica* del Tomo XXIII delle *Memorie*

- della Società italiana delle Scienze residente in Modena*. Modena, dai tipi della R. D. Camera, 1844, 4.° con ritratti.
- Lettere e articoli intorno alla quinta Riunione de' Scienziati italiani, tenuta in Lucca nel settembre del 1843; del Capitano consultore Oreste Brizi. Arezzo, Bellotti, 1844, 8.° BRIZI
- Légende de Barlaam et de Josaphat; notice par le Baron de Reiffenberg. 1^{er} et 2^{ème} articles (extr. du Tom. X des *Bulletins de l'Académie Royale de Bruxelles*). 8.° DE REIFFENBERG
- Extraits de divers manuscrits relatifs à la Belgique; par le Baron de Reiffenberg (extr. du Tom. VII des *Bulletins de la Commission Royale d'Histoire*). 8.°
- Nouveaux extraits des manuscrits relatifs à l'histoire de Belgique; par le Baron de Reiffenberg (extr. du Tom. VIII des *Bulletins de la Commission Royale d'Histoire*). 8.°
- Suite des notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Royale. — Turpin. — Prise de Jérusalem par Saladin, et Croisade de l'Empereur Frédéric I^{er} Barberousse. — Itinéraire de la Terre-Sainte, de Brochart (*addition*); par le Baron de Reiffenberg (extr. du Tom. XI des *Bulletins de l'Académie Royale de Bruxelles*). 8.°
- Suite des notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Royale. — Diversarum lectionum historicarum et antiquarum farrago de Nicolas du Fief. — Un mot sur les Stampien; par le Baron de Reiffenberg (extr. du Tom. XI des *Bulletins de l'Académie Royale de Bruxelles*). 8.°
- Notice sur le Marquis de Fortia-d'Urban; par le Baron de Reiffenberg. Bruxelles, Hayez, 1844, 18.°
- Ricerche storiche intorno ai Trovatori provenzali accolti ed onorati nella Corte dei Marchesi d'Este nel secolo XIII; Memoria dell'Abate Celestino Cavedoni (inserita nel Tom. II delle *Memorie della Reale Accademia di sc., lett., ed arti di Modena*). Modena, Soliani, 1844, 4.° CAVEDONI
- L'Agricoltura, discorso popolare con note, ed epitome degli stabilimenti di beneficenza pei ragazzi poveri in Europa; del Nobil Uomo Don Giuseppe Serra Serra. Sassari, Azzati, 1844, 1 vol., 8.° SERRA SERRA
- Storia letteraria di Sardegna; del Cav. D. Giovanni Siotto-Pintor. Vol. III-IV. Cagliari, Timon, 1844, 2 vol., 8.° SIOTTO-PINTOR
- Elementi di chimica filosofico-sperimentale, compilati da Domenico CAPRIA

Mannone Capria, con l'aggiunta di un trattato di chimica organica. 4.^a edizione migliorata ed accresciuta. Vol. II. Napoli, Festa, 1844, 1 vol., 8.^o

ROSSI

Métallurgie pratique du fer. 2.^{ème} Mémoire. Des fondans et de la réduction des minerais. Traitement aux hauts-fourneaux, dédié à S. M. le Roi CHARLES ALBERT. par C. C. Rossi. Turin, frères Favale, 1844, 8.^o

DE FILIPPI

Cenni sui pesci d'acqua dolce della Lombardia; di F. De-Filippi (estr. dalle *Natizie naturali e civili sulla Lombardia*, Vol. I). Milano, Bernardoni, 1844, 8.^o

BURMEISTER

Die organisation der Trilobiten aus ihren lebenden Verwandten entwickelt; nebst einer systematischen Uebersicht aller zeiter beschriebenen Arten, von Hermann Burmeister. Mit 6 Kupfertafeln. Berlin, Reimer, 1843, 1 vol., 4.^o fig. Handbuch der Entomologie; von Hermann Burmeister. Viertes Band. Besondere Entomologie, Fortsetzung. Berlin, 1844, 1 vol., 8.^o

CONTARINI

Cataloghi degli uccelli e degli insetti delle provincie di Padova e Venezia, compilati dal Nobile signor Conte Niccolò Contarini. Bassano, Baseggio, 1843, 1 vol., 4.^o

DE CALIGNY

Rapport fait par MM. Cordier, Poncelet et Lamé sur la machine hydraulique à flotteur oscillant, de M. de Caligny (extr. des *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, Tom. XIX, séance du 7 octobre 1844), 4.^o

Rapport fait par MM. Cordier, Poncelet et Coriolis sur un Mémoire de M. de Caligny, intitulé: Description d'une machine hydraulique. (Extr. des *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, séance du 13 janvier 1846), 4.^o

Extrait du rapport sur le concours pour le prix de Mécanique fondé par M. de Montyon (année 1838), 4.^o

Rapport fait par une Commission composée de MM. Savart, Poncelet, Séguier, Savary et Coriolis, rapporteur, sur un Mémoire de M. de Caligny, ayant pour objet la description d'une machine de son invention, destinée à élever de l'eau à l'aide des oscillations (extr. des *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, séance du 20 août 1838), 4.^o

Sur la théorie des oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite; par

- Anatole de Caligny (Extr. du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de M. Liouville). 4.º
- Calcul des effets de la machine à élever de l'eau, au moyen des oscillations, de l'invention de M. de Caligny; par G. Coriolis (Extr. du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de M. Liouville). 4.º
- Note sur le calcul des effets de la machine précédente et les dispositions essentielles de ses tuyaux d'ascension. — Coup d'œil historique sur quelques machines à élever l'eau; par Anatole de Caligny (Extr. du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de M. Liouville). 4.º
- Expériences sur les oscillations de l'eau dans une grande conduite de Paris; par Anatole de Caligny (Extr. du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de M. Liouville; Tom. VI, 1841). 4.º
- Mémoire sur un bélier hydraulique à une seule soupape; par M. Anatole de Caligny (Extr. des *Annales des Mines*, Tom. XIV, 1838). 8.º
- Jani Van der Hoeven. Oratio de aucta et emendata zoologia post Linnaei tempora; habita die viii mensis februarii anni MDCCCXLIII, quum Magistratum Academicum deponeret. Lugduni Batavorum, Luchtmans, 1843, 8.º
- Codex Theodosianus. Ad LIV librorum manuscriptorum et priorum editionum fidem recognovit et annotatione critica instruxit Gustavus Haenel. Fasc. II. lib. VI. tit. III. — Lib. X exhibens. Lipsiae, Teubneri, 1839, 1 vol., 4.º
- Novellae Constitutiones imperatorum Theodosii II, Valentiniani III, Maximi, Maioriani, Severi, Anthemii. Ad XLII librorum manuscriptorum et priorum editionum fidem recognovit et annotatione critica instruxit Gustavus Haenel. Prostant Bonnae, apud Adolphum Marcum, 1844, 1 vol., 4.º
- Atti verbali della sezione di geologia, mineralogia e geografia, estratti dal Volume degli Atti della IV.ª Riunione degli Scienziati italiani, ch'ebbe luogo in Padova nel settembre 1843. Padova, coi tipi del Seminario, 1843, 4.º
- Programme des prix proposés par la Société Royale des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille. Lille, Leloux, 1844, 1 fogl., 4.º
- Memoria sulla rabbia canina, divisa in dieci capitoli, nel terzo dei quali si dimostra, colla scorta dei fatti, quali sieno le cause dello sviluppo della rabbia primitiva o spontanea negli animali del genere canino; e nel quarto si presenta un piano facile e sicuro per impedire

VAN DER HOEVEN

HAENEL

DE ZIGNO

SOC. R. DELLE SC.
di Lilla

TOFFOLI

- lo svolgimento di questo terribile veleno; diretta principalmente al popolo, da Luigi Toffoli. Bassano, Baseggio, 1839, 1^o vol., 8.^o
- Nuovi fatti provanti le cause di sviluppo della rabbia spontanea nelle cane; osservazioni di Luigi Toffoli. Padova, Sicca, 1840, 8.^o
- Importanza delle scoperte fatte intorno la rabbia canina dal Chimico Luigi Toffoli; di Giulio de Collina. Padova, Sicca, 1840, 8.^o
- Alcuni pensieri sulla rabbia canina, lettera di Luigi Toffoli al suo amico Bartolomeo Zanon. Padova, Sicca, 1840, 8.^o
- Lettera di Luigi Toffoli al chiariss. sig. Dottor B. M. Bassano, Baseggio, 1841, 8.^o
- Nuovi cenni illustrativi intorno gli studi sulla genesi della rabbia canina; fatti da Luigi Toffoli. Bassano, Baseggio, 1844, 8.^o
- Preuve de l'insénescence du sens intime de l'homme et application de cette vérité à la détermination du dynamisme humain, à la comparaison de ce dynamisme avec celui des animaux, et à l'appréciation des résultats de certaines vivisections. Leçons tirées du cours de Physiologie, fait dans l'année 1843-1844; par le Professeur Lordat. Montpellier, Bochin, 1844, 1 vol., 8.^o fig.
- Des motifs qui ont successivement conduit M. le Professeur Lordat au rétablissement du double dynamisme chez l'homme, et analyse de l'ouvrage de ce Professeur intitulé: Preuve de l'insénescence du sens intime de l'homme, etc.; par H. Kühnholtz. Montpellier, 1844, 8.^o
- Originalité d'une réception doctorale au commencement du XVII^e siècle; par H. Kühnholtz (Extr. de la *Clinique de Montpellier*, rédigée par le Doct. Hubert Rodrigues, N.^o du premier avril 1844), 8.^o
- De l'organicisme, c'est-à-dire du matérialisme médical, à l'occasion d'un cancer du cervelet; par H. Kühnholtz. Montpellier, veuve Ricard, 1844, 8.^o
- Rapport sur divers écrits de MM. Wemaer et De Meyer, adressés à la Société de Médecine pratique de Montpellier, fait au nom d'une Commission par H. Kühnholtz. Montpellier, 1844, 8.^o
- Des écoles médicales de Montpellier, de Paris et de Strasbourg; par H. Kühnholtz. Montpellier, Martel, aîné, 1844, 8.^o
- Relazione del viaggio fatto nella primavera dell'anno 1838 dalla Maestà del Re FEDERICO AUGUSTO DI SASSONIA nell'Istria, Dalmazia e Mon-

- tenegro; del Dottore Bartolomeo Biasoletto. Trieste, Weis, 1841, 1 vol., 8.^o
- Nuove ricerche sulla struttura dei cistomi, fatte da Guglielmo Gasparini. Napoli, Puzziello, 1844, 4.^o fig. GASPARINI
- Éloge historique de Jean-Augustin Florio, Professeur émérite de l'Université de Turin; par Matthieu Bonafous. Turin, Chirio et Mina, 1844, 8.^o BONAFOUS
- Ragionamenti storici economico-statistici e morali intorno all'ospizio dei trovatelli in Milano; del Dottore P. Andrea Buffini. Parte 1.^a Milano, Agnelli, 1844, 1 vol., 8.^o BUFFINI
- La grippe, la tosse ferina, le febbri esantematiche tifoidee, miliari e petecchiali; ed altri morbi epidemici, la cui natura contagiosa è tuttora controversa, investigati analiticamente nelle cause, nella natura ed essenza, dal Dottor Giovanni Strambio. Milano, Pirola, 1844, 1 vol., 8.^o STRAMBIO
- Le vite de' più celebri Capitani e Soldati napoletani, dalla giornata di Bitonto fino a' dì nostri; scritte da Mariano d'Ayala. Napoli, stamperia dell'Iride, 1843, 1 vol., 8.^o D'AYALA
- Coup d'œil général et statistique sur la Métallurgie, considérée dans ses rapports avec l'industrie, la civilisation et la richesse des peuples, principalement en Europe, etc.; par M. Théodore Virlet. Paris, Cosson, 1837, 1 vol., 8.^o VIRLET
- Mémoire sur un nouveau procédé de carbonisation dans les usines, à l'aide de la chaleur perdue des hauts-fourneaux et foyers de forge; par M. Théodore Virlet (extr. des *Annales des Mines*, Tom. X). Paris, Cosson, 1836, 8.^o
- Introduzione allo studio della geologia; di Achille de Zigno. Parte prima. Padova, Sicca, 1843, 1 vol., 8.^o DE ZIGNO
- Logarithmic tables, to seven places of decimals, containing logarithms to numbers from 1 to 120,000, numbers to logarithms from .0 to 1.00000, logarithmic sines and tangents to every second of the circle, with arguments in space and time, and new astronomical and geodesical tables; by Robert Shortrede. Edinburg, Shortrede, 1844, 1 vol., 8.^o SHORTREDE
- Compendious logarithmic tables, embracing logarithms to numbers and numbers to logarithms, with logarithmic sines and tangents to every

- five minutes of the quadrant; by Robert Shortrede. Edinburg, Shortrede, 1844, 8.°
- WALKER The Electrical Magazine, conducted by M. Charles V. Walker, Vol. I. N.° 5-7. London, Stewart and Murray, 1844-1845, 8.°
- SAGREDO Per le nozze Treves dei Bonfilii-Todros, Todros-Treves dei Bonfilii; di Agostino Sagredo. Giulio Mazarini (ritratto da un suo contemporaneo, preceduto da una nota storica dell'editore. Padova, Crescini, 1844, 8.°
- ATENEO di Brescia Commentari dell'Ateneo di Brescia, per l'anno accademico 1842. Brescia, Tipogr. della Minerva, 1844, 1 vol., 8.°
- MATILE Le miroir de Sonabe, d'après le manuscrit français de la Bibliothèque de la ville de Berne, publié par G. A. Matile. Nenchatel, Petitpierre, 1843, 1 vol., 4.°
- VILLA (fratelli) Catalogo dei coleotteri della Lombardia, compilato dai fratelli Antonio e Gio. Battista Villa. Milano, Bernardoni, 1844 (estr. dalle *Notizie naturali e civili sulla Lombardia*, Vol. I). 8.°
- Catalogo dei molluschi della Lombardia, compilato dai fratelli Antonio e Gio. Battista Villa. Milano, Bernardoni, 1844, 8.°
- Note su alcuni insetti osservati nel periodo dell'eclisse dell'8 luglio 1842; di Antonio Villa. Milano, Pirota, 1842, 16.°
- BURNOUT Le Bhāgavata Purāna, ou histoire poétique de Kriṣṇa; traduit et publié par M. Eugène Burnouf. Tome II. Paris, Imprimerie Royale, 1844, 1 fort vol., fol.
- BERTOLONI Antonii Bertolonii Flora Italica, sistens plantas in Italia et in insulis circumstantibus sponte nascentes. Vol. V. Bononiae, Masius, 1842, 1 vol., 8.°
- SEIMI Qualche ricerca sull'elettro-doratura; del Professore Francesco Selmi. (Estr. dagli *Annali di fisica, chimica e matematiche*, del Professore Majocchi, fasc. 42.°, giugno 1844). 8.°
- PRATON Samachschari. . . . Collane d'oro, come dono del nuovo anno; per Giuseppe Hammer. In arabo e tedesco. Vienna, 1835, 8.°
- Il trifoglio del falcone, composto di tre opere inedite sopra la falconeria, cioè: 1.° il libro del falcone, pubblicato sulla fede d'un Codice dell'Ambrosiana di Milano. 2.° L'addottrinamento del falcone, da un Codice Greco dell'Imp. Biblioteca di Vienna. 3.° Il manoscritto dell'Imperatore Massimiliano sopra la falconeria, da un Codice dell'Imp. Biblioteca di Vienna. Tradotto dal Turco e dal Greco in

- Tedesco, ed illustrato con note da G. Hammer Purgstall. Pesth, 1840, 1 vol., 8.º
- Vocabularium Coptico-Latinum et Latino-Copticum, e Peyroni et Tattami lexicis continetur G. Parthey. Berolini, typis Academicis, 1844, 1 vol., 8.º
- Novo Dictionário critico e etymológico da lingua Portugueza, precedido de huma introdução grammatical, por Francisco Solano Constancio. Paris, Casimir, 1836, 1 vol., 4.º
- Monuments pour servir à l'histoire des provinces de Namur, de Hainaut et de Luxembourg, recueillis et publiés pour la première fois par le Baron de Reiffenberg. Tom. I.º Bruxelles, Hayez, 1844, 1 vol., 4.º fig.
- Rapport sur la troisième session du congrès de vignerons français, réunie à Marseille le 20 août 1844, sur la douzième session du Congrès scientifique de France, ouvert à Nîmes le 1.º septembre suivant, et sur la sixième réunion scientifique Italienne, tenue à Milan du 12 au 27 du même mois; par M. Guillory aîné (extr. du *Bulletin de la Société industrielle d'Angers et du départ. de Maine et Loire*, N.º 6, 15.º année). Angers, Cosnier et Lachèse, 1844, 8.º
- Historical Sketch of Pepys' island in the South Pacific ocean, from the work on the Rio de la Plata, by P. De Angelis. Buenos-Ayres, 1842, 8.º fig.
- Descripcion de la nueva provincia de Otuquis en Bolivia. Segunda edicion, corregida y aumentada; por Mauricio Bach. Buenos-Ayres, imprenta Argentina, 1843, 4.º con una carta geografica.
- Lettres archéologiques sur Marseille; par M. J. B. Lantard. 2.º édition. Marseille, Olive, 1844, 1 vol., 8.º
- Paulli Baronii dissertatio de educatione calculorum, qui in prostatica urethrae regione concrevere, et de bilateralis methodi ad hos educendos utilitate (Acad. Scient. trad. die 17 maii 1838). Bononiae, ex typogr. Emygdii ab Ulmo, 1843, 4.º
- Alcune operazioni di tenotomia e miotomia, fatte e descritte dal Dottore Francesco Sani. Roma, Puccinelli, 1844, 8.º fig.
- Die Theogonie, Philosophie und Kosmogonie der Hindus; von dem Grafen M. Björnstjerna. Stockholm, 1843, 1 vol., 8.º
- La nuova illuminazione in Milano, col metodo per preparare il gas e

DE REIFFENBERG

GUILLORY aîné.

DE ANGELIS

LAUTARD

BARONI

SANI

BJÖRNSTJERNA

CALDERINI

per servirsene. Esposto all'intelligenza di tutti con tariffe e figure, dal Chimico Isidoro Calderini. Milano, Tamburini, 1844, 8.^o fig.

RUSPINI

Manuale eclettico dei rimedii nuovi, ossia raccolta dei preparati e dei semplici di recente scoperti o da poco tempo introdotti in medicina, con la succinta storia d'ogni medicamento, ecc.; compilato da Giovanni Ruspini. Bergamo, Mazzoleni, 1844, 1 vol., 12.^o

BONAFOUS

Le ver à soie, poème en deux chants de Marc-Jérôme Vida, traduit en vers français, avec le texte latin en regard, par Matthieu Bonafous. 2.^{de} édition. Paris, M.^{me} veuve Bonchard-Huzard, 1844, 1 vol., 8.^o

SOLLY
Ministro della Guerra
in Francia

Dictionnaire Français-Barbère (dialecte écrit et parlé par les Kabâiles de la division d'Alger), ouvrage composé par ordre de M. le Ministre de la Guerre. Paris, imprimerie Royale, 1844, 1 vol., 4.^o

Rudiments de la langue Arabe, de Thomas Erpenius, traduits en français, accompagnés de notes et suivis d'un supplément indiquant les différences entre le langage littéral et le langage vulgaire; par A. E. Hébert. Paris, imprimerie Royale, 1844, 1 vol., 8.^o

GINGINS-LA-SARRAZ

Annales de l'Abbaye du Lac-de-Joux depuis sa fondation jusqu'à sa suppression en 1536; par Fréd. de Gingins-la-Sarraz. Lausanne, Ducleux, 1842, 1 vol., 8.^o

Notice sur le monument sépulcral déconvert à la Sarraz, canton de Vaud; par le Baron Frédéric de Gingins-la-Sarraz. 2.^{de} édition. Lausanne, Blanchard, 1840, 8.^o

Traité de confédération conclu entre Jean Comte de Gruyère, Adrien de Bubenbergh, Bartholomé, Baron de la Sarraz et François de Gingins, avec *fac-simile*. Ann. 1504. Lausanne, Pache, 1844, 8.^o

Développement de l'indépendance du Haut-Vallais et conquête du Bas-Vallais; étude rétrospective par M. Fréd. de Gingins-la-Sarraz.

SELMI

Programma di premii proposto dalla Società di Agricoltura della provincia di Reggio in Lombardia. Reggio, 1844, 4.^o

GAZZERA

Iscrizione pei solenni funerali celebratisi il 14 di gennaio 1845 pel fu Ecc.^{mo} Marchese Carlo Emanuele Alfieri di Sostegno; del Cav. C. Gazzera. Torino, 1845, fol.

Société pour le patronage des jeunes détenus et des jeunes libérés du département de la Seine, reconnue comme établissement d'utilité publique par ordonnance Royale du 5 juin 1843. Assemblée générale tenue à l'Hôtel-de-Ville, le 14 juillet 1844. Paris, Henry, 1844, 8.^o

- Modificazioni all'operazione del fimosi sinizesi imperfetta con pseudo-cataratta guarita col taglio dell'iride; una modificazione alla cheiloplastin; del Prof. Cav. Alessandro Riberi (estr. dal *Giornale delle scienze mediche*, fascicolo di febbraio, 1842). Torino, Cassone e Marzorati, 1842, 8.º
- Annales de la Chambre Royale d'Agriculture et de Commerce de Savoie. Tom. 2.^{me} Chambéry, imprimerie du Gouvernement, 1844, 1 vol. 8.º, fig.
- Sunto di alcuni studi sull'acido valerianico e sul clorovalerianato di ferro; lettera indiritta da Giovanni Righini al chiar.^{mo} Dott. Antonio Cattaneo (estr. dalla *Biblioteca di farmacia-chimica di Milano*, dicembre 1844). 8.º
- Cataloghi della dattiloteca del fu Abate Carlo Antonio Pullini. Torino, Speirani e Ferrero, 1844, 4.º
- Opere di Giambattista Vico per la prima volta compiutamente riunite, con traduzioni e commenti, da Francesco Predari. Vol. I. Milano, Bravetta, 1835, 1 vol., 8.º
- Origine e vicende dei zingari, con documenti intorno le speciali loro proprietà fisiche e morali, la loro religione, i loro usi e costumi, le loro arti e le attuali loro condizioni politiche e civili in Asia, Africa ed Europa, con un saggio di grammatica e di vocabolario dell'arcano loro linguaggio; di Francesco Predari. Milano, Lampato, 1841, 1 vol., 8.º fig.
- Le Amazzoni rivendicate alla verità della storia, con un quadro dell'origine, delle costumanze, della religione, delle imprese, del decadimento e della totale loro dispersione; avvalorato con documenti tratti dalle tradizioni, dagli storici, e dai monumenti di scultura, pittura e numismatica dell'antichità: di Francesco Predari. Milano, Bravetta, 1839, 1 vol., 8.º
- Della vita e delle opere di Bonaventura Cavalieri, non che dei titoli che gli meritano il monumento che gli erige la patria; cenni di Francesco Predari. Milano, Redaelli, 8.º
- Origine e progresso dello studio delle lingue orientali in Italia; Memoria di Francesco Predari. Milano, Lampato, 1842, fol.
- Dizionario analitico di diritto e di economia industriale e commerciale; opera del Cav. Angelo Melano di Portula, con appendice delle differenze tra il Codice di commercio de' Regii Stati e quelli in vigore

RIBERI

R. CAMERA D'AGRIC.
E DI COMMERCIO
di Savoia

RIGHINI

PULLINI

PREDARI

MELANO DI PORTULA

- presso altre nazioni d'Europa. Parte 3.^a Torino, stamperia Sociale, 1845, 8.^o
- LUCAS-
CHAMPIONNIERE Statistique du personnel médical en France et dans quelques autres contrées de l'Europe, avec une carte figurative du nombre des Médecins comparé à la population; par Lucas-Championnière. Paris, Crapelet, 1845, 1 vol., 8.^o
- ELICE Osservazioni ed esperienze sull'elettricità. Lettera del Prof. Ferdinando Elice al sig. Cav. Prof. Luigi Foppiani. Genova, tip. Sordo-muti, 1844, 8.^o
- GAZZERA Buddismo Indico. Lettera del Cav. Gaspare Gorresio al Cav. Costanzo Gazzera, Segretario della Reale Accademia delle Scienze di Torino. (Estr. dalla *Gazz. Piem. N.º 22 del 1845*). 8.^o
- HUZARD Des haras domestiques et des haras de l'état en France; par J. B. Huzard. 2.^{ème} édition. Paris, Bouchard-Huzard, 1843, 1 vol., 8.^o
- BONAFOUS Jardin expérimental d'agriculture créé à Saint-Jean-de-Maurienne par le Chev. Bonafous, dirigé par M. le Doct. Mottard. Turin, Chirio et Mina, 1842, 8.^o
- Jardin expérimental de Saint-Jean-de-Maurienne établi par M. le Chev. Bonafous, et dirigé par M. le Doct. Mottard (extr. des *Annales de l'Académie d'Agriculture de Turin*). Turin, Chirio et Mina, 1844, 8.^o
- Seizième lettre à M. Matthieu Bonafous, sur la culture du murier et sur les éducations de vers à soie dans le départ. de l'Aveyron; par M. Amans Carrier, de Rodez (extr. des *Ann. de l'Agric. française*, 1844). 8.^o
- Éducation automnale de vers à soie. Concours aux prix proposés par la Société Royale d'Agriculture de Turin, par son programme du 3 mars 1841 (extr. des *Ann. de la Société séricicole*). 8.^o
- VALLAURI Thomae Vallaurii de caussis corruptae eloquentiae. Oratio habita in Regio Taurinensi Athenaeo nonis novembris an. M. DCCC. XXXIII. Taurini, ex officina Regia, 1844, 8.^o
- GRIMELLI Storia scientifica ed artistica dell'elettrometallurgia originale italiana, con un saggio teorico-pratico di elettrometallurgia piana e solida, e un'appendice lessicologica relativa alle discorse materie elettrofisiche, elettrochimiche, elettrometallurgiche; del Professore Geminiano Grimelli. Modena, Cappelli, 1844, 1 vol., 8.^o
- DI PONSIGLIONE Saggio storico intorno ai Tempieri del Piemonte e degli altri stati di

S. S. R. M. il Re di Sardegna; del Cav. Luigi Ferrero di Ponsiglione. Genova, 1844, 1 vol., 8.^o

Riforma delle quarantene; sesta lettera di G. F. Baruffi al sig. P. B. Ferrero. (estr. dal *Messaggiere* N.° 5, 1.° febbraio 1845), 12.

BARUFFI

Elementi di geografia fisica; esposti in tre prospetti sinottici da Giovanni Codemo. Treviso, Andreola, 1844, fol.

CODEMO

Trattato di medicina pubblica, diviso in tre parti: Medicina legale, Polizia medica, Giurisprudenza della medicina; ed esteso secondo lo stato attuale delle scienze mediche e della legislazione in Europa, e soprattutto nei domini Austriaci; da Giuseppe Luigi Gianelli. Vol. I. Padova coi tipi della Minerva, 1836, 1 vol., 8.

GIANELLI

I documenti ed atti intorno alla peste orientale prodotti al Congresso scientifico di Milano nel settembre 1844, passati in rivista dalla Commissione a ciò istituita; notificati al pubblico ed illustrati da un membro della medesima. Milano, Turati, 1845, 4.

Duodecimo Congresso scientifico di Francia tenutosi in Nîmes nel settembre 1844; relazione del Dott. Cav. B. Bertini (art.° estratto dal *Giornale delle scienze mediche di Torino*, anno VIII). Torino, Mussano, 1845, 8.

BERTINI

Petit Code philosophique et moral, exposé sommaire de douze lois générales, qui se reproduisent dans toutes les œuvres de la nature et dans toutes les choses humaines; et souvenirs de deux Congrès scientifiques de France et d'Italie; par Marc-Antoine Julien. Paris, Lacour et C., 1844, 8.

JULIEN

Select Papyri in the hieratic character, from the collections of the British Museum, with prefatory remarks. Part III (by Edward Hawkins). London, Nicol, 1844, fol.

HAWKINS

Istoria do cativerio dos prezos d'estado na Torre de S. Julião da barra de Lisboa durante a dezastrôza epoca da uzurpação do legítimo Governo constitucional deste reino de Portugal; por João Batista da Silva Lopes. Tom. I-III. Lisboa, na imprensa nacional, 1833-1834, 2 vol., 12.^o

SILVA LOPES

Corografia ou memoria economica, estadistica, e topografica do reino do Algarve; por João Baptista da Silva Lopes. Lisboa, 1841, 1 vol., 8.^o

Relação da derrota naval, façanhas, e successos dos cruzados que partirão do Escalda para a Terra Santa no anno de 1189, escrita

SERIE II. TOM. VII.

em latim por hum dos mesmos cruzados; dada à luz pelos desvélos e cuidados do Cavalheiro Constancio Gazzera, Secretario da R. Academia de Turim; traduzida e annotada por João Baptista da Silva Lopes. Lisboa, 1844, 1 vol., 8.^o

RONARD

Rapport de la commission d'archéologie d'Aix sur les fouilles d'antiquités faites à Aix, en 1843 et 1844; par M. Ronard. Aix, Vitalis, 1844, 4.^o fig.

MINZI

Sopra la genesi delle febbri intermittenti, specialmente di Roma e della sua provincia australe; ricerche critico-analitiche di Giuseppe Minzi. Roma, Salviucci, 1844, 1 vol., 8.^o

LADOUCKETTE

Mélanges; par J. C. F. Ladoucette. 2.^{de} édition. Paris, Malteste et C.^e, 1845, 1 vol., 8.^o

PERETTI

Analisi della vera corteccia di Pereira usata nel Brasile contro le febbri intermittenti; del Prof. Pietro Peretti (Mem. estr. dagli *Annali medico-chirurgici*, anno VI, Vol. XI). Roma, Puccinelli, 1845, 8.^o

CONTARINI

Trattato delle Attinie, ed osservazioni sopra alcune di esse viventi nei contorni di Venezia, accompagnate da 21 tavole litografiche; lette all'Ateneo Veneto in varie tornate, cominciando dall'anno 1834, dal socio ordinario C.^{te} Niccolò Contarini. Venezia, Antonelli, 1844, 1 vol., 4.^o

PARLATORE

Maria Antonia, novello genere della famiglia delle Leguminose; descritto da Filippo Parlatore. Firenze, 1844, 4.^o fig.

BARNEOUD

Mémoire de botanique. Recherches sur le développement, la structure générale et la classification des plantaginées et des plumbaginées. — Mémoire de géologie. De l'origine des lacs. — Thèses pour le Doctorat, présentées et soutenues à la Faculté des sciences de Paris, le 3 août 1844; par F. Marius Barneoud. Paris, Schneider et Langrand, 1844, 4.^o

EICHHOFF

Parallèle des langues de l'Europe et de l'Inde, ou étude des principales langues romanes, germaniques, slaves et celtiques, comparées entr'elles et à la langue sanscrite; par F. G. Eichhoff. Paris, impr. Royale, 1836, 1 vol., 4.^o

BOTTAU

Osservazioni filologico-critiche del P. Giacomo Bottau, sull'opera moderna intitolata: *Aiuto allo scrivere purgato*, ecc.; di Antonio Lissoni; precedute da una dissertazione sopra la lingua italiana. Torino, Zecchi e Bona, 1845, 1 vol., 12.^o

R. CAMERA D'AGRIC.
E DI COMMERCIO
di Torino

Quarta esposizione d'industria, e di belle arti al Real Valentino nel 1844. Giudizio della Regia Camera di Agricoltura e di Commercio di

- Torino, e notizie sulla patria industria, compilate da Carlo Ignazio Giulio, relator centrale. Torino, stamperia Reale, 1845, 1 vol., 8.^o
- Biblioteca di commercio, compilata per cura di G. Bursotti. Anno I.^o Tom. I-II. Napoli, Batelli e C.^a, 1841-1842, 3 vol., 8.^o BURSOTTI
- Introduction à l'histoire du Bouddhisme indien; par E. Burnouf. Tome I.^{er} Paris, imprimerie Royale, 1844, 1 vol., 4.^o BERNOUF
- Risposta al tema pubblicato dalla Società medico-chirurgica di Bologna il giorno 15 maggio 1842; Memoria del Dottor Cesare Castiglioni, giudicata degna di premio. Bologna, tipogr. Governativa, 1844, 1 vol., 4.^o CASTIGLIONI
- Compte-rendu du congrès scientifique tenu à Strasbourg (10.^e session), par M. Jullien de Paris (extr. du *Recueil de la Société polytechnique*, livr. de décembre 1842). 8.^o JULLIEN
- Examen historique et critique des nouvelles doctrines médicales sur le traitement de la syphilis. Discours prononcé devant l'Administration de l'Hospice de l'Antiquaille de Lyon, dans sa séance publique du 1.^{er} juin 1842; par L. P. Aug. Gauthier. La Guillotière, Bajat, 1842, 8.^o GAUTHIER
- Dissertation sur la question suivante: La femme belge qui a épousé un Français; sous l'empire de la loi de 1816, peut-elle, après qu'un jugement (rendu par un tribunal compétent) a prononcé la séparation de corps entre elle et son mari, reconvrer la qualité de Belge, et demander, en conséquence, contre son mari resté sujet de la loi française, la transformation de la séparation de corps en divorce, conformément à l'art. 310 du Code Napoléon qui régit encore la Belgique? par M. Blondeau. Paris, Fain et Thunot, 1844, 8.^o BLONDEAU
- Guida all'analisi chimica qualitativa, opera scritta ad uso dei principianti, dal D. Remigio Fresenius; con una prefazione del D. Giusto Liebig. Prima versione italiana, sulla terza edizione tedesca del 1844, per cura di A. Sobrero. Torino, Zecchi e Bona, 1845, 1 vol., 8.^o SOBRERO
- L'Abbazia di Chiaravalle presso Milano, monumento del secolo XII; studio di storia patria di Gottardo Calvi (estr. dalla *Rivista Europea* di Milano, 1844). 8.^o CALVI
- Delle società di mutuo soccorso esistenti in Italia; rapporto di Gottardo Calvi al sesto congresso scientifico (estr. dalla *Rivista Europea* di Milano, 1844). 8.^o

- DE LA RIVE Notice sur la vie et les ouvrages de M.^r A. P. de Candolle; par M.^r le Prof. A. de la Rive. Genève, Ramboz, 1845 (tiré de la *Bibliothèque Univers. de Genève*, 1844), 1 vol., 8.^o
- I DIRETTORI DELLA SPECOLA Astronomical observations made at the Radcliffe observatory, Oxford, in the year 1842; by Manuel J. Johnson, Radcliffe observer. Vol. III. Published by order of the Radcliffe Trustees, Oxford, Baxter, 1844, 1 vol., 8.^o
- BIAGINI Sulla evoluzione spontanea del feto; osservazioni del Prof. Carlo Biagini. (Estr. dall' *Ippocrate*, giornale di scienze mediche di Pisa, 1845). 8.^o
- POGGI Pei solenni funerali del Cav. P. Giambatista Spotorno; orazione letta, il dì 23 marzo 1844, nella Chiesa prepositurale di Santa Maria Maddalena, dal Sacerdote e Dott. Filippo Poggi. Genova, 1845, 8.^o
- ORMEA Lettere chimiche applicate all'agricoltura, alla medicina, alle arti ed al commercio, di M. Justus Liebig; traduzione, dall'originale tedesco, del Dottore Carlo Ormea. Torino, Speirani e Ferrero, 1844, 4 vol., 8.^o
- VEGEZZI - RUSCALLA Marilia di Direco, lire di Tommaso Antonio Gonzaga, brasiliano; tradotte dal portoghese da Giovenale Vegezzi-Ruscalla. Torino, stamp. Sociale degli artisti, 1844, 1 vol., 12.^o
- SOC. DELLE SCIENZE NATURALI di Haarlem Natuurkundige Verhandelingen van der Hollandsche maatschappij der Wetenschappen te Haarlem. Tweede Verzameling. 3.^e deel, 1.^e stuk. Haarlem, 1844, 4.^o
- CANINA L'Architettura antica descritta e dimostrata coi monumenti dall'Architetto Cav. Luigi Canina. Sezione prima, Architettura egiziana, fascicoli IX, X e XI. Roma, dai tipi dello stesso Canina, 1844, fol. gr. fig.
- PROVANA Studi critici sovra la storia d'Italia a' tempi del Re Arduino; del Cav. L. G. Provana. Torino, stamperia Reale, 1844, 1 vol., 8.^o
- PERREY Leçons de cosmographie, rédigées d'après le programme de l'Université, par Alexis Perrey. Dijon, Douillier, 1838, 1 vol., 12.^o fig.
- Rapport fait par M. Quetelet sur un Mémoire de M.^r Alexis Perrey, intitulé: Mémoire sur les tremblements de terre ressentis en France et en Belgique, depuis le IV.^e siècle jusqu'à nos jours (1843) (extr. du Tome XI des *Bulletins de l'Acad. R. de Bruxelles*). 8.^o
- Nouvelles recherches sur les tremblements de terre ressentis en Europe et dans les parties adjacentes de l'Afrique et de l'Asie, de 1801 à juin 1843; par M.^r Alexis Perrey (extr. des *Comptes rendus des*

des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, séance du 25 sept. 1843). 4.°

Liste des tremblements de terre ressentis en Europe et dans les parties adjacentes de l'Afrique et de l'Asie, pendant l'année 1843; par M.^r Alexis Perrey (extr. des *Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France*, Tome XVIII, séance du 11 mars 1844). 4.°

Liste des tremblements de terre ressentis en Europe pendant l'année 1844; par M.^r Alexis Perrey (extr. des *Mémoires de l'Acad. de Dijon*). 8.°

Notice sur les tremblements de terre ressentis à Angers et dans le département de Maine et Loire; par M.^r Alexis Perrey (extr. du *Bulletin de la Société industrielle d'Angers*). Angers, Cosnier et Lachèse, 1844. 8.°

Ouvres de Laplace. — Traité de mécanique céleste. — Paris, imprimerie Royale, 1843-1844. Tomes I-III, 4.°

Astronomie solaire d'Hipparque, soumise à une critique rigoureuse, et ensuite rendue à sa vérité primordiale; par J. B. P. Marcoz. Paris, Crapelet, 1828, 1 vol., 8.°

Astronomie solaire simplifiée, fondée sur les observations tant anciennes que du moyen âge, et prouvant l'exclusion des variations séculaires théoriques introduites dans les calculs des lieux du soleil. Paris, Crapelet, 1832, 1 vol., 8.°

Erreur des astronomes et des géomètres d'avoir admis l'accélération séculaire de la lune, etc. Paris, Crapelet, 1833, 1 vol., 8.°

Étude comparative sur les états-généraux de France et les parlements d'Angleterre; par M.^r A. Boullée. Lyon, Boitel, 1845, 8.°

Indovinamento de' mezzi di cui avrà potuto valersi Archimede per far andar per terra, con la sola forza della sua mano, una grandissima nave carica di un peso enorme; di M. A. Costa. Napoli, 1844, 8.°

Atti della quinta riunione degli Scienziati italiani tenuta in Lucca nel settembre del 1843. Lucca, Ginisti, 1844; 1 vol., 4.° fig.

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon. Tome I, livraisons 1-2. Lyon, Boitel, 1845, 8.°

Aperçu de la structure géologique des Alpes; par B. Stüder. 2.^{me} édition. (Extr. des *Nouvelles excursions de M. Desor*). Neuchâtel, Wolfrath, 1845, 8.°

DE SALVANDY
Ministro dell' istruz.
pubblica
in Francia

L'AMMINISTRAZIONE
DELLA BIBLIOTECA
PUBBLICA
di Ciamberi

BOULLÉE

COSTA

PAGINI

ACCAD. DI SCIENZE
di Lione

STÜDER

- GICLIO Quarta esposizione d'industria e di belle arti al Real Valentino. Giudizio della Regia Camera d'Agricoltura e di Commercio di Torino, e notizie sulla patria industria compilate da Carlo Ignazio Giulio, relator centrale. Torino, Stamperia Reale, 1845, 1 vol., 8.^o
- NYST Notice sur deux coquilles colombiennes, du genre *Bulinus*, par M. H. Nyst. 8.^o fig.
Additions à la Faune conchyliologique des terrains tertiaires de Belgique; par M. Nyst (extr. du *Tom. IX*, N.^o 5 des *Bulletins* de l'Académie Royale de Bruxelles).
- QUETELET Observations des phénomènes périodiques; par A. Quetelet (extr. du *Tom. XVII des Mémoires* de l'Académie Royale de Bruxelles). 4.^o
Académie Royale des Sciences et belles-lettres de Bruxelles. Instructions pour l'observation des phénomènes périodiques; par A. Quetelet. 4.^o
Recherches statistiques; par A. Quetelet. Bruxelles, Hayez, 1844, 1 vol., 4.^o
Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles; publiées par le Directeur A. Quetelet. Tome III. Bruxelles, Hayez, 1844, 1 vol., 4.^o
- PERETTI Dell'urea: Memoria del Professore Pietro Peretti (estr. dagli *Ann. medico-chirurgici*. Anno VI. Vol. XI. N.^o 3). Roma, Puccinelli, 1845, ½ fogl., 8.^o
- PARDESSUS Loi salique, ou recueil contenant les anciennes rédactions de cette loi et le texte connu sous le nom de *lex emendata*, avec des notes et des dissertations; par J. M. Pardessus. Paris, Impr. Royale, 1843, 1 vol., 4.^o
- BUFALINI Opere di Maurizio Bufalini. Vol. I. Parte 2.^a Firenze, tipogr. Galileiana, 1844, 1 vol., 8.^o
- GARRUCCI Antichità dei liguri Bebiani, raccolte e descritte dal P. Raffaele Garrucci, della Compagnia di Gesù. Napoli, Nobile, 1845, 8.^o
- MARTINI Sulla Biblioteca della Regia Università di Cagliari; Memoria del Cav. Pietro Martini. Cagliari, Timon, 1845, 1 vol., 8.^o
- S. M. LA REGINA
MARIA CRISTINA Storia e descrizione della R. Badia d'Altacomba, antico sepolcro dei Reali di Savoia, fondata da AMEDEO III, rinnovata da CARLO FELICE e MARIA CRISTINA; del Cav. Luigi Cibrario. Torino, Fontana, 1843, 2 vol., fol. inass., fig.
- BONAPARTE Catalogo metodico dei Mammiferi europei; di Carlo L. Principe Bonaparte. Milano, Pirola, 1845, 4.^o

Catalogo metodico dei Ciprinidi d'Europa, e rilievi sul Vol. XVII dell'Istoria naturale dei pesci del sig. Valenciennes; di Carlo L. Principe Bonaparte. Milano, Pirola, 1845, 4.^o

Specchio generale dei sistemi erpetologico, anfibiologico, ed ittologico: di Carlo L. Principe Bonaparte. Milano, Pirola, 1845, 4.^o

Calcutta Journal of Natural History; by John M. Clelland, and W. Griffiths. Vol. V. N.° 17-20. Calcutta, 1844, 8.^o fig.

M^r CLELLAND
e GRIFFITH

Sulla trattura delle sete e sulla condizione dell'industria serica in Piemonte; di Lorenzo Valerio. Torino, Chirio e Mina, 1845, 8.^o

VALERIO

Untersuchungen über die freien Walliser oder Walser in Graubünden und Vorarlberg. Mit einigen diese Gebiete betreffenden historischen Erläuterungen; von Joseph Bergmann. Wien, Gerold, 1844, 1 vol., 8.^o fig.

BERGMANN

Transactions of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. New Series. Vol. IX, Part. I. Philadelphia, Young, 1844, 4.^o fig.

SOC. FILOSOFICA
AMERICANA
di Filadelfia

Proceedings of the American Philosophical Society. Vol. IV, N.° 28-29. Philadelphia, 1843-1844, 8.^o

Archives du Muséum d'histoire naturelle, publiés par les Professeurs-Administrateurs de cet établissement. Tom. III, livr. 4.^e Paris, 1843, 4.^o

MUSEO DI STORIA
NATURALE
di Parigi

Het Instituut, of verslagen en Mededeelingen, uitgegeven door des vier klassen van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, over den Jaltre 1843. N.° 2-3. Amsterdam, Müller, 1843-1844, 8.^o

R. ISTITUTO
DELLE SCIENZE
di Amsterdam

Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze residente in Modena. Tomo XXIII. Parte contenente le Memorie di fisica. Modena, R. tipogr. Camerale, 1844, 4.^o fig.

SOCIETÀ ITALIANA
DELLE SCIENZE
di Modena

Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg. VI.^{ème} série. Sciences mathématiques, physiques et naturelles. Tom. V.^e, première partie: Sciences mathématiques et physiques; Tom. III.^e, livraisons 4-6; Tome IV.^e, livraison 1.^e — Sciences politiques, histoire, philologie; Tom. VI.^e, livraisons 5-6; Tome VII.^e, livraisons 1-3. — Saint-Petersbourg, imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, 1843 et 1844, 4.^o fig.

ACCADÉMIA
di Pietroburgo

Recueil des Actes de la séance publique de l'Académie Impériale des

- Sciences de Saint-Petersbourg, tenue le 29 décembre 1843. Saint-Petersbourg, 1844, 4.°
- SOCIETÀ IMPERIALE
DEI NATURALISTI
di Mosca** Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscon. Année 1843, Tom. XVI, N.° IV. — Année 1844, Tom. XVII, N.° I-III. Moscon, Semen, 1843-1844, 8.° fig.
- SOCIETÀ LINNEANA
di Londra** The transactions of the Linnean Society of London. Vol. XIX. Part. III. London, 1844, 4.° fig.
- List of the Linnean Society of London, 1844, 4.°
- Proceedings of the Linnean Society of London. From June 1843 to June 1844, 8.°
- R. ACCAD. DI SCIENZE
di Modena** Programma di concorso aperto dalla Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Modena, 1845, 4.°
- Rapporto della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena intorno ai lavori inviati pel concorso di premio stabilito nel programma del 31 dicembre 1842. Modena, 1845, 4.°
- ACCAD. DE' CURIOSI
DELLA NATURA
di Breslavia** Novorum Actorum Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae naturae curiosorum voluminis undevicesimi supplementum primum, sistens F. J. F. Meyenii observationes botanicas in itinere circum terram institutas. Opus posthumum, sociorum Academiae curis suppletum. Cum tabulis XIII. Vratislaviae et Bonnae, 1843, 1 vol., 4.°
- R. ACCAD. DI AGRIC.
di Torino** Annali della R. Accademia d'Agricoltura di Torino, in continuazione della Raccolta delle Memorie della R. Società Agraria. Vol. 3.° Torino, Chirio e Mina, 1845, 8.°
- Statuti della Reale Accademia di Agricoltura di Torino. Torino, Chirio e Mina, 1845, 8.°
- Quesiti proposti dalla Reale Accademia d'Agricoltura di Torino nell'anno 1845 sulla produzione della seta. 8.°
- SOCIETÀ
MEDICO-CHIRURGICA
di Bologna** Memorie della Società Medico-Chirurgica di Bologna. Vol. III, fasc. 5.°; Vol. IV, fasc. 1.° Bologna, 1844-45, 4.° picc.
- Bullettino delle Scienze mediche della Società medico-chirurgica di Bologna. I fascicoli di maggio 1844 ad aprile 1845. 8.°
- SOCIETÀ
MEDICO-CHIRURGICA
di Torino** Giornale delle Scienze mediche della Società medico-chirurgica di Torino. I fascicoli di settembre 1844 a maggio 1845. 8.°
- ASSOCIAZIONE
AGRARIA** Gazzetta della Associazione Agraria. Anno II, N.° 36-52; anno III, N.° 1-24. Torino, Chirio e Mina, 1844-1845. 4.°
- Gazette de l'Association Agricole. Année II, N.° 36-52; année III, N.° 1-24 Turin, Chirio et Mina, 1844-1845. 4.°

Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto. Vol. XIII, bimestri V e VI. Vicenza, 1844, 4.^o

Annales des mines, ou Recueil de Mémoires sur l'exploitation des mines, et sur les sciences et les arts qui s'y rapportent, rédigés par M.^{rs} les Ingénieurs des mines. IV.^o série; Tome V, Livraisons 2-3; Tome VI, Livr. 4-6. Paris, 1844, 8.^o

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut Royal de France; par M.^{rs} les Secrétaires Perpétuels. Tome XIX, N.^{os} 9-27; Tome XX, N.^o 1-21. Paris, 1844-1845, 4.^o

Annales de la Société Royale d'Horticulture de Paris. Livraisons 195-203. Paris, 1844-1845, 8.^o

Bulletin de la Société de Géographie de Paris. Série III, Tome I-II. Paris, 1844, 8.^o

Bulletin de la Société Géologique de France. 1.^{re} série, Tome XIV, feuilles 43-47. 2.^e série, Tom. I, feuilles 28-38; Tome II, feuilles 1-16. Paris, 1843-1845, 8.^o

Bulletin des séances de l'Académie Royale de Bruxelles. Tome XI, N.^o 4-8. Bruxelles, Hayez, 1844, 8.^o

Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers, publiés par l'Académie Royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles. Tome XVI, 1843. Bruxelles, Hayez, 1844, 1 vol., 4.^o fig.

FUSINERI

AMMINISTRAZIONE
DELLE MINIERE
di FranciaISTITUTO
di FranciaSOCIETA'
D'ORTICOLTURA
di ParigiSOC. DI GEOGRAFIA
di ParigiSOC. GEOLOGICA
di FranciaACCADEMIA
di Bruxelles

SCIENZE

FISICHE E MATEMATICHE

NOTIZIA STORICA

*dei lavori della Classe delle Scienze Fisiche e Matematiche
nel corso dell' anno 1844, scritta dall' Accademico Professore
GIUSEPPE GENÉ, Segretario Aggiunto di essa Classe.*



7 gennaio.

Il Capitano Prof. MENABREA legge una lettera del Prof. CHAMOUSSET di Ciamberì, il quale lo prega di annunziare all'Accademia essere stato scelto il giorno 12 d'agosto per la Riunione in Ciamberì della Società Geologica di Francia, e desiderarsi vivamente che i Geologi torinesi e d'Italia tutta abbiano ad onorarla della loro presenza. Entra poscia in alcuni particolari relativi alla temperatura di Ciamberì, allo scopo di dimostrare che il termometro, di cui Monsignor BILLIET si servì per ottenerne la temperatura media dall'anno 1822 al 1825, non dava temperature troppo forti, come par sospettarlo il P.^e FATON in una Memoria meteorologica da lui mandata all'Accademia.

Questa parte della lettera del Prof. CHAMOUSSET viene dal Presidente commessa all'esame della Giunta, che riferì sulla anzidetta Memoria del P.^e FATON.

Il Conte AVOCADRO legge la Memoria del Dott. ASCANIO SOBRERO *Sur la résine de l'olivier et sur l'olivile*, già stata favorevolmente giudicata da una Giunta nell'adunanza del 19 di novembre 1843.

Poscia l'Avv. COLLA legge una sua scrittura intitolata *Gessneriae zebrinae illustratio*.

Sarà stampata nel Volume seguente.

21 gennaio.

Il Conte AVOCADRO legge le osservazioni meteorologiche del P.^e FATON,

sulle quali una Giunta fece rapporto nell'adunanza del giorno 17 dicembre p. p. Esse sono approvate per la stampa nei Volumi accademici. Però, sulla proposizione di varii Membri, si stabilisce che nella Notizia storica, ove si farà cenno di queste osservazioni, abbiassi ad avvertire non essere sfuggita nè ai Commissari che le ebbero in esame, nè all'Accademia che ne ha votato la stampa, l'imperfezione degli stromenti usati dal P.^e FATON, imperfezione, che del resto è confessata dall'Autore medesimo.

Dopo ciò, lo stesso Conte AVOCADRO, deputato col Prof. BOTTO, legge il parere intorno al brano di lettera del Prof. CHAMOUSSET, che riguarda la temperatura media di Ciamberì. Esso è del tenore seguente :

« Le R^d Père FATON, dans le Mémoire sur les variations du baromètre, thermomètre, etc. qu'il a présenté dernièrement à l'Académie Royale des Sciences de Turin, paraît soupçonner que le thermomètre, dont Monseigneur BILLIET s'est servi pour observer la température moyenne de Chambéry pendant les 4 années 1822-1825, donnait des températures trop fortes. J'ai la certitude que ce thermomètre avait été vérifié, au moins quand à la position du zéro; si les résultats, obtenus par Monseigneur BILLIET, sont plus forts que ceux que le R^d P.^e FATON a obtenus lui-même, il faut l'attribuer principalement: 1.^o à ce que la température moyenne des 4 années 1822-1825, pendant lesquelles Monseigneur BILLIET faisait ses observations, paraît avoir été plus élevée, que la température moyenne d'un grand nombre d'années :

La température moyenne de ces 4 années a été à	
Paris de	11°, 3

Tandisque la moyenne d'un grand nombre d'années	
est à Paris de	10°, 8

Différence + 0°, 5 ;

2.^o à ce que la température des 3 années 1840-1842, pendant lesquelles le R^d P.^e FATON a observé le thermomètre, est inférieure à la température générale: ainsi à Genève la température de ces trois années a été de

La moyenne des 27 années 1826-1842 a été de ...	8°, 91
---	--------

Différence — 0°, 6 .

Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'en ajoutant cette différence $0^{\circ},6$ à la moyenne $10^{\circ},46$ obtenue par le R^d P^e FATON, la température $11^{\circ},06$ qui en résulte diffère très-peu de celle, à laquelle on arrive en retranchant l'excès $0^{\circ},5$ de la température $11^{\circ},67$ observée par Monseigneur BILLIET. On trouve dans ce cas $11^{\circ},17$.

La moyenne des 12 années 1822-1833, résultant des observations de Monseigneur BILLIET et de Monsieur RAYMOND, donne $10^{\circ},96$, nombre peu différent des précédens. Dans mon Mémoire sur l'élévation de Chambéry au-dessus de la mer, j'avais cru devoir ajouter $0^{\circ},26$ à ce nombre. Cette addition était motivée sur ce que la température moyenne des 12 années 1822-1833, s'est trouvée à Genève être inférieure de $0^{\circ},26$ à la moyenne des 44 années 1796-1839, telle qu'elle a été donnée par M. G. MAURICE (*Biblioth. universelle*, avril, 1837). Mais M. George PICOT, dans une Notice lue à la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève, le 20 octobre 1842, a cru devoir faire plusieurs corrections aux températures citées par M. MAURICE, et surtout diminuer de $0^{\circ},5$ toutes les températures observées avant 1822 à Genève. L'addition de $0^{\circ},26$ que j'avais faite à la moyenne des observations de Monseigneur BILLIET et de M. RAYMOND, reposant sur les données de M. G. MAURICE, que M. PICOT vient de trouver fautives, demeure sans motif: il en résulte que la température de Chambéry est très-voisine de $11^{\circ},0$, si l'on prend la moyenne des *maximum* et des *minimum* de chaque jour; et qu'elle est inférieure à $11^{\circ},0$ de 1 ou 2 dixièmes de degrés, si l'on prend la moyenne de toutes les heures du jour et de la nuit ».

11 febbraio.

Il Cav. Angelo SISMONDA, deputato coi Professori CANTU' e BOTTO, fa relazione intorno a una Memoria del sig. Celestino ROSSI, Ingegnere metallurgico, intitolata *Métallurgie pratique du fer. Des combustibles; emploi du bois en nature ou préparé, substitué à l'emploi du charbon ordinaire*. Questo lavoro, sul quale SUA MAESTA' ha desiderato il parere dell'Accademia, vien encomiato dai Commissarii, i quali sono d'avviso che, divulgato colle stampe, non potrà a meno di riuscire utilissimo a coloro che si occupano della metallurgia pratica del ferro.

Il Prof. BOTTO, a nome anche dei condeputati Cav. CARENA e Prof. CANTU', legge il parere intorno a una domanda di privilegio fatta al

Regio Governo dai signori fratelli DE FILIPPI, di Nizza marittima, abitanti in Milano, per la fabbricazione nei Regii Stati di candele di sevo perfezionate con un loro metodo particolare.

« I signori fratelli DE FILIPPI di Nizza a mare, scrivono i Commissarii, essendosi applicati non senza successo a perfezionare la fabbricazione delle candele di sevo, ricorrono al R.^o Governo rappresentando di avere, mercè i loro metodi, raggiunto lo scopo che proponevasi la Società d'incoraggiamento delle arti e de'mestieri di Milauo, quando nello scorso aprile stabiliva il premio d'una medaglia d'argento *a chi avesse formato lo stoppino delle usuali candele di sevo in maniera, che non vi fosse bisogno di smoccolarle*, e un premio d'una medaglia d'oro *al fabbricante che avesse messo in commercio almeno due mila chilogrammi di candele raffinate economiche, al prezzo di lire 2. 30 il chilogrammo*. Però chiedono, in considerazione di questi risultamenti e del vantaggio che sta per derivarne al pubblico, che loro si conceda l'esercizio esclusivo di questo nuovo ramo d'industria e lo smercio privilegiato nei Regii Stati delle candele dai medesimi perfezionate, delle quali presentano un saggio, congiuntamente alla descrizione dei loro metodi.

La Giunta incaricata di riferire intorno all'accennata dimanda, si fece anzi tutto a verificare ciò che contengano di assoluto le asserzioni dei postulanti, e a determinare nel tempo stesso fra gli elementi che costituiscono il pregio intrinseco di un luminaire qualunque, quelli che sono capaci di determinazione numerica. Siffatti elementi concernono propriamente il calcolo della così detta facoltà illuminante, ossia della relativa quantità di luce dispensata, la quale paragonata alla spesa costituisce per così dire l'effetto utile dell'apparecchio illuminante.

Fu presa pertanto e pesata una delle candele di sevo che i ricorrenti indicavano per le migliori fra quelle che presentarono. Se ne pesò similmente una di sevo della fabbrica nostrale dei fratelli LANZA; e finalmente una terza stearica della fabbrica anzidetta.

Accese simultaneamente le tre candele si sono lasciate ardere per quattr'ore in uno stesso ambiente e ad una stessa temperatura (11° R.), smoccolandosi tratto tratto la candela di sevo ordinaria e punto non toccandosi al lucignolo delle altre due. Fu visto che, come la stearica, anche la candela dei signori DE FILIPPI non andava essenzialmente soggetta a quella fuliginosa concrezione che diciam fungo, e di cui conviene nettare più o men sovente il lucignolo delle candele usuali: ciò

non ostante non è a dirsi, che lo struggersi progressivo dello stoppino succedesse quivi così pronto e regolare come nella candela stearica, e tale da non nuocere alla chiarezza della fiamma, e alla forza dell'illuminamento. Bensì appariva, che un reale e notevole miglioramento erasi ottenuto se si confrontavano fra di loro le due candele di sevo. Or tali differenze, colle altre attinenti alla diversa natura dei tre luminari, influir dovevano necessariamente, non che sull'assoluta, sulla relativa facoltà illuminante, come apparisce dalle seguenti esperienze comparative.

Disposti convenientemente una scrimaglia e dinanzi a questa un obice opaco parallelogrammico, furon determinate le distanze che nel noto processo Rumfordiano corrispoudono alla egualità dell'ombra. Per le due candele di sevo e specialmente per la candela soggetta a smoccolatura, l'anzidetta distanza corrisponder dovea alla media dell'intensità di luce dispensata, il che si ottenne approssimativamente. Si trovò, confrontando successivamente queste candele colla stearica, che le rispettive distanze dei tre lumi erano le seguenti:

1.° Candela DE FILIPPI	centimetri	150
2.° Candela di sevo ordinaria	»	120
3.° Candela stearica	»	181

Gli accennati confronti furon fatti nell'intervallo di tempo prefisso alle esperienze, e per cui durò lo sperimento. Trascorso questo, cioè dopo le quattr'ore per cui i tre luminari si tennero accesi, si trovò, che questi aveano sofferto un vario consumo, il quale fu rispettivamente di 718 grani per la candela stearica, di 741 per la candela DE FILIPPI, e finalmente di 618 grani per quella di sevo ordinario.

Or questi numeri moltiplicati pei relativi prezzi delle tre specie di candele fissati a ll. 1. 40 la libbra per quelle steariche, a o. 60 per quelle di sevo raffinato, e a o. 50 per quelle di sevo ordinario, danno i seguenti prodotti: 1005,20 per la candela stearica, 444,60 per la candela DE FILIPPI, e 309,00 per la candela di sevo ordinario, pei quali numeri bisogna dividere rispettivamente i quadrati delle soprariferite distanze, onde avere le facoltà illuminanti corrispondenti, riferite a un medesimo costo in danari: la quale operazione conduce ai seguenti numeri: 32,59 candela stearica; 49,93 candela DE FILIPPI; 46,60 candela di sevo ordinario: i quali numeri rappresentano il relativo pregio

dei tre luminari, non prendendo in considerazione che gli elementi onde furono dedotti. I Commissarii osservano, che il prezzo di o. 60 la libbra delle candele raffinate è quello a cui sarebbero queste messe in commercio dai signori DE FILIPPI, come, in assenza di essi, lo accertarono i loro Socii.

Vi avrebbe dunque una notevole e manifesta convenienza per i consumatori nell'uso di sì fatte candele confrontate colle candele usuali. Risulterebbe infatti dagli accennati valori numerici, che se il non facoltoso può trarre, a pari dispendio, dalle ordinarie candele di sevo a 24 soldi la libbra maggior copia di lume che dalle steariche a 24 soldi, una convenienza anche maggiore ritroverebbe nell'uso delle candele DE FILIPPI a 12 soldi, giacchè quivi alla maggior quantità relativa di luce va congiunto il vantaggio di una fiamma e di una luce più bella, non soggetta all'inconveniente del fungo al lucignolo.

Al ricco poi che cerca e paga volentieri, oltre una luce più regolare e perfetta, le altre prerogative di pulizia e di eleganza, che sono proprie della cera, potran sempre convenire le candele steariche comechè più costose.

Conchiudono pertanto i Commissarii, potersi con sicurezza di pubblica utilità concedere ai signori DE FILIPPI il privilegio per cui ritorsero al Regio Ministero, di fabbricare cioè candele raffinate di sevo non soggette a smoccolatura, secondo il metodo da essi comunicato.

Il Prof. GENÉ legge un suo lavoro intitolato *Ornithologiae Indicæ additamenta, sive Enumeratio avium Himalayæ quas, ab Eq. SOLEZOLIO acceptas, Zoophylacio Taurinensi concessit Rex CAROLUS ALBERTUS.*

Po scia il Prof. CANTU', per incarico avuto dal sig. BONJEAN Chimico a Ciamberì e Corrispondente dell'Accademia, espone, in via di semplice comunicazione, e astenendosi da ogni osservazione o commento, alcuni fatti riferiti dal sig. BONJEAN medesimo, dai quali risulterebbe che il kermes minerale, amministrato internamente, non vien assorbito dai nostri organi e passa in totalità nelle feci; 2.º che l'acido solforico, solo, può bastare alla carbonizzazione delle materie animali, nelle quali si cerca la presenza di un composto antimoniaie.

10 marzo.

Si legge una lettera del Marchese Vincenzo ANTINORI, il quale invia e raccomanda all'Accademia alcuni esemplari di una Circolare a stampa, con cui si invitano tutti gli Italiani cultori delle scienze fisiche a trasmettere i risultati delle loro osservazioni di fisica atmosferica e terrestre all'I. R. Museo di fisica e storia naturale di Firenze, il quale si farà quindi innanzi depositario di un Archivio meteorologico centrale italiano, siccome lo è di già, e dell'Archivio generale delle Riunioni scientifiche d'Italia, e dell'Erbario centrale, e della Raccolta geologica e mineralogica italiana, e li pubblicherà di tempo in tempo, citandone scrupolosamente la provenienza e le persone che gli avranno comunicati.

Il Segretario Aggiunto, per incarico avuto dal sig. Dottore Ascanio SOBRERO, legge, in via di semplice comunicazione e ad oggetto di prender data, una nota statagli rimessa dal sig. Dottore anzidetto, intitolata *Cenni sull'acido eugenico*. Essa è del tenore seguente:

« Nel lavoro sulla resina dell'olivo, e sull'olivilla che ebbi l'onore di presentare alla R. Accademia delle Scienze, ho tenuto discorso di un acido volatile che ottenni sottoponendo l'olivilla alla distillazione secca, e che chiamai acido pirollovico: nelle poche ricerche che ho avuto campo di fare su questo nuovo corpo, ho trovato che la sua composizione espressa in centesimi risulta di carbonio 70, 16 - 69, 82; idrogene 7, 31 - 7, 32; ossigene 22, 53 - 22, 86. Questa composizione affatto identica con quella che il sig. DUMAS trovò nell'acido eugenico, congiunta ad alcuni caratteri fisici di sapore, di odore, molto vicini a quelli del detto acido, mi avrebbe indotto a credere all'identità dei due corpi, se le analisi dell'acido eugenico fatte dai signori ETTLING e BOECKMANN non avessero resa incerta la sua composizione. Uno studio comparativo dei due acidi diveniva cosa indispensabile per sciogliere la quistione, ed egli è a questo lavoro che mi sono rivolto da qualche tempo, e di cui mi occupo di presente.

Mentre continuo siffatte ricerche, mi trovo in grado di partecipare alla R. Accademia alcuni dei risultati che ottenni, i quali benchè siano per avere col tempo maggiore estensione, paionmi tuttavia bastevolmente concludenti di per se, per togliere in parte di mezzo le incertezze, e fissare la composizione dell'acido eugenico.

I garofani (*Caryophilli aromatici*) contengono, come materiali im-

mediati naturalmente esistenti, 1.° la cariofillina, 2.° l'acido eugenico, 3.° un olio essenziale indifferente: questi materiali sono indipendenti l'uno dall'altro.

Distillando i garofani con acqua, si ottiene la parte volatile composta di acido eugenico e di olio indifferente: il residuo contiene cariofillina.

Trattando i garofani con alcool alla temperatura di 50° incirca, ed anche alla temperatura ordinaria, se ne estraggono i tre materiali ad un tempo; dopo la cristallizzazione della cariofillina, il liquido alcoolico contiene l'acido eugenico e l'olio indifferente.

Il metodo proposto dal sig. DUMAS per preparare l'acido eugenico, non conduce a risultati soddisfacenti: trattando i garofani con alcool, o si esporta tutta la cariofillina, e con essa si esportano pure l'acido eugenico e l'olio indifferente: o non si toglie tutta la cariofillina, ed allora sottomettendo il residuo alla distillazione con acqua, si ottiene un olio volatile composto di acido eugenico e di olio indifferente. Ho trovato questo prodotto composto, in cento, di carbonio 74,75 - 75,52; idrogeno 8,06 - 8,02; ossigeno 17,19 - 16,46. Questa composizione è assai lontana da quella data dal sig. DUMAS; vi trovai esistente l'olio indifferente.

Il miglior metodo per procurarsi l'acido eugenico puro, consiste, secondo le mie osservazioni, nel trattare l'essenza dei garofani con una soluzione concentrata di potassa caustica, sciogliere il sale ottenuto con acqua distillata, lavare questa soluzione con etere solforico, finchè questo non ne separa più traccia di sostanza oleosa; decomporre il sale potassico con acido solforico debole, lavar l'acido eugenico ottenuto con acqua distillata, scioglierlo in etere solforico, seccare questa soluzione con cloruro di calcio fuso, e distillarla in una corrente di acido carbonico secco.

L'acido così preparato, e purificato quindi per mezzo d'una seconda distillazione, è incolore, si combina senza residuo colla potassa; la soluzione del sale potassico trattata con etere non somministra più traccia di olio indifferente: la sua densità a +9° è quale la trovarono i signori ETTLING e BOECKMANN cioè 1,076. Il suo punto di ebullizione è a +248. ETTLING e BOECKMANN la trovarono a +243. La sua composizione espressa in centesimi è quale la trovarono i due Chimici tedeschi: ecco i numeri

che mi furono somministrati dall'acido eugenico, preparato secondo il metodo indicato, ed in tre operazioni differenti.

Carbonio	72,42	—	72,46	—	72,53 (*)
Idrogene	7,23	—	7,64	—	3,22
Ossigene	20,35	—	19,90	—	20,25
	—————		—————		—————
	100,00		100,00		100,00 .

Quest'acido si combina coll'ammoniaca tanto per via secca, che per via umida: esso assorbe rapidamente l'ammoniaca allo stato di gaz secco e forma un composto cristallino: si combina colla potassa, colla barite, colla calce, colla stronziana, coll'ossido di piombo, e forse con altre basi: colle tre prime somministra dei sali cristallini: gli eugenati sono composti assai instabili, il sale ammoniacale non si conserva che in un'atmosfera di ammoniaca secca, ed a bassa temperatura: lasciato all'aria, si decompone rapidamente perdendo tutta la base: lo stesso avviene per l'azione dell'acqua: nel vuoto questa decomposizione si fa più rapida. Il sale potassico si decompone per l'azione dell'acqua, e non ne rimane più che l'acido eugenico: simili decomposizioni più o meno pronte si osservano per gli altri composti salini. Ne risulta che è assai difficile ottenere gli eugenati puri quali si richiedono per determinare l'equivalente dell'acido eugenico, e la formola che ne esprime la composizione. Io mi occupo attualmente di queste ricerche, augurandomi di poterne comunicare tra poco i risultati alla R. Accademia delle Scienze ».

Il Cominendatore PLANA legge un suo lavoro intitolato *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices en contact, ou séparées par un intervalle quelconque.*

(*)

	BOECKMANN.		ETTLING.
Carbonio	72,696	—	72,633
Idrogene	7,344	—	7,437
Ossigene	19,870	—	19,920 .

Vedi LIEBIG, *Traité de Chimie organique*, T. II. p. 169.

Il Cav. Dott. BELLINGERI legge egli pure un suo lavoro intitolato *Del peso assoluto e relativo dei visceri dei pesci, con deduzioni fisico-patologiche.*

In questa adunanza il Dott. Luigi CITTADINI, Professore di Chirurgia e Presidente dell'Accademia d'Arezzo, è nominato Corrispondente dell'Accademia.

21 aprile.

Il Conte AVOCADRO, che presiede l'adunanza, fa alla Classe il tristissimo annunzio della morte del Socio Cav. Prof. Lorenzo MARTINI, avvenuta in questa città, per colpo apopletico, il giorno 3 del corrente mese. Come prova dell'affezione che lo stringeva all'Accademia, il Conte AVOCADRO rammenta il legato di Ll. 1000, ch'egli fece in favore di essa.

Si leggono: 1.° la Circolare, con la quale la Presidenza generale della VI.^a Riunione degli Scienziati italiani notificando che questa Riunione si terrà in Milano dal giorno 12 al 27 del prossimo venturo mese di settembre, invita i Dotti d'Italia e stranieri a onorarla di loro presenza; 2.° una lettera del Prof. SANTI-LINARI, il quale, in data del 14 marzo p. p., annunzia da Napoli che egli e il Prof. PALMIERI, immaginando una batteria magneto-elettro-tellurica, giunsero pei primi ad ottenere la scintilla d'induzione tellurica, piccola sì, ma lampante, decisa e visibilissima a chiunque.

Il Segretario Aggiunto, per incarico avuto dal Dott. Ascanio SOBRERO, legge in via di semplice comunicazione e allo scopo di prender data, la seguente nota *su i prodotti della decomposizione dell'etere nitroso sotto l'influenza del calore.*

« Les produits de la décomposition de l'éther nitreux sous l'influence d'une haute température et sans le concours de l'air, ont été étudiés par M. THIÉNARD. Voici ce qu'il en dit dans son Traité (1). « Les gr. et » demi d'éther nitreux ont donné 5,63 d'eau contenant un peu d'acide

(1) Traité de Chim. élément. Bruxelles, T. 2. p. 186.

» *cyanhydrique*, 0, 40 d'ammoniaque, 0, 80 d'huile, 0, 30 de charbon,
 » 0, 75 d'acide carbonique, 29, 90 de gaz formés de bioxyde d'azote,
 » d'azote, d'hydrogène carboné, et d'oxyde de carbone; la perte a été
 » de 3, 72 ». Ces résultats ont été obtenus en décomposant l'éther nitreux dans un tube de porcelaine chauffé au rouge.

En poursuivant mes recherches sur la production de l'acide cyanhydrique par la réaction de l'acide nitrique sur les corps riches en carbone et en hydrogène, j'ai été conduit à reprendre l'expérience de M. THÉNARD; car il me semblait que la proportion d'acide cyanhydrique produit devait être considérable, et représenter une grande partie, si non la totalité, de l'azote de l'acide nitreux. Je m'empresse d'annoncer à l'Académie que les résultats ont été conformes à ma prévision: 33 grammes d'éther nitreux m'ont fourni plusieurs grammes d'une liquide si riche en acide cyanhydrique, que, à la dose d'une goutte, il a suffi pour causer la mort à une poule. Il m'a fallu me tenir sur mes gardes pour ne pas être incommodé par l'odeur prussique qui exhalait de l'appareil, au moment où je l'ai démonté. Avec le produit de ces 33 grammes d'éther nitreux j'ai préparé sans difficulté du plus beau bleu de prusse qu'on puisse obtenir. Ces résultats, très-éloignés de ceux de M. THÉNARD, m'ont conduit à étudier de nouveau, et avec exactitude, les produits de la décomposition de l'éther nitreux par la chaleur, et je ferai connaître prochainement à l'Académie les résultats de ces recherches qui ne sont encore que commencées.

Me trouvant dans le laboratoire de l'arsenal, où j'ai travaillé jusqu'à ce jour, à même de suivre la préparation du fulminate de mercure, j'ai été surpris de la quantité considérable d'éther nitreux qui se produit pendant la réaction du nitrate acide de mercure et de l'alcool. Je crois qu'on pourrait l'utiliser pour la préparation des cyanures; déjà quelques essais m'ont donné des résultats qui me font espérer, que ce moyen d'utiliser l'éther nitreux, mettra les fabricants de fulminate de mercure en état de réaliser des bénéfices considérables; car cet éther représente une grande partie de l'alcool qu'ils emploient: je pense, que le procédé de laboratoire, qui consiste à conduire la vapeur d'éther dans un tube de porcelaine rempli de fragments de cette substance et chauffé au rouge, et à recevoir les produits dans une série de flacons remplis d'une lessive caustique, pourra devenir facilement un procédé commercial pour la préparation des cyanures ».

Il Cav. Prof. GIULIO, deputato coi Cavalieri MORIS e SISMONDA, fa relazione intorno a una *Statistica manoscritta ed inedita dell'isola di Thera (Santorino)*, inviata all'Accademia dall'autor suo, il Conte Dott. Giuseppe DE CIGALLA. I Commissarii conchiudono dicendo che proporrebbero all'Accademia di pubblicare questo lavoro ne' suoi Volumi, se l'estensione troppo grande di esso, e principalmente la forma tabulare, che l'Autore ha creduto di dovergli dare, non ne li sconsigliassero. Tuttavia, per non privare il pubblico del vantaggio di una pronta, sebbene sommaria cognizione di questa bell'opera, la Classe delibera che la Relazione dei Commissarii, nella quale trovansi compendiali i fatti più importanti dall'Autore riferiti, venga inserita testualmente in questa Notizia istorica.

Essa è del seguente tenore:

« La statistica particolare di una provincia raro è che possa eccitare un vivo movimento di curiosità, o sia perchè i fatti che la statistica prende a considerare essendo de' più consueti e volgari, non colpiscono per dir così le menti nostre, se non con la grandezza dellè masse loro: o sia perchè da' fatti poco numerosi che si ponno raccogliere in così ristretti confini, non isperiamo di poter ritrarre ferme conseguenze. Ma quando una particolare provincia presenti nello stato suo civile o politico, nel suo commercio, nella sua industria, nell'origine, nella storia, ne' costumi de' suoi abitanti un carattere particolare e tutto suo che da ogni altra la differenzii: o quando essa ci sia incognita o poco nota; o quando ancora formi da se come una unità ed un tutto piccolo sì ma ben distinto, come appunto avviene di un'isola: allora la statistica di una tale provincia acquista agli occhi dell'economista e del moralista una importanza ben altra che quella che a prima vista pareva doverle competere. - E tale ci sembra particolarmente che sia l'isola di Santorino.

Nata da una antica eruzione volcanica, e da altre e frequenti eruzioni, scossa, lacerata ed accresciuta: passata per tante vicende di guerre e di conquiste, di gloria e di umiliazione: risorta a' giorni nostri a nuova vita col rimanente della Grecia e chiamata forse un'altra volta con essa a gloriosi destini: fertile e popolosa a dispetto della sua aridità: fiorente, fra altre isole incolte e deserte: popolata da un genere d'uomini robusti, ingegnosi e costumati, l'isola di Santorino è ben

degnà in fatti di destare la nostra curiosità, e di fermare la nostra attenzione.

Nè la statistica Santorniotta poteva sperare un più diligente indagatore, od uno spositore più accurato del sig. Conte Dott. DE CIGALLA, già ben noto per altri pregiati lavori, il quale con tanto studio ha fatto larga messe di fatti, e di que' fatti appunto che spargon più luce sulle condizioni dell'isola e de' suoi abitatori. Se si aggiunga poi che il ch.^{mo} Autore vivuto molti anni in Italia, all'Italia volle scontare il debito della sua gratitudine offrendole questa sua opera stesa in lingua italiana, noi ci confidiamo che ci venga perdonata l'estensione che abbiám data alla presente relazione.

L'isola di Santorino emerse dal mare, secondo Plinio (1), nel 4.^o anno della 135^{ma} Olimpiade (2): ma Erodoto (3) ne fa menzione parlando di tempi assai più remoti. Il primo suo nome di *Calliste* (cioè la Bellissima) le si mutò poi in quello di *Thera* o *Thira* ch'ella prese, dicono, da un discendente di Cadmo, e serbò fino al XIII secolo di nostr' Era, che con nuovo cambiamento prese a chiamarsi, dal nome della Santa sua protettrice, *Sant'Irene*, e per corruzione *Santerini*, e *Santorino*. Noi non seguiremo l'Autore nella succinta narrazione ch'ei fa delle molteplici vicende di quest'isola, la quale, come tante altre di quelle che popolano le acque dell'Arcipelago, passata successivamente sotto il dominio de' Romani, de' Bizantini, de' Saraceni, de' Veneziani, e de' Turchi, si unì finalmente nel 1821 al novello regno Ellenico, e venne ascritta al *Nomo* o *Spartimento* delle *Cicladì*: nè parleremo tampoco delle medaglie, delle iscrizioni e di altri avanzi di antichità che l'A. ricorda o descrive. Troppo sovente scossa da' tremuoti prodotti dal vulcano sotto-marino, cui probabilmente essa dee la sua prima origine: ora accresciuta di nuove spiagge e di nuove isolette, ora in parte subbissata, non è meraviglia che l'isola di Thera, insiem col nome, abbia pure avuto a mutar sovente l'aspetto, e che la *Bellissima* di Erodoto,

NOMI ANTICHI.
— ORIGINE. —

STORIA.

ANTICHITÀ.

ASPETTO.

(1) Lib. 2. cap. 89.

(2) 236 anni P. di C.

(3) Lib. 4. cap. 145.

ci sia da più recenti viaggiatori (1) descritta come cinta da un'orrida corona di scogli.

POSIZIONE.

Sorge Santorino a sessanta miglia a tramontana da *Creta*, a quindici miglia a meriggio da *Nio*, a quaranta da *Nasso* (2). Ha forma di luna falcata con le corna ad occidente: undici miglia nella sua maggior lunghezza, e trentasei di perimetro. La sua superficie è di 11400 *stremata*, equivalenti ad altrettante giornate nostrali di terreno (3), ossia a 4335 ettare, e malgrado l'estrema sua aridità essa è quasi tutta ridotta a coltura, anche nelle parti più alpestri. — E ben possiamo chiamare estrema l'aridità di Santorino, poichè non vi ha in essa che tre fontane di acque potabili, non tutte perenni, e niuna molto copiosa, e cinque sorgenti di acque minerali (4). Nell' interna parte dell' isola havvi un pozzo solo assai profondo presso al borgo di Emporio, ed alcuni ve n'ha pure sul litorale occidentale, scavati, come quello, in terreno calcareo: ma quelli che in numero di quaranta circa si veggono sul litorale a settentrion-ponente, profondi appena da tre a quattro braccia, non danno che acque salmastre, cioè infette di solfato di magnesia e di altri sali. — È quindi generale l'uso delle cisterne sì pubbliche che private, e frequenti sono quelle costrutte a beneficio comune per largizioni particolari.

POZZI E FONTANE.

CISTERNE.

CONFIGURAZIONE
DEL SUOLO.

Piano e basso verso oriente, il suolo viene alzandosi verso occidente e rappresenta come un piano inclinato qua e là, tagliato e corrosivo dalle acque piovane. La più alta cima dell' isola (il monte S. Elia) s' innalza a 600 metri sopra il livello del mare; le sponde occidentali dappertutto assai ripide, in alcuni luoghi tagliate a picco, hanno fino a 230 metri di altezza. — L'ampio golfo di Santorino, il quale sulle carte geografiche ci si rappresenta come un magnifico porto naturale,

PORTI.

(1) Tournefort, Voyage du Levant. Lett. 6. Tom. I. pag. 311. — Ciò dee intendersi della costa occidentale dell' isola: poichè verso levante la spiaggia è bassa, e l'aspetto dell' isola assai ridente.

(2) Long. 23°. 34' all' E. di Parigi, Lat. 36°. 36' N.

(3) Secondo l'A. queste 11400 *stremata* equivalgono in numero tondo a 36 mila misure quadrate veneziane. — Ora la misura quadrata essendo di 400 passi quadrati, e questo di are 0,030171 se ne conchiude per lo *stroma* il valore di are 38,1107; la giornata di Piemonte è di are 38,0006.

(4) L'A. descrive queste sorgenti e riferisce le analisi fatte dal sig. Dott. LANDERER delle acque di alcune di esse. — Egli ha pure pubblicata una Tavola *Analitico-Sinottica delle Crittopege della Grecia*

tra per questa disposizion delle sponde, per la profondità delle sue acque (che arriva a 500 metri) e per le *secche* (1) che vi sono, riesce pericoloso alle navi maggiori, e i piccoli navigli soli vi si ricettano in otto luoghi di sbarco detti *ormi*, nelle isolette di *Palea-Cammeni*, di *Neo-Cammeni* e di *Micrà Cammeni* (la *vecchia*, la *nuova*, e la *piccola bruciata*), ed in tre altri *ormi* sulla costa propria di Santorino. Tutti insieme questi *ormi*, più o meno battuti da' venti, non ponno ricoverare più di 70 navi. Vero è che lungo la spiaggia di settentrion-levante, e d'ostro-levante, le acque poco alte e la natura del fondo danno facile ancoraggio: ma le navi non vi sono per niun modo difese da' venti. Ognun vede quali rie conseguenze debba avere pel commercio dell'isola questa mancanza di porti comodi e sicuri.

Contrasta singolarmente con l'aridità del suolo di Thera, l'umidità dell'aria: frequenti infatti vi sono le nebbie, principalmente di notte, e quando spira il vento meridionale, ed abbondanti le piogge che sommano nell'anno a 27 pollici e 9 linee (0^m, 751), tuttochè i giorni piovosi non eccedano i 35: ogni giorno di pioggia dà dunque a Santorino sei volte più acqua che a Parigi (2). Questa così grande umidità, quanto è vantaggiosa all'agricoltura, altrettanto riesce nociva alla salute de' corpi umani, come si vedrà quando riferiremo i fatti relativi alla statistica medica.

La temperatura di Santorino varia tra lo zero ed i 28° R.: raro è però che scenda al di sotto di 6°: la temperatura media si può dunque assumere di 14° R., ossia di 18° C., che è qual si conviene a quella latitudine.

I venti più frequenti soffiano da tramontana, e nella state questi sono men freddi che i meridionali, perchè i primi giugnon sull'isola radendo la superficie tiepida del mare, i secondi dopo di aver lambite le cime nevose de' monti di Creta.

Aggiungiamo per compiere questo rapido abbozzo della meteorologia

CONDIZIONE
METEOROLOGICA
- UMITÀ -

TEMPERATURA.

VENTI.

METEORE.

(1) Un'altra secca non notata sulle carte marine esiste ad ostro-ponente di Terasia a profondità variabile da 2 a 9 metri.

(2) Infatti i giorni piovosi e nevosi sono a Parigi da 150 all'anno, e la quantità annua delle piogge o neve è di 500 millim. circa (Ann. du Bureau des Long. 1824). Ciascun giorno piovoso dà dunque 3,33 mm. di acqua a Parigi, e 21,46 mm. a Santorino.

di Santorino che la gragnuola vi cade assai rara, e che sono all'incontro frequenti le trombe di mare a meriggio dell'isola.

TOPOGRAFIA.

Capo-luogo dell'isola è la città o borgo di *Firà*, situato in fondo del golfo, a 205 metri sopra il livello del mare, con 1300 abitanti. Qui risiedono il Governatore, il Vescovo cattolico, e le altre Autorità dell'isola, nonchè i Vice-Consoli delle Nazioni straniere. L'isola è divisa in due comuni co' nomi di *Thera* e di *Calliste*. Il primo, oltre a *Firà*, comprende i borghi o villaggi di *Firostefani*, *Condocori*, *Merevuli*, *Iurvulo*, *Finikià*, *Epanomeria*, e *Carterado*. Fanno parte del comune di *Calliste* i borghi di *Emporio*, *Megalocorio*, *Acrotiri*, *Gonia*, *Votona*, *Messaria* e *Pirgo*. Oltre di questi quindici luoghi attualmente abitati si veggono ancora a ponente di *Merevuli* le rovine di *Castel di Scauro*, capo-luogo che fu di tutta l'isola, e sulla cima del *Monte di Santo-Stefano* gli avanzi di una antica città, creduta da alcuni *Oea*, da altri, e particolarmente dal signor *RAOUL-ROCHETTE* e dal nostro Autore, *Thera*.

STRADE.

Non vi ha nell'isola altre strade che per bestie da soma, tranne un breve tratto (975^m) di via carreggiabile, con pendenze che vanno fino al 20 per centinaio, recentemente aperta tra *Firà* ed il suo ormo, con ispesa di 33 mila dramme (1), (29568 lire italiane).

POPOLAZIONE.

Nel 1700, quando *TOURNEFORT* approdò a Santorino, la popolazione vi si computava di 10 mila anime (2). Secondo il censimento del 1841 essa è ora di 13072 distribuita in 3134 famiglie: ciascuna famiglia è dunque in media di 4,18 persone: questo valor medio è un po' maggiore da noi, cioè 4,86 (3). Questa popolazione si distribuisce per *origine* nel modo seguente:

Santornioti	12967
Elleni	8
Stranieri	97

Totale 13072.

(1) Assumo per valor della dramma lire 0,896, che è quello che si deduce dalle Tavole dell'*Ann. du Bureau des Longitudes*.

(2) *Voyage du Levant*. T. 1. pag. 321.

(3) Informazioni statistiche pubbl. dalla Comm. sup. Tom. 1. pag. 53. Torino, 1839.

La distribuzione della popolazione per culti è questa :

Cristiani della Chiesa greca	12480
Id. della Chiesa latina	583
Totale	13063.

Questi cinquecento ottantatre Cattolici sono tutti stabiliti nel comune di Thera.

Se la popolazione si vorrà considerare rispetto alla età si avrà il quadro che segue :

Sotto de' 18 anni	5981
Tra 18 e 65 anni	6986
Oltre a' 65 anni	195
Totale	13162.

Finalmente, rispetto al domicilio fisso o no, la popolazione si può dividere così

Popolazione sedentaria	11671
Popolaz. mobile, cioè negozianti e marinai .	1401

Totale 13072. (1)

Confrontando il numero degli abitanti di Santorino con la superficie dell' isola, si trova che la popolazione relativa è quivi di 301 abitanti per chilometro quadrato, ossia di 1031 per miglio quadrato: risultato, che, quando fosse ben certo, sarebbe maraviglioso, se si considera che

(1) Le differenze che si scorgono tra queste diverse somme totali provengono forse da qualche errore di scrittura nel manoscritto. È degno di osservazione che a' tempi di Tournefort (ved. loco citato) i Cattolici erano molto più numerosi di quello che qui appaiono, poichè formavano la terza parte della popolazione dell' isola. Veggasi anche qui sotto la nota (1) a pag. LXVI.

in questi R. Stati, per esempio, la popolazione relativa media non è che di 80 per chil. quadrato: e nella riviera stessa di Genova non eccede i 282, nello Stato di Lucca i 135, nel Belgio i 132, che son pure i paesi più popolosi d'Europa.

MOVIMENTO
DELLA
POPOLAZIONE

Ecco ora quale è stato dal 1836 al 1841 inclusive (6 anni) il movimento della popolazione:

	Maschi		Femmine		Totale
Nascite (1)	1554	—	1407	—	2961.
Morti	1061	—	1143	—	2204.
Matrimoni	»	—	»	—	573.

Da questa Tavola possiam dedurre le conseguenze seguenti, cioè:

1.° In Santorino, come in tutti i paesi d'Europa, le nascite maschili eccedono le femminili: la ragione apparirebbe qui di 11 al 10, mentre in Francia essa è di 16 al 15, e presso di noi di 20 al 19 (2). Ma sarebbe temerario il voler statuire nulla di fermo con un sì piccolo numero di osservazioni: infatti da un anno all'altro son sì grandi gli svari, che nel 1838 troviamo più femmine che maschi nella ragione di 34:33, e nel 1841 più maschi che femmine nella ragione esorbitante di 6:5.

2.° La somma delle nascite ne' sei anni supera di 757 quella delle morti: non se ne dee però concludere un eguale incremento nella popolazione, poichè il fatto dee certamente attribuirsi in buona parte alle morti di Santoriniotti avvenute fuori di patria: e veramente si vede da una delle sopra riferite tabelle che un nono della popolazione non ha domicilio fisso nell'isola.

3.° Le nascite annue stanno alla popolazione come 1:26,49; è dunque l'età media delle morti di 26 anni e mezzo a un dipresso.

4.° Le morti annue stanno alla popolazione come 1:35,59; la durata della vita media dee dunque essere poco minore di 35 anni e mezzo, press'a poco come da noi.

5.° Il numero delle morti femminili eccede quello delle morti maschili nella ragione di 14:13. Ma questo eccesso apparente, opposto a

(1) Esclusi i nati-morti.

(2) V. Informazioni statistiche, ecc 1843, Tom. 2° pag. 651.

quello che si osserva nelle nascite può provenire in parte da ciò, che le donne appartenendo tutte alla popolazione sedentaria, le loro morti tutte avvengono nell'isola, e tutte son comprese ne' registri necrologici.

6.° Il numero annuo de' matrimoni è il 137^{mo} della popolazione: questa ragione è poco differente da noi, cioè di un 134^{mo} circa.

7.° Il numero delle nascite per ciascun matrimonio essendo 5, 17, è notabilmente maggiore di quello che si osserva in questi Stati, dove non oltrepassa (termine medio) 4, 65. Tuttavia la maggior mortalità infantile che regna in Santorino, fa che il numero delle persone che compongono ciascuna famiglia sia maggiore da noi che in quell'isola (V. sopra).

L'età delle morti in Santorino è stata osservata solamente ne' tre anni 1839-40-41. Ecco il sunto di queste osservazioni.

ETÀ				MORTI		
				Maschi	Femmine	Totale
Da	0	a	10 anni	— 362	— 280	— 642
»	10	a	20 »	— 20	— 46	— 66
»	20	a	30 »	— 14	— 29	— 43
»	30	a	40 »	— 11	— 30	— 41
»	40	a	50 »	— 15	— 20	— 35
»	50	a	60 »	— 21	— 30	— 51
»	60	a	70 »	— 22	— 44	— 66
»	70	a	84 »	— 29	— 45	— 74
Oltre ad	84		»	— 8	— 28	— 36
Somme				— 502	— 552	— 1054.

Per non istancare la pazienza dell'Accademia ci limiteremo ad osservare qui, che secondo questa Tavola l'età della metà delle morti è di men di 10 anni per le femmine, ed assai più immatura ancora pei maschi: mentre da noi questa età è di 10 anni e due mesi pe' maschi, e di 19 anni e 8 mesi per le femmine.

Il numero de' nati-morti ne' sei anni 1836-41 è stato di 121, cioè un po' meno di un ventiquattresimo de' nati in vita, ed un po' meno di un 25^{mo} del totale delle nascite: ciò si accorda assai bene con le osservazioni fatte in altri luoghi d'Europa (1).

Le nascite illegittime non furono che 28 in sei anni, cioè meno che un centesimo del numero totale delle nascite: esse formano tra noi il 48^{mo}, in Francia il 14^{mo} delle nascite, e questa osservazione conferma in modo irrefragabile la testimonianza che rende l'Autore della costumatezza de' suoi compaesani.

TEMPERAMENTO
E INDOLE
DEGLI ABITANTI

I Santornioti, e specialmente gli abitanti de' piccoli villaggi sono di costituzione robusta, alti della persona, polputi (specialmente le donne), di carni brune, di capelli castagni, di spirito vivace: ma d'indole dolci, sobrii, verecondi, amanti del lavoro, ospitali, religiosi, teneri della famiglia e della patria, e nello spendere gretti piuttostochè economi. Hanno le abitazioni scavate nella pozzolana o costrutte di questo materiale, generalmente umidicce, mal ventilate, chiuse a' raggi del sole. Gli uomini vestono alla Greca, le donne, salvo poche vecchie, alla moda Franca: quelli e queste assai sudici della persona, e le donne più che gli uomini. Si pascono il più di pesce salato e di erbaggi, di biscotto d'orzo, e d'una loro polenta di cicerchia. Le carni consumate nell'anno non debbono eccedere in tutta l'isola le 225000 libbre (2), ed ancora queste carni, per testimonianza di TOURNEFORT, non vi si consuman fresche, ma sì, per la massima parte, salate e seccate al sole.

MALATTIE

Le malattie predominanti sono quelle appunto che deggion risultare

(1) V. Journal de l'École Politech. Tom. XVI. pag. 263 e seg.

(2) Dalla Tavola dell'A. si può conchiudere press'a poco come segue il numero e il peso degli animali macellati nell'isola nell'anno 1841:

	Numero		Peso
Buoi	170	} libbre	96000
Vitelli	208		
Montoni e capre	839		
Maiali	600	"	120000
Capretti	500	"	7500
Somma		"	223500

dall'azione di un clima caldo, umido, variabile sopra corpi robusti sì, ma sucidi, male alloggiati, mal nodriti: più frequente e più micidiale di tutte è la diarrea estiva de' fanciulli minori di 5 anni, la quale principalmente infierisce dai nove ai dodici mesi di età (1). Frequenti pure sono le clorosi, le leucorree, le gastralgie, le pterigi degli occhi, le odontalgie, e quasi generale la carie de' denti anche ne' bambini di prima dentizione: nè vi ha donna quasi che non n'abbia la bocca diserta. Dominano nell'estate le febbri gastriche, ma raramente con carattere intermittente come nell'altre isole dell'Arcipelago: nell'autunno le pleuresie ed altre malattie infiammatorie: regna anche sovente nell'isola il croup: e per conchiudere una volta questo doloroso catalogo di infermità, non son rare le malattie della cute, nè ignota la *lebbra*: anzi torna qui in acconcio il dire che havvi presso a Firà una *lebbroseria* in cui sono ricoverati nove *lebbrosi*, e che sette od otto altri se ne contano nell'isola.

L'uso dell'innesto vaccino, portato a Santorino nel 1809, lentamente vi si diffuse fino al 1817, e non divenne generale se non dopo lo stabilimento del Governo Reale. Furono *vaccinate*, nel 1841, 880 persone, fra le quali 111 per la seconda volta. È quindi a sperare che andranno facendosi ogni anno più rare, o cesseranno del tutto quelle invasioni di vaiuolo che sono state pur troppo frequenti finora: così nel 1841 da mila persone ne furono assalite, e ne morirono 70. Per ordine del Governo è stata pubblicata, e distribuita gratuitamente al popolo una istruzione sul vaiuolo e sul vaccino, compilata dall'A. benemerito della statistica da cui veniamo traendo queste notizie.

Già abbiám detto, che la popolazione di Santorino è divisa tra i due culti Cattolico, e Greco. Aggiungeremo ora che le due comunioni vivono in perfetta pace ed armonia tra loro: che ciascuna di esse è retta da un Vescovo: che vi ha nell'isola 58 sacerdoti Greci, e ventitre Cattolici: che il numero delle Chiese è quale appare dal seguente specchio:

VACCINO.

CULTI.

(1) Il chiariss. A. ha pubblicata una Menografia di questa malattia.

Chiese		Greche		Latino		Totale
Parrocchiali	—	69	—	2	—	71
Conventuali	—	40	—	2	—	42
Semplici	—	165	—	12	—	177
Somme	—	274	—	16	—	290 .

Da questi numeri si conclude che i Greci hanno in Santorino una Chiesa per 455 abitanti, ed un Sacerdote per 215 abitanti: mentre i Cattolici hanno una Chiesa per 36 abitanti ed un Sacerdote per 25 abitanti (1). Le principali case ed istituzioni religiose dell' isola sono:

Pe' Greci ,

Un convento dell'ordine di San Basilio con 24 Monache, a Merevuli,

Un convento con 15 Monaci sul Monte di S. Elia ;

E pe' Cattolici ,

Una casa di Lazzaristi francesi, in Firà ,

Una casa di Suore della Carità, ivi ,

Un convento con 15 Domenicane, ivi ,

Un capitolo di 7 Canonici, ivi.

Vi sono nell' isola 17 scuole con diciannove maestri o maestre , e 799 scolari, cioè 584 maschi e 215 femmine: ciò che dà in media una scuola per 768 abitanti, 47 scolari per ciascuna scuola, ed uno scolaro o scolara per 16 abitanti: ecco il quadro di queste scuole :

A Firà	{	Una scuola centrale di lingua latina con tre maestri e 35 scolari;
		Una scuola di lingue latina e francese diretta dai Padri Lazzaristi;
		Una scuola di lingua francese per le fanciulle diretta dalle Suore della carità;

Tre scuole di lettere greche in Firostefani , Vurvulo ed Acrotiri;

Una scuola di lettere e filosofia greca in Pirgo;

Dieci scuole elementari di mutuo insegnamento.

(1) Questo numero così grande di Sacerdoti Cattolici rispetto alla popolazione dello stesso culto potrebbe far sospettare che vi sia errore nel novero di questa popolazione. — V. sopra la nota (1) alla pag. Lxi.

Non vi ha in Santorino pubbliche biblioteche, nè raccolte scientifiche: bensì presso a private persone, due musei archeologici ed alcune librerie, fra le quali son degue di particolar menzione quelle de' PP. Lazzaristi, e del chiar.^{mo} nostro Autore. Finalmente per dare una più compiuta idea dello stato della pubblica istruzione aggiungeremo ancora che vi ha in Santorino un avvocato, tre medici o chirurghi, sette flebotomi, diciannove levatrici, uno speziale, e quattro pittori: e che dieci giovani Santornioti stanno ora compiendo i loro studii fuori di patria, cioè tre in Atene, e sette nelle Università di Parigi e di Pisa.

Manifatture grandi non vi sono in Santorino: gli abitanti si limitano all'esercizio de' mestieri più indispensabili: i più numerosi, dopo i marinai e gli agricoltori, sono i mulattieri, i mugnai (1), i facchini, e i rivenduglioli: i più industriosi, al dir dell'Autore, sono i muratori: cinque fornaci che sono nell'isola producono annualmente da 30 migliaia di kilò (2) di calcina (10 mila ettolitri circa), i quali però non bastano ai bisogni. Le donne tessono buone tele bambagine e frenelle di lana e di cotone, e fanno calzette e berrette all'ago.

INDUSTRIA.

Già abbiain detto, che la superficie di Santorino equivalente a 4335 ettare è quasi tutta coltivata: essa è divisa in un numero assai grande di poderetti, posseduti da 1103 proprietari, de' quali 162 solamente pagano 100 o più dramme (90 lire o più) di imposta: e poichè il numero delle famiglie è in tutto 3124, ne segue che i due terzi della popolazione non posseggono. La terra è coltivata da 1190 agricoltori, con molta cura, quantunque con metodi rozzi ancora, e con istrumenti pochi ed imperfetti, e forza è concludere che il lavoro ostinato e la diligenza degli agricoltori suppliscono alla imperfezione de' mezzi, poichè con sì scarso territorio la numerosa popolazione di Santorino trova ne' frutti del suolo quasi tutti i mezzi di scambio con cui può procurarsi le derrate necessarie al suo sostentamento. Il prezzo della giornata di lavoro è di una dramma (90 centesimi circa) per gli uomini, e varia da 30 a 70 leptà (da 27 a 60 centesimi) per le donne e fanciulli: i giorni di lavoro nell'anno non sono più di 250.

AGRICOLTURA.

(1) Vi sono 78 mulini a vento: ad acqua nissuno.

(2) Il chilò, secondo le tavole del sig. Guérin di Thionville, inserite nella Geografia del Balbi, equivale a litri 33,158.

Le colture principalissime sono, quella della vite, di cui si conoscono più di cinquanta varietà, e quella dell'orzo, che dà, termine medio, il sette per uno. Nella Tavola seguente sono registrati, e ridotti a misure nostrali (1), i prodotti principali di Santorino in quantità ed in valore.

PRODOTTI	QUANTITÀ IN MISURA				VALORE
	di Santorino		metrica		in lire italiane
Orzo	24500	kilò	8124	ettolitri	61465
Cicerchia	1840	»	610	»	9232
Fagiolini	750	»	249	»	4032
Vino bruseo	53640	barili	43867	»	355655
Vino sauto	2350	»	1922	»	63168
Uva passa	11750	sporte	»	»	68432
Fichi	950	kilò	315	»	4256
Cotone	4050	once	5196	chilogr.	3629
Sesamo	250	»	321	»	224

Totale lire italiane 570093.

In questa somma i prodotti della vite entrano per 487255 lire, cioè per 85 $\frac{1}{2}$ nel centinaio; è quindi ben naturale, che il prezzo delle vigne sia più alto assai che quello de' campi; questo prezzo varia, secondo la qualità delle vigne tra 300 e 500 dramme per misura quadrata di terreno, ossia tra 2200 e 3700 lire per ettara, od ancora tra 850 e 1450 lire per giornata piemontese.

Gli animali impiegati nel lavoro dell'agricoltura, od allevati per macello, si veggono nella Tavola seguente, che non contiene però i

ANIMALI
DOMESTICI

1. Per queste riduzioni ho assunto con *M' Culloch* (a Dictionary of Commerce etc. art. *Ionian Islands*), che il *barile veneto* equivalga a 18 gallons inglesi, cioè a litri 81,78, e l'oca a $\frac{27}{10}$ di libbra inglese *avoir-du-poids*, cioè a chilogr. 1,283; per la *dramma* e pel *kilò* veggansi le note precedenti.

buoi, il cui numero è ignoto, ma, al dir dell'Autore, assai piccolo :

Cavalli	N.° 12
Muli	» 482
Asini	» 787
Pecore	» 607
Capre	» 827
Maiali	» 697 .

I tributi diretti che gravano l'agricoltura dell'isola, e si versano nel tesoro nazionale si scorgono nel seguente quadro, che abbraccia i tre anni 1839, 1840 e 1841 :

TRIBUTI.

	1839	1840	1841	Media
Tributo prediale . . .	60775 ^{dr.}	66911 ^{dr.}	50400 ^{dr.}	59362 ^{dr.} - 53188 ^{lir.}
» sul bestiami	1250	1783	1790	1607,6 - 1440
» sulle api . . .	30	20	20	23,3 - 21
Somme	62055	68714	52210	60992,9 - 54649.

Confrontando la somma de' tributi pel 1841, col valore de' prodotti del suolo nello stesso anno troveremo che la prima somma equivale a due ventunesimi, o ad un po' meno del decimo della seconda. Oltre a questi tributi nazionali, ciaschedun comune riscuote il due per centinaio sui prodotti del suolo, ed una somma determinata per lo stipendio delle guardie campestri. Finalmente, per non dover ritornar più sopra questo argomento de' tributi diretti, inserirem qui il seguente quadro, che dà i valori medii di tre anni 1839-40-41:

Imposta sulle professioni o diritto di patente	2876 ^{dr.}	—	lire 2576. 89
Imposta sugli edifizii novellamente costrutti	1006	—	901. 38
Somme	3882	—	3478. 27.

COMMERCIO.

Il commercio di Santorino mette in giro annualmente un capitale di un milione e mezzo circa di dramme, ossia di un milione trecento e cinquanta mila lire italiane, ed impiegò nel 1841 settantasei navi, del porto in tutto di 9612 tonnellate: i negozianti dell'isola sono 87, i marinai 1324. Questo commercio si fa principalmente con Odessa e Taganrog per l'esportazione del vino e l'importazione de' grani, con Sirà, con Costantinopoli, e con altri scali dell'impero ottomano per l'importazione delle altre merci e manifatture.

ESPORTAZIONE.

Solo prodotto esportato da Santorino può dirsi che sia il vino: la quantità esportata montava nel 1841 a 73120 barili (59797 ettolitri), ma non eccede, termine medio, i 45000 o 50000 barili all'anno (da 36 a 40 mila ettolitri), tale essendo il consumo che se ne fa in Russia.

IMPORTAZIONE.

L'importazione abbraccia una moltitudine di grasce e di lavorii, e quasi può dirsi tutto ciò ch'è necessario alla vita, e fin le legne che mancano nell'isola, e vi si portano da Raclia: l'Autore ne dà un compiuto catalogo in 187 articoli, dal quale estrarremo le poche cifre seguenti, tutte relative a commestibili importati nel 1841. Esse bastano a mostrare quanto sieno lontani i prodotti dell'agricoltura, della caccia e della pesca al sostentamento diretto della popolazione, la cui sussistenza dipende così in grandissima parte dalla felicità della vendemmia, che sola le somministra la materia degli scambi. Nella seguente Tavola di importazioni abbiamo ridotti i pesi e le misure al sistema metrico decimale.

	Misure locali			Misure decimali	
	—			—	
Grano e farina	45560	kilò	—	16570	ettolitri
Orzo	9055	»	—	3293	»
Paste	11551	ocche	—	1478	miriagrammi
Biscotto	2927	»	—	375	»
Riso	12534	»	—	1604	»
Miglio	5496	»	—	703	»
Fave	28077	»	—	3593	»
Piselli, ceci e lenticchie . .	10499	»	—	1344	»
Castagne	2990	»	—	382	»
Nocciuole	1678	»	—	215	»

	Misure locali		Misure decimali
	—		—
Mandorle	3898	ocche —	499 miriagrammi
Olive	5419	» —	693 »
Olio di olive	3153	» —	403 »
Cacio	3331	» —	426 »
Butirro	4899	» —	627 »
Carne salata	3706	» —	474 »
Pesci salati varii	16371	» —	2095 »
Caviale rosso e scuro	12642	» —	1618 »
Baccalà	125 ½ quintali	—	708 »
Arringhe, e ziri	864800	in numero.	
Ecc. ecc. ecc.			

Tutte le importazioni, dal grano in fuori per cui vi ha una tariffa particolare, sono soggette ad un dazio del 10 per centinaio: le esportazioni pagano il 6 per centinaio, ma i lavorii nazionali escon franchi. I commestibili importati pagano ancora un dazio comunale del 2 per centinaio.

DAZI.

Gli uffizii amministrativi e giudiziali dell'isola sono i seguenti:

AMMINISTRAZIONE.

- 1.° L'Uffizio del Governo, che noi diremmo dell'Intendenza;
- 2.° L'Uffizio di sanità;
- 3.° L'Ispezione del lazzeretto;
- 4.° L'Ispezione delle poste;
- 5.° La Direzione delle dogane;
- 6.° La Direzione del porto;
- 7.° La Cassa provinciale;
- 8.° Le Amministrazioni municipali de' due Comuni;
- 9.° Due Tribunali, o Giudicature di pace, i cui Giudici e Assessori fanno eziandio uffizio di Notai;
- 10.° La Conservatoria delle ipoteche, annessa all'Uffizio di Giudice di Thera.

Il numero totale de' pubblici impiegati è di novantasei, cioè 36 impiegati del Governo, e 60 impiegati comunali. Noi non entreremo sul personale di queste varie amministrazioni ed uffizii in più minute par-

tico larità, che sarebbero qui fuor di luogo, e verremo estraendo da questa parte del lavoro, di cui rendiam conto, alcuni risultati più atti a dare un chiaro concetto dello stato morale, sociale, e commerciale della popolazione Santorniotta. Tutti li numeri che verremo citando, si riferiscono all'anno 1841.

Si spedirono nell'anno 142 passaporti, e 225 licenze di portar armi. Appodarono nell'isola 1110 navi, capaci in tutto di 39567 tonnellate; di queste navi, 200 sole provegnenti dall'estero, cioè 45 in libera pratica e 155 in contumacia. Salparono dall'isola 1139 navi con 30060 tonnellate, cioè 996 navi per porti esteri, e 143 per varii porti del Regno, e rispetto allo stato sanitario 1056 navi salparono con libera pratica, ed 83 in contumacia. Fecero la loro quarantena nelle navi 56 viaggiatori, e nel lazzaretto 841. Partirono da Santorino 1712 lettere, cioè 123 lettere di particolari, e 1589 lettere d'ufficio. I diritti d'importazione, di esportazione, di trasbordo, d'ancoraggio, di sanità ed altri riscossi dalla Direzione delle dogane sommarono ad 87051^{dr} 04. L'entrata e l'uscita della cassa provinciale fu come segue:

ENTRATA.

Tributi, tasse, gabelle, ecc.	dr. 144426. 48
Carta bollata	» 8300. 75
Multe	» 40. »
Doppie decime pagate da' conventi ...	» 1750. »
Somma	» 154517. 23.

USCITA.

Spese fatte nell'isola.

Salarii diversi	dr. 26955. 85
Riduzioni di dritto sulla carta bollata ..	» 2874. 7
Pensioni	» 3012. »
Spese d'amministrazione della cassa ...	» 1531. 24
Somma	» 34373. 16.

Le entrate presunte de' due comuni di Thera e di Calliste per l'anno 1842, secondo il *Proipologismo*, o Specchio presuntivo compilato

nel 1841 sommavano a dr. 36134. 94: e le spese presunte a dramme 46644. 80.

Furono decise nelle due giudicature 125 cause, come si vede nello specchio seguente:

Cause civili

Terminate per conciliazione	9	} Somma ... 85
» per sentenza definitiva	8	
» per sentenza <i>appellabile</i>	68	

(Di queste 68 cause *appellabili* furono effettivamente *appellate* 14 sole).

Cause criminali

Terminate con assoluzione	18	} Somma ... 40
» con condanna pecuniaria	12	
» con condanna personale	10	

Totale 125.

Finalmente gli Uffiziali de' medesimi tribunali, nella loro qualità di Notai, ricevettero nel 1841 gli atti seguenti, cioè

Inquisizioni criminali	20
Testamenti	22
Contratti matrimoniali	52
Contratti diversi	576
Iscrizioni ipotecarie	112

Totale 782.

E qui ci fermiamo, ben persuasi di aver dimostrato abbastanza quanto dicevamo cominciando, della importanza del lavoro del sig. Cav. Dott. De CIGALLA, del buon giudizio da lui manifestato nella scelta de' fatti,

e della cura e diligenza impiegate da lui nel raccorli e nell'ordinarli. In questi estratti, ci siamo attenuti alla esposizione di que' soli fatti, che sono suscettivi di esser ridotti ad espressione numerica, ed a quelli principalmente che col frequente ripetersi danno luogo a numeri grandi abbastanza, perchè non abbiano sopra di essi notabile influenza gli errori di osservazione, e le accidentali variazioni nella legge della loro produzione. E quindi molte cose e molto interessanti abbian dovuto ommettere intorno alla storia politica e naturale, alle leggi, ai costumi, alle antichità di Santorino, le quali se per una parte avrebber rallegrata di bella varietà questa scrittura, per altra parte si debbono tenere per istraniere alla statistica propriamente detta. Noi non dubitiamo che l'Accademia non sia per far voti con noi, acciocchè il ch.^{mo} A. si trovi in grado di estendere ad altre parti della Grecia queste sue ricerche, di unirle, di coordinarle in modo che ne risulti una buona e compiuta statistica di una contrada, chiamata dalla Provvidenza a goder finalmente i frutti di quella civiltà, di cui l'Europa si riconosce ad Essa principalmente debitrice ».

Il Cap.^o Prof. MENABREA legge un suo lavoro intitolato *Mémoire sur les quadratures*.

Sarà stampata nel Volume seguente.

Il Prof. GENÈ legge la 1.^a parte di una sua *Memoria per servire alla storia naturale degli Issodi*.

12 maggio.

Leggesi una circolare stampata, indiritta all'Ecc.^{mo} Presidente dai signori MURCHISON e SABINE, Segretari generali dell'Associazione Britannica pel progresso delle scienze, con la quale si notifica che l'Associazione suddetta terrà quest'anno le sue adunanze a York a cominciare dal giorno 26 di settembre, e vi si invitano i Membri dell'Accademia.

Il Cav. Angelo SISMONDA, deputato col Cav. CARENA e col Conte AVOCADRO, fa relazione intorno a una domanda di privilegio per la costruzione e l'uso di forni detti *gazogeni*, fatta al Regio Governo dal

sig. Ignazio PORRO da un lato, e dai signori GERVASONE e FALCK dall'altro.

Il metodo in generale, sul quale si fondano i gazogeni, e l'applicazione di questi alle varie operazioni siderurgiche, non devono essere, secondo i Commissarii, oggetto di privilegio esclusivo per alcuno, essendo anzi a desiderarsi che vengano universalmente conosciuti e praticati, perchè di grandissima utilità. Con tutto ciò, siccome dai Ricorrenti si accennano alcune modificazioni da loro immaginate e introdotte in colestà maniera di forni, così i Commissarii, trovando giusto che ciascuno abbia a trarre profitto dalle scoperte del proprio ingegno, sono d'avviso che si possa concedere il chiesto privilegio al sig. PORRO, a condizione che produca un regolare disegno, dal quale risulti la novità del suo metodo; e ai signori GERVASONE e FALCK, con che il loro gazogeno sia tale, quale è figurato in una delle tavole unite alla loro domanda, e con che i loro forni destinati a scarbonizzare la ferraccia e a scaldare il ferro rispondano esattamente a quelli che sono rappresentati nelle tavole anzidette.

Il Segretario Aggiunto legge la *Notizia storica dei lavori della Classe nel corso dell'anno 1843*, da premettersi al Volume sesto della nuova Serie delle Memorie accademiche.

2 giugno.

Il Cav. Angelo SISMONDA, deputato col Cap.^o Prof. MENABREA, legge il parere intorno a una domanda di privilegio fatta al Regio Governo dal sig. CHEVREMONT, Ingegnere delle miniere del Belgio, per la costruzione e per l'uso nei Regii Stati di forni particolari destinati alla preparazione della calce e alla torrefazione delle sostanze minerali e del gesso.

Il disegno del forno da calce non sembra ai Commissarii offerire innovazioni di tal genere e di tale importanza da poter essere oggetto di privilegio. Quanto ai forni destinati alla torrefazione delle sostanze minerali, essi sono costrutti in due diverse maniere. Uno ha un solo focolare con varii ordini di grandi tubi o condotti, che portano il fumo e la fiamma in una specie di camera a cavità attorniante la camicia esterna della volta del forno, dove per mezzo di una porta praticata

nella parte superiore si introducono le sostanze da torrefarsi, ed una volta torrefatte si estraggono da aperture laterali, situate poco sopra alla graticola. Il secondo forno è munito di due focolari, le di cui fiamme, per mezzo di varii ordini di tubi, pervengono in una grande cavità conica centrale, occupata dalla sostanza su cui si vuol far agire il calorico.

I Commissarii fanno riflettere, che la sola sperienza può dimostrare l'economia e il grado di utilità di queste due specie di forni da scomposizione; si astengono quindi dal giudicarli: però, non essendo a loro notizia che esistano nei Regii Stati forni in tal maniera costrutti, i Commissarii opinano che si possa concedere il chiesto privilegio per questi forni a torrefazione con uno o due focolari, quali sono rappresentati in due fogli che vanno uniti alla supplica del sig. CHEVREMONT, e che i due Commissarii hanno firmato.

Il Prof. BOTTO, riferendosi a una recente pubblicazione dei signori Professori SANTI-LINARI e PALMIERI, legge una sua Nota intitolata: *Question de priorité, avec observations sur l'action chimique des courants d'induction magnéto-électrique terrestre.*

Sarà stampata in uno dei seguenti Volumi.

Da ultimo il Prof. CANTU' prende la parola per annunziare alla Classe l'esistenza dell'iodio con leggieri indizii di bromo, da lui riconosciuta nell'acqua del pozzo artesiano della Scaccavella presso Alessandria.

In questa adunanza sono nominati Corrispondenti dell'Accademia i signori

HONGSON (Brian Houghton), Ministro residente della Gran Bretagna alla Corte di Nepal;

FALCONER (Ugo), Dottore in Medicina, Direttore dei giardini botanici del Bengal, a Calcutta;

GRIFFITH (Guglielmo), Dottore in Medicina, Direttore del giardino botanico di Calcutta;

HOPE (Federico Guglielmo), Ministro Anglicano, Membro della Società Reale di Londra.

16 giugno.

Il Prof. LAVINI, a nome anche del Prof. CANTU', legge il parere intorno a una Memoria intitolata *dell'Estrattivo*, stata mandata all'Accademia dal sig. LORENZO ANGELINI, Farmacista in Voghera.

In questa breve scrittura l'Autore accenna d'aver ottenuto con mezzi chimici l'estrattivo dal *Critheum maritimum*, ed espone l'idea, che questa sostanza sia un prodotto dell'ossidazione della gomma, e che, a sua volta, la gomma sia un prodotto della deossidazione dell'estrattivo.

25 giugno.

In questa adunanza il Dott. Ascanio SOBRERO, Assistente alle Cattedre di Chimica nella Regia Università, è nominato Membro nazionale residente dell'Accademia per la Classe delle scienze fisiche e matematiche.

Sono poi eletti ai Corrispondenti i signori

GAROVAGLIO Dott. Santo, Professore nell' I. R. Università di Pavia;
DE CIGALLA Conte Giuseppe, Protomedico a Santorino;

BAILY Francesco, Astronomo e Membro della Società Reale di Londra.

24 novembre.

Si legge una lettera del 27 giugno, con la quale il Primo Segretario di Stato per gli affari dell'Interno significa a S. E. il Presidente essere piaciuto a SUA MAESTÀ di approvare, in udienza del 25 dello stesso mese, la nomina del Dott. Ascanio SOBRERO a Membro nazionale residente dell'Accademia per la Classe delle scienze fisiche e matematiche.

Il Segretario Aggiunto presenta alla Classe un piego sigillato, stato recato all'Accademia il 7 ed ottobre p.^o p.^o, contenente, secondo che rilevasi dalla soprascritta, una *Introduzione allo studio dell'astronomia* che dall'Autore mandasi pel concorso aperto dall'Accademia con Programma del giorno 8 maggio 1842, ai premii fondati dal Conte PILLET-WIL. Questo piego verrà conservato negli archivii dell'Accademia fino al 1.^o di luglio 1846, termine stabilito pel concorso anzidetto.

Il Cap.^o Prof. MENABREA, deputato col Cav. CARENA, legge il parere

intorno a una domanda di privilegio fatta al Governo dal sig. OCHSNER e Comp.^a per l'introduzione e l'uso nei Regii Stati di un nuovo brillatoio da riso.

I Deputati, che altra volta ebbero in esame questa domanda, sulla quale, per difetto di notizie sufficienti, non avevano potuto proferire giudizio, dichiarano ora, che in seguito a nuove spiegazioni avute dai Ricorrenti per la via del Regio Ministero, si sono convinti che, dei proposti meccanismi, alcuni sembrano nuovi ed altri perfezionati, e che il loro complesso offre un sistema ingegnoso che pare dover riuscire di non piccola utilità agli agricoltori piemontesi. I Deputati sono quindi di parere che al sig. OCHSNER e Comp.^a si possa concedere il chiesto privilegio, a condizione che non abbia ad escludere l'uso degli altri meccanismi esistenti, nè l'introduzione di qualsiasi ordigno; inser-
viente alla brillatura del riso, ma diverso da quelli che dai Ricorrenti sono specificati.

Il Prof. GENÉ ripiglia la lettura della sua Memoria sulla *Storia naturale degli Issodi*.

8 dicembre.

Il Prof. GENÉ termina in quest'adunanza la lettura delle sue osservazioni *Sulla storia naturale degli Issodi*.

Sarà stampata in uno dei seguenti Volumi.

22 dicembre.

Il Prof. LAVINI, deputato col Prof. CANTU', legge il parere intorno a due Memorie del sig. ANGELINI, di Voghera, intitolate la 1.^a: *Fatti per servire alla storia dell'oppio*; la 2.^a *Dell'olio dei semi di EVONYMUS EUROPAEUS*. In quest'ultimo scritto i Commissarii accennano le seguenti osservazioni che essi credono meritevoli d'essere ricordate nella presente Notizia storica.

L'Autore preparò l'olio di questi semi col contonderli, e col trattarli coll'alcool. Facendone poi evaporare in una storta la tintura feltrata, ottenne un residuo, in cui riconobbe due sostanze, che egli chiama olii: la prima fluida (*olio oleo-silico*), che al contatto dell'aria si fa

glutinosa (*acido oleo-silico*); la seconda (*acido silio-margaritico*), che coll'azione della potassa diventa perlata e solida (*Stear-olio*). L'Autore è in fine d'avviso, che l'olio di silio o *Evonymus europaeus* L. abbia alcuni punti di analogia coll'olio che ottiensì dai semi del ricino per compressione.

Il Dott. SOBRERO, a nome anche del Cav. GIULIO condeputato, fa relazione intorno a una domanda di privilegio sporta al Governo dal sig. ANTONIO CHERASCO per la fabbricazione di oggetti in terra cotta semivetrificata e in terra verniciata.

I Commissarii riconoscono l'importanza dell'industria, a cui si è rivolto il sig. CHERASCO, e lodano i prodotti che ne ottiene, ma insieme avvertono che la fabbricazione da lui tentata trovasi già da qualche tempo esercitata in grande da altri nei Regii Stati.

Il Cav. ANGELO SISMONDA comincia la lettura di un suo lavoro intitolato *Notizie e schiarimenti sulla costituzione delle Alpi piemontesi*.

Il Cav. Prof. BOTTO principia egli pure a leggere una sua Memoria *Sur les lois de la chaleur dégagée par le courant voltaïque, et sur celles qui régissent le développement de l'électricité dans la pile*.

MICROMYCETES ITALICI

NOVI

VEL MINUS COGNITI

AUCTORE

JOSEPHO DE NOTARIS

Exhib. 12 iunii 1842.

DECAS TERTIA (*)

1. *Stictis Oleae.*
2. *Excipula ornata.*
3. *Sphaeria Lisae.*
4. *Sphaeria herbarum.*
5. *Hysterium dives.*
6. *Leptostroma hysterioides, graminicolum.*
7. *Phlyctidium clypeatum.*
8. *Sphaeronema elegans.*
9. *Sphaeronema ferox.*
10. *Myriocephalum hederacolum.*

CUPULATI.

1. STICTIS OLEAE DNTRS.

Ad folia Oleae Europae marcescentia in collibus circa Genuam, vere 1842.

In utraque pagina foliorum Oleae ad terram dejectorum et marcescentium, praesertim vero in inferiore, observantur puncta nigra, sine ordine sparsa, diametro millimetrum vix acquantia, plerumque minora.

(*) Decades I.^a et II.^a exstant in vol. III.^o pag. 55.

Lentis ope inspecta, haec puncta praebent tubercula parva, discoidea, atro-fuscescentia, in sicco depressa, plana, vel concaviuscula, humiditate accedente turgida, convexa, epidermide sub qua nidulantur primum velata, dein, hac stellatim vel quocumque alio modo rupta erumpentia, liberata, laciniisque ejusdem redimita, vel penitus nuda. Ascomata ex-cipulo proprio omnino carentia, ceracea, firma, magis lata quam crassa, ambitu et praecipue in disco fuscescenti-nigra, cubilia nigrefacientia, intus pallida, ascis creberrimis paraphysibusque fixis invicem stipatis, ex integro constituta. Asci e basi contracta clavati, obtusi, primum materia grumosa, veluti e guttulis oleosis, repleti dein sporidia octo, varie disposita foveantia, paraphysesque filiformes, apice incrassato sub-clavulatae, obscure remoteque septatae, ascis perfectis, inanibusque angustioribus intermixtae, sursum fuscescentes. Sporidia erumpentia, oblonga, extremitatibus obtusis, latere altero convexiore subsemilunaria, simplicia, pellucida, coloris lenissime subcaesii. Ascomata vetustate absumpta foveolas nigrescentes in foliorum superficie relinquunt.

Praeterquamquod haec species a Stictidibus foliicolis, v. gr. *nivea*, *phacidioide*, colore prae aliis fusco-atro, primo obtutu dignoscitur, recedit a congeneribus, mihi lucusque cognitis, hymenio paraphysibus instructo, more *Stictidis Lichenum*, clariss. MONTAGNEI, de qua confer. Annal. Scient. natural. vol. V. tab. 13. ic. 3.

Quoad formam et vivendi rationem, analogia quaedam inter *Stictidem Oleae* et *Sphaeriam Craterium* DC. (*Phacidium Craterium* Mouv. et NESTL.) quam invenies in Decade mea Micromycetum II, sub n.º 6, nec non *Phacidium Laurocerasi* DESMAZIERII (Pl. Crypt. de France n.º 292), adest, sed in hisce speciebus, hymenium cupula propria, quamquam tenui, aperta, exceptum est, quapropter Pezizis arcessendae sunt, et eo magis quod epidermide tantum stellatim fissa primitus teguntur, nec perithecio vertice valvatim dehiscente, ut in genuinis Phacidiiis, gaudent.

Comparari denique posset, Stictis nostra, cum Blennoriis ob sporidiorum erumpendi rationem, quae leviter observanti, fungillum integrum constituere viderentur, at notis supra expositis facile discriminatur. Caeterum puto, compluribus argumentis alio loco tractandis innixus, Blennorias nonnullas nil aliud esse quam Stictides quarum hymenium ob minutiem praetervisum est.

EXPLICATIO ICONIS I.

1. Folium Oleae exhibens fungillum naturali magnitudine.
2. Fragmentum folii cum ascomatibus aliquot lente auctis e sicco.
3. Eadem humiditate turgescencia, a foveola ab ascomate vetustate absumpto, excavata.
4. Ascomata verticaliter secta, a latere visa, et lente simplici valde aucta.
5. Portiuncula hymenii ad augm. 700 diametr. ascos juniores, perfectosque sporidigeros, una cum paraphysibus ostendens.

2. EXCIPULA ORNATA DNTRS.

In epidermide dealbata trunci Castancae vescae in sylvis prope Genuam, extra portam *di Granarolo*, vere 1842.

Superficialis, libera, minutissima, vix nudo oculo conspicua. Cupulae sessiles, subiculo proprio omnino carentes, sparsae, setis fuscescentibus, rigidis, longiusculis, confertis, flexuosis, intricatisque strigosae, in sicco ore connivente, setulisque marginalibus invicem convergentibus clausae, patellari-umbilicatae, globularesve; humectae apertae, subhemisphaericae, molles, disco cinerascete, deliquescente. Sporidia (asci?) e pariete interna cupularum orimda, primum pedicelli ope adfixa, simplicia, subclavata, mutica, paraphysibus subtilissimis intermixtis, matura libera, secedentia, oblonga, oblongove-subclavata, utrinque obtusa, vix septis transversis obscuris notata, pellucida, virore lenissimo suffusa, apice setulis quatuor cruciatim patenti-divergentibus, sporidiis ipsis brevioribus, coronata, extremitate inferiori, pedicello setiformi adnato, caudata.

Planta perpusilla at eodem tempore pulcherrima et optime distincta; accedit Excipulae strigosae FRIESII (Syst. Mycol. 2. p. 103 *sub* *Peziza*, et Sclerom. Succ. n.º 136), sed dimensione multoties minore, sporidiorumque structura ab hac et a reliquis generis primo obtutu diversa.

Observationes hac occasione in excipulas institutae, me certiores fecerunt hoc genus elementis heterogencis constitutum esse, et pro vero, *Excipula punctiformis* FRIES (Scler. Succ. n.º 420), *lecideola* ejusd.

l. c. n.º 137, et *aspera* quam habui a clariss. et amicissimo MONTAGNE, hymenio ascigero Pezizis quammaxime accedunt, et cum illis coniungendas esse censeo. Hoc iamdudum prae oculis habuisse videtur celeb. CORDA, qui in Iconibus Fungorum l. p. 24 emendationem generis Excipularum FRIESII proposuit. Revera Excipula ejus Eryngii ex iconē 294 structura quammaxime accedit nostrae ornatae. Character vero generis ab acutissimo Auctore hisce verbis expositus: « Cupula immersa coriacea, primum » clausa, dein longitudinaliter dehiscens et discoideo-aperta, discus heterogeneus carnosus ex ascis compositus, sporis simplicibus » iconi nequaquam respondet, ibi enim perspecta sporidiorum prae hymenio proportione, clare patet sporidia ascis haud excipi posse, ex eo quod volumine ascos ipsos excedunt. Hinc Excipula nostra et affines in posterum ad dignitatem generis attollendae, vel character generis denno hoc modo corrigendus. Cupula varia, hymenium e sporidiis simplicibus primum fixis, dein secedentibus compositum.

De Phlyctidius Wallrothii vide infra observationem ad Phlyctidium clypeatum.

EXPLICATIO ICONIS II.

1. Cupulae binae, lentis ope valde aetac, quarum una *a.* aperta, altera *b.* e sicco clausa.
2. Particula cupulae e latere exteriorē visa, ad augm. 400 diametr.
3. Sporidia aliquot perfecta, ad augm. 1000 diametr.
4. Portiuncula hymenii, ad augm. idem, sistens sporidia nondum rite evoluta.

PYRENOMYCETES.

3. SPHAERIA LISAE DNTRS.

Ad ramos emortuos Berberidis vulgaris in Monte-Cenisio detexit Dominicus LISA, aestate 1838.

Pulcherrima, praebet maculas atras, opacas, lanceolatas, oblongasve, sed ut plurimum lineares rectas flexuosasve, a millimetro ad tria usque centimetra et ultra extensas, ob corticis pallorem valde enitentes. Perithecia, supra stroma entophlaecodeum tenue, planum, effusum, fuligi-

nosumque e cortice interiori oriundum, eisque epidermide rimose longitudinaliterque rupta in series lineares subparallelas, vel acervatim prorumpentia, vixque supra epidermidem ipsam protuberantia, conferta caespitosa, globosa, vel ob mutuan pressionem angulata, cylindraceo-prismatica vel obovata, superficie rugulosa, vertice ostiolo punctiformi impresso, vel subpapillaeformi minutissimo, senio varie diffracto, instructa, in siccio collabescendo umbilicata magisque rugosa. Nucleus cinerascens gelatinosus, in siccio albicans fere pulveraceus. Asci lineari-oblongi, utrinque obtusi, paraphysibus subtilissimis obvallati. Sporidia didyma, ovata, ovatove-oblonga, extremitatibus rotundata, vix medio constricta, pallide luteo-olivacea.

Pertinet ad *Sphaerias* caespitosas.

A *Sphaeria Berberidis* cui affinis facile differt peritheciis seriatim erumpentibus eorumque figura, praecipuis vero sporidiis didymis, quae in specie adducta pluriseptata et fere duplo minora quam in nostra.

Sphaeria micrographa FRIES in MONTAGNE Notic. in Annal. Scient. natur. 1. p. 297 et *Sph. acquilinearis* SCHWEINITZ (FRIES Syst. Mycol. 2. p. 374), quae pariter in Berberide proveniunt, praeterquamquod ad sectionem *Sphaeriarum* conerescens spectant forma ostioli, in hac globosum in illa compresso-umbilicatum, ab hac specie praeceteris dignoscuntur.

Dico Dominico LISAE Hortulano H. R. Botanici Taurinensis, Indicis Muscorum agri Taurinensis Auctori, qui complures rariores Mycetes ex alpebus Pedemontanis mihi attulit.

EXPLICATIO ICONIS III.

1. Acervula aliquot peritheciolorum, lente simplici aucta.
2. Perithecia aliquot a latere visa, bina a. verticaliter sceta, lentis ope pariter aucta.
3. Portio nuclei, ad augm. 150 diametr.
4. Ascus, ad augm. 700 diametr.
5. Sporidium, ad augm. 1000 diametr.

4. SPHAERIA HERBARUM.

Sphaeria herbarum FRIES Scler. Succ. edit. I. n.° 38, Secund. specim. in Collect. cl. DESMAZIÈRES, non a edit. DESMAZ. Pl. Crypt. de France ed. 2. n.° 278.

Sphaeria Pisi SOWERB. FRIES Syst. Mycol. 2. p. 509 et Scler. Succ. ed. 2. n.° 322.

Frequens in caulibus plantarum majorum emortuarum ex. gr. *Scilla maritima*, *Asphodelus ramosus*, *Lepidium Iberis*, etc.

Punctiformis, perithecia sparsa, plus minusve inter se distantia, plerumque solitaria, rarissime per unum alterumve contigua, vel invicem connata, fusco-atra, mollia, laevia, subcarnoso-cellulosa, subpellucidave, e basi applanata, matrici laeviter adhaerenti vel subimmersa, lenticulari depressa, margine obtuso, ostiolo prominulo brevi, mammillari umbonata, siccando collapsa, rugosa, patellaria, epidermide translucenti tecta, interdum hac secedente nuda, libera, senio demum vertice vario modo diffracta, decedentia, maculas foveolasque orbiculares, oblongasve fusciscentes in cubilibus relinquentia. Nucleus asceigerus, asci ampli, erecti, vel curvato ascendentes, oblongi, basi vix at non semper attenuata, quandoque imo latiore, sporidia octo foveantia. Sporidia majuscula oblonga, oblongove-elliptica, multiseptata sive plurilocularia, loculis subquadratis fere tessulata, limbo pellucido cineta, luteo-olivacea. Paraphyses obsoletae vel nullae.

Asci in hac praesertim specie, sicuti in aliis compluribus, evidentissime duplici membrana componuntur, quarum in interna sporidia evolvuntur.

Species pro natura herbarum quas aggreditur summo opere variabilis. Collatis speciminibus authenticis specierum huc relatarum, nec non milena quae ipse diversis temporibus legi, mihi videtur discrimina acutiora ad eas rite distinguendas haud adesse. Differentiae molis et formae perithecorum parum faciunt, ex eo quod in eodem specimine persaepe singulae unicuique speciei adscriptae observantur et pendere videntur vel ab aetate, vel a natura et consistentia matricis, vel demum ab indole epidermidis, quae si facile et sponte secedit, tunc perithecia magis regularia, melius evoluta et prominula, si e contra diutius persistit et rigescit tunc perithecia magis depressa, saepe etiam ligno basi profundius

immersa. Quod ad differentias coloris attinet, minoris momenti sunt et vix tangi merentur. Uno verbo, identitas structuræ ascorum, sporidiorum, peritheciiorumque, de identitate specierum de quibus sermo est me persuasum habent.

Legi cum foliis et pedunculis *Caricis foetidæ* speciem huic affinem, sed distinctam peritheciis sphaericis nentiquam papillatis, sporidiisque majoribus et multo magis septatis. Est mihi interim *Sphaeria macrospora*, iconemque ejus et descriptionem absolutam, jam nunc a me exaratam, suo loco exhibebo.

EXPLICATIO ICONIS IV.

1. Fragmentum scapi *Scillæ maritimæ* cum peritheciis nonnullis lente adauctis.
 - a. Perithecia aliquot epidermide adhuc tecta.
 - b. Alia, epidermide dejecta denudata madore turgescencia.
 - c. Eadem in sicco.
 - d. Perithecia aliquot vetustate rupta.
 - e. Maculae, quae post lapsum peritheciiorum in matrice remanent.
2. Peritheciiorum nonnullorum sectiones verticales.
3. Particula perithecii ad augm. 700 diametr.
4. Pars nuclei ad augm. idem.
5. Sporidia ad augm. 1000 diametr.; horum inferius nondum maturum.

5. *HYSTERIUM DIVES* DNTRS.

Ad ramos dejectos in locis suffocatis collium Taurinensium, legi 1837 decedente autumno.

Nudo oculo sistit maculas atras, opacas, amorphas, pollicem circiter latas, quasi materia grumoso-atramentosa supra corticem ramorum effusa. Perithecia atro-opaca, fragilia, minuta, primum epidermide tecta, discreta, dein erumpentia, liberata, conferta, stipataque, tomento byssino late expanso, fuligineo-fusco, e floccis rigidiusculis fragillimis, ramosis, intricatis, hinc inde septatis contexto, insidentia, mole et figura polymorpha, lineari-oblonga, lanceolata, recta, vel curvula, reniformia, elliptica, extremitatibus rotundatis, vel acutiuseculis, subinde orbicularia, facie depressa, vel canaliculata, subtilissime striulata, vel laeviuscula,

labiis planiusculis arcute conniventibus elausa, vix humiditate ingruente invicem dimotis, rima angusta reclusa. Nucleus albidus ex ascis paraphysibusque copiosissimis. Asci elongati, e basi angustata clavati, obtusi, primum materia grumosa, pro more veluti oleosa, farcta, matura octospora. Sporidia uniseptata, constricto-didyma, articulis deltoideo-ovatis, plus minusve acutis, obtusiusculisve, pallide flavicantia. Paraphyses copiosae, ascis plerumque longiores tennes, flexuosae, intextae.

A plerisque generis speciebus tum forma sporidiorum et peritheciorum cum *Stromate byssoideo* facile differt; ab *Hysterio graphico* FRIESII (Syst. Mycol. 2. p. 581) interdum subiculo tomentoso insidenti, quod habeo a cl. KUNZE, nostrum distinguitur peritheciis haud elongatis, nec subramosis, nec labiis prominulis instructis.

EXPLICATIO ICONIS V.

1. Grex peritheciorum complurium lente adauctorum tomentoque insidentium.
2. Perithecia nonnulla verticaliter secta, quorum *a.* a reliquis discretum epidermide rupta adhuc cinetum.
3. Filamenta subiculi ad augm. 700 diam.
4. Portio nuclei ad idem augm.
5. Asci bini ad augm. 1000 diam. *a.* junior rudimenta sporidiorum ostendens, *b.* maturus sporidia perfecta fovens.
6. Sporidia aliquot ab ascis liberata ad augm. idem.

6. *LEPTOSTROMA HYSTERIOIDES* var. *GRAMINICOLUM* DNTRs.

In vaginis culmisque *Moliniae* coeruleae. Legi in pascuis ad Verbanum autumno 1837.

Præbet maculas minutas, sublineares, atra, secus strias vaginarum culmorumque dispositas, longitudine millimetrum saepe aequantes. Perithecia scutiformia innata, atra, nitidula, sub microscopio minutissime ruguloso-punctata, pellucida, secus strias vaginarum culmorumque dispersa, semper inter se discreta, in vaginis parallelogrammica, subquadrata, aut oblonga, sulco longitudinali lato, parum profundo fere canaliculata, in culmis angustiora, elliptico-lanceolata, linearivae, angustius sulcata; matura marginem versus circumscissa, valvula vel opereuli ad

instar secedentia, discumque pallide carneum, ceraceum, turgescens, linea nigra circumscriptum denudantia. Sporidia primum fixa, erectiuscula, matura secedentia, elongato-fusiformia, curvata, simplicia, apicibus acutiusculis, leviter flavicantia, pellucida, vix septata.

A Leptostromate hysteroide (FRIES Syst. 2. p. 600), quod copiosum legi in Dianthi. atrorubente sicco ad oras Verbani, meo sensu tantum differt statura paullulum minori, forma perithecii disco canaliculati et linearis, quae omnia a matricis diversa natura certo certius pendent. Species symmetrica *Hysterio herbarum*, varietas *Hysterio culmigeno*, quorum forte nonnisi monstruositatem praebent.

Stictis valvata MONTAGNEI (Annal. Scient. natur. VI. p. 337), in graminibus pariter proveniens vix hoc loco pro comparatione citanda, structura, dehiscendi modo, toto coelo diversa.

EXPLICATIO ICONIS VI.

1. Fragmentum culmi vagina tecti plantulam naturali magnitudine exhibens.
2. Fragmentum vaginae individua aliquot lente aucta praebens: *a.* perithecio adhuc adnato, *b.* perithecio secedente, *c.* perithecio dejecto.
3. Fragmentum culmi formam alteram perithecorum exhibens ad augm. idem.
4. Sectio verticalis duorum individuorum ante dehiscentiam.
5. Eadem perithecio secedente pariter ac praecedentia lentis ope aucta.
6. Portio nuclei ad augm. 1000 diametr.
7. Sporidia matura ad augm. idem.

7. POLYCTIDIUM CLYPEATUM DNTRS.

Ad folia dejecta, marcescentia Cerasorum in vineis collium supra Genuam, vere 1842.

Punctiforme, nigrum, hypophyllum, sparsum, epidermide innata tectum, diametro dimidium millimetrum vix aequans. Sporidochium lenticulare, margine acutum, vertice umbilicato-umbonulatum, laeve, coriaceum, tenax, sub vitris augentioribus obscure minuteque grumoso-cellulosum, fusco-atrum, centro sive parte qua papillae more extollitur,

substantiae multo tenuioris, pellucidum, laxius cellulosum, cellulis exiguis subrotundis, quasi membrana operculari clausum, hac senio irregulariter seissa, vel circumcirca sejuncta, vel alio modo fatiscente dehiscens, in sicco collapsum, rugulosum. Nucleus albidus, quasi amylaceus, sporidigerus. Sporidia parieti sporidochii interni primitus fixa, conferta, plus minusve alte pedicellata, juniora clavata, obtusa, diaphana, matura libera, secedentia, lineari-oblonga curvata, quadri-quinque septata, pellucida, extremitatibus obtusis utrinque setula subulaeformi acutissima mucronata.

Cum ulla alia specierum mihi cognitarum comparari meretur quam cum *Phlyctidio nitido* WALLROTHII (Fl. Crypt. Germ. 2. p. 418) (*Dothidea alnea* FRIES Scler. Succ. n.º 288. *Xyloma alneum* PERS.) a quo vero differt Sporidochii structura, sporidiorumque forma.

Priusquam *Phlyctidio* celeb. WALLROTHII, generi ex elementis forte nimis heterogeneis conflato, cum adsint plura huiusmodi, quae nucleo tantum sporidigero, alia quae nucleo ascigero gaudent, hanc plantam subscriberem, in animo fuit pro novi generis typo offerendi, ratione revera qua Sporidochium dehiscit sporidiorumque structura, ab *Excipulis*, *Dothideis*, *Perisporiis*, *Sphaeriis*, caeterisque valde abhorret. Sed iterum perpensis speciebus quas WALLROTHIUS ad hoc genus reduxit, visum est *Phlyctidia* genus satis naturale constituere posse dummodo expurgentur speciebus nucleo ascigero instructis.

EXPLICATIO ICONIS VII.

1. Fragmentum folii sistens plantam naturali magnitudine.
2. Individua aliquot lentis ope aucta, *a.* humecta turgescencia, *b.* c sicco.
3. Sporidochia verticaliter secta lente pariter aucta.
4. Pars superior Sporidochii lente valde auct. demonstrans structuram partis centralis Sporidochii ipsius, nec non modum quo dehiscit.
5. Sporidia ad augment. 1000 diametr. una cum particula parietis Sporidochii sporidia nondum matura proferentis.

8. SPHAERONEMA ELEGANS DNTR.

Perisporium elegans FRIES Scleromyc. Succ. ed. 2. n.º 460.

Ad caules herbarum majorum emortuarum, Genuae, vere 1842.

Super caules herbarum humi dejectarum observantur puncta, nudo oculo visibilia, etiamsi minutissima, per plagas plus vel minus extensas irregulariter sparsa, creberrima, coloris nunc carnei, nunc fusciscentis, nunc penitus nigri. Sporidochia globoso-depressa, ut plurimum discreta, rarius contigua confluentiaque, summa epidermide, vertici eorundem innata, tecta, caeterum libera, stratisque corticalibus subjectis tantum affixa, poro orbiculari sat amplo pertusa, siccitate collabescendo concava, umbilicata, papillatave; juniora tenuiora pellucida, celluloso-membranacea, areolis valde irregularibus, subcarnea, ostiolum versus firmiora, dein sensim sensimque spissiora fusciscentia, tandem nigra. Sporidia cylindrica, oblongave, subindeve leniter curvula, virore lenissimo suffusa, pellucida, primitus libera, mucro tenui tantum coacta, humiditate ingruente erumpentia, nunc cirrhorum, nunc guttulae, vel globuli ostioli insidentis ad instar, cirrhis globulisve aqua tectis cito solubilibus.

Sporidochia variant quammaxime magnitudine et paullulum inter se figura, orbiculari nempe, vel oblonga, forma globosa plus minusve depressa; dantur quaedam interdum ostiolis binis pertusa.

Inter Sporidia ejecta pluries observavi corpuscula figurae praeter propter semilunaris, sporidiis ipsis multoties majora, quorum bina in icone n.º 5 exhibentur, at cum non licuerit et in ipsa Sporidochiorum cavitate deprehendere dubium restat utrum rudimenta ascorum, vel Sporidia alii ordinis exhibeant, vel plantae omnino extranea sint.

In specimine FRIESII superius adducto, epidermis circa sporidochia maculas coloris dilute carnei effusas profert, quod in meis non observatur, caeterum inter se collata nullum essenziale praestant discrimen. Quantum differat haec species a *Perisporio* disseminato ejusdem auctoris mihi haud cognito non facile dictu.

Sphaeria herbarum FRIES Scler. Succ. ed. 2. n.º 38 ab hac specie, exceptis dimensione quidquam majori, colore saturatiore in nigrum vergente, vel omnino nigrum, mea quidem sententia haud differt, et nil

aliud est quam hujus status maxime adultus! Structura Sporidochii eadem, forma prorsus eadem, eadem denuo sporidiorum figura, magnitudo, et color!

EXPLICATIO ICONIS VIII.

1. Sporidochia aliquot lente aucta, *a.* e sicco, *b.* a dorso visum, reliqua humiditate turgescunt sporidiaque propelluntur.
2. Sporidochia aliquot verticaliter secta et a latere visa, lente pariter aucta.
3. Fragmentum Sporidochii ad augm. 400 diametr.
4. Sporidia ad augm. 700 diametr.
5. Corpuscula semilunaria inter Sporidia observata ad augm. idem.

9. SPHAERONEMA FEROX DNTRS.

Ad caules Solani aliarumque herbarum emortuarum in H. R. Botánico Genuensi, vere 1842.

Nudo oculo in caulibus dealbatis quos aggreditur, maculae tantum indeterminatae conspiciuntur plus minusve fusciscentes, punctis minutissimis nigris passim notatae. Sporidochia epidermide vertice eorundem adnata, perforataque tecta, ceterum penitus libera, globosa, depressa, globosa obtuse conoidea, pellucida, fusciscentia, tenuia, sub microscopio celluloso membranacea, areolis amplis subrotundis irregularibusve, circa ostiolum sat amplum quod in vertice exhibent, setulis rigidulis, simplicibus, pellucidis, plus minusve copiosis tamen semper discretis, ostioli diametrum aequantibus superantibusve, erectis, patentibus vel radiantibus hirta, in sicco collapsa fusca. Sporidia cylindrica extremitatibus obtusa, longitudine diametrum multoties superantia, diaphana coloris perlacci, vix invicem conglutinata, pulveraceo erumpentia.

Variat pariter ac praecedens Sporidochiorum dimensione, paululumque forma, prae aliis longitudine et directione setularum ostiolum circumvallantium.

Ab omnibus descriptis ostiolo hirta prima fronte distinguitur.

EXPLICATIO ICONIS IX.

1. Sporidochia lente aucta a latere visa.
2. Particula peridii ad augm. 400 diam.
3. Sporidia ad augm. 700 diametr.

CONIOMYCETES.

MYRIOCEPHALUM DNTRS.

Flocci erecti subsimplices, tenuissimi, vix et obscure septati, longitudine varii, apice incrassato sporidigeri, basi invicem in tuberculum constipati, muco coacti; sporidia sphaeroidea, simplicia, floccorum apice inspersa, sessilia, numerosissima, fusca, nucleo concolori farcta.

Fungilli habitu Melanconii vel Stilbosporae, pseudostromate e floccorum basi invicem stipatorum cortici, vel raro ligno denudato innato, erumpentes, demum cubilia excedentes, humiditate accedente turgescenscentes gelatinosi, siccitate in tuberculum corneum indurati, senio fatiscenscentes, atro-inquinantes.

Nomen a *μυριος* et *κεφαλος* ob Sporidia in capitula innumera collecta.

10. MYRIOCEPHALUM HEDERAECOLUM DNTRS.

Ad sarmenta Hederae tenuiora sicca, in collibus circa Genuam frequens, legi primum hyeme 1842.

Nudis oculis praebet puncta prominentia nigra, vel maculas nigras in ambitu decolorantes, orbiculares, oblongas, irregularesve, sine lege dispositas. Tubercula minuta, compacta, millimetro diametro ut plurimum minora, primum basi cortici interiori affixa, dein epidermide, e qua erumpunt, exclusa, liberata, forma pro aetate varia, conoidea, convexa, oblongave, halone veluti nebuloso interdum cincta, humecta citissime turgescenscentia in pulvinulum gelatinosum, fere tremellosum, subpellucido-punctatum, senio effusa, fatiscenscentia. Pseudostroma basi praesertim compactum, fuscenscenti nigrum, mucoso-floccosum. Flocci numerosissimi, omnes erecti radiantes, tenuissimi, pellucidi, obscure remoteque septati,

mucos denso collecti, basi invicem constipati, simplices vel plerumque bifurci apice incrassato capitellati. Sporidia numerosissima globosa fusca, sporidiolo vel si mavis nucleo concolore foeta, hinc annulo dilutius fere limbata, apice floccorum insperso-capitata, glomerula subrotunda efficientia, pedicello proprio omnino destituta, cohaerentia tantum.

Tubercula pro aetate, ut superius monui, forma valde variant, certo certius ab ortu hypophylacodea, sed in optime evolutis, ob differentiam volumen tuberculorum ipsorum inter et rimulas epidermidis, non sine difficultate definitur, num sint tantum epidermidi affixa, num ab ea erumpant.

Genus in ordine Coniomycetum, cui ob penitiorem structuram pseudostromatis, sporidiorumque referendum esse nullus dubito, cacteris nobilioribus a mucedineis quibuscumque characteribus nonnullis convenit, floccis nempe apice sporidiferis, differt floccorum ipsorum tenuitate, et praecipue substantia mucosa quae floccos sporidiorumque capitula undequaque obducit. Hoc intuitu propius accedit Stilbosporae, Pestalotiae, Asterosporio, quae pari ratione pseudostromate floccoso gelatinoso instruuntur, sporidiisque ex apice floccorum oriundis; sed Stilbosporae, Pestalotiae, Asterosporio, sunt Sporidia septata vel intus cellulosa, non simplicia nec in glomus collecta. Binae pro vero inter Stilbosporas enumerantur species, Stilbospora nempe botryospora MONTAGNE (Annal. Scient. natur. 6. p. 338. tab. 18. ic. 5) et Stilbospora cheirospora FRIES (Syst. Mycol. 2. p. 448), quae ex prioris saltem icona a cl. MONTAGNE exhibita, affinitatem quam maximam cum Myriocephalo meo ostendunt, at in hisce speciebus quae forte inter se haud satis differunt, Sporidia quoad dispositionis modum Penicillia vel Monilias aemulantur, dum in Myriocephalo dispositionem botrytideam praebent.

Addendum insuper quod Myriocephalum a generibus Stilbosporaeis superius adductis etiam situ floccorum differt, in hisce enim sub epidermide e qua Sporidia cirrhose vel quocumque alio modo profluunt gignuntur, dum e contra in nostro, mox libera in tuberculum supra corticem consistunt, et si inter mucedineas forma, dispositio, origo sporidiorum floccorumque sufficiunt ad genera distinguenda, non video sane cur characteres ejusdem ordinis parvi faciendi sint, cum agitur de Coniomycetibus, his neglectis Stilbosporaeis cum Sporodermeis commode in unum colligere possumus.

Cl. MONTAGNE l. c. monet se primum Stilbosporam botryosporam pro novi generis typo habuisse, eique nomen Thyrsidii indidisse.

EXPLICATIO ICONIS X.

1. Fragmentum ramuli Hederae helcis exhibens fungillum naturali magnitudine.
 2. Tubercula aliquot lente aucta.
 3. Tuberculum verticaliter sectum et aqua madefactum, magis auctum.
 4. Filamenta sporidigera ad augm. 700 diametr., *a.* e basi tuberculorum desumpta.
 5. *b.* Capitula sporidiorum ad augm. idem.
-

MICROMYCETES ITALICI

NOVI

VEL MINUS COGNITI

AUCTORE

JOSEPHO DE NOTARIS

 Exhib. 3 julii 1842.

DECAS QUARTA

1. *Peziza Cenangium.*
2. *Stictis Panizzei.*
3. *Hysterium micrographum.*
4. *Microthyrium Smilacis.*
5. *Diplodia polymorpha.*
6. " *seriata.*
7. " *mutila.*
8. " *profusa.*
9. " *Taxi.*
10. " *Oleae.*

CUPULATI.

1. PEZIZA CENANGIUM DNTRS.

Habitat in ramulis ad terram dejectis, forte Laricum, in monte Cenisio. Specimina legerunt D.ⁿⁱ LISA et BONNAZ, aestate 1838.

Recens ob colorem disci laete flavo-virentem, nudo etiam oculo facile conspicua. Erumpens vel cortice secedente, libera, unda, millimetrum

SERIE II. TOM. VII.

c

plerumque lata aut paullo ultra, rarissime in caespitulos pancornu individuum, saltem in speciminibus, quae ad manus sunt, coacervata. Cupula coriacea, crassiuscula, tenax, veluti epidermide tenui corticata, glaberrima, mox aperta, junior obverse conica lians, dein sensim dilatata, explanataque, subhemisphaerica, patellaeformis, figura admodum varia, oblonga, reniformis, cordata, subinde etiam trigona vel sublobata, margine in quocunque statu semper plus minusve incurvo, extus umbrino-olivacea, intus albida, stipitulo brevi, crassiusculo, laevi, fusco, excipulo brevior, quandoque excentrico praedita, in sicco minute rugulosa, disco lacte flavo-virens, concaviuscula vel plana. Hymenium ceraceum excipulo crassius, demum pulveraceo-fatisceus. Asci elongato-clavati obtusi, paraphysibus creberrimis, filiformibus, fasciculatisque, ascos subaequantibus, obvallati. Sporidia simplicia oblonga, ellipticave, extremitatibus rotundatis vel obtusiusculis, pallide citrina.

Variat quammaxime forma cupularum, ut raro individua bina ejusdem dimensionis et figurae in eodem ramulo inveniantur: in unico specimine, cupulas binas, stipituli ope invicem connatas observavi.

Ad *Phialeas calycinas* spectat, quas inter, vix cum *Peziza versiformi* (Pers. Icon. et descript. p. 25. tab. VII. fig. 7) ob colorem tum disci cum excipuli comparanda; a reliquis ejusdem sectionis vel forma vel colore satis superque recedit. Quoad colorem, excipulique, epidermide propria quasi vestiti, crassitiem, ad *Cenangia* accedere videretur, sed disco semper aperto ab iis statim distinguitur, sicuti et hymenio paraphysibus copiosissimis instructo a *Patellariis*, et praeceteris a *P. discolore*, (MONT. et FRIES *Annal. scient. natur.* 1. p. 390) quacum aliunde pluribus momentis congruit.

EXPLICATIO ICONIS I.

1. Frustulum ramuli exhibens plantam naturali magnitudine; in *a.* plaga decorticata, cupulas aliquot liberas ostendens.
2. Cupulae aliquot lente aetatae.
3. Cupulae a latere visae, lente simplici valde aetatae, *a.* junior, *c.* adulta, *b.* binae stipituli ope simul connatae, verticaliter sectae.
4. Portio hymenii, ad augm. 700 diametr. sub quo sporidia vix conspicua.
5. Pars superior asci unius, ad augm. 1000 diametr. Sporidia perfecta fovens.

2. STICTIS PANIZZEI DNTRS.

Ad folia dejecta Oleae circa Sanctum Romulum (San Remo), in Liguria occidentali legit Dominus Franciscus PANIZZI Pharmacopola, vere 1842.

Sistit pustulas parvulas, creberrimas, punctiformes, coloris ferme epidermidis ipsius foliorum quibus innascitur, vel cinerascens, vertice rimose lacerato, discum fere pulveraceum parce revelantes. Epiphylla, millimetro diametro plerumque minor, ascomata lenticulari discoidea, basi mesophyllo immersa, epidermide stellatim fissis, laciniis quatuor vel quinque subaequalibus, triangularibus, irregularibusve, in sicco conniventibus tecta, disco pallide citrina, subpulverulenta, madefacta turgescens, laciniis epidermidis reclusis vel recurvatis, emergentia, pallida, mollia, gluten amylaceum quasi aemulancia, facile tandem solubilia, foveolasque orbiculares in matrice relinquentia. Hymenium fungillum integrum constituens, omnino absque excipuli vestigio. Asci lineari-oblongi vix subclavati, utrinque obtusi, subinde fasciculati, invicemque cohaerentes, pallide flavicantes, massa veluti bulliculosa, longitudinaliterque striata faret, paraphysibus paucis, filiformibus ascis brevioribus intermixtis. Sporidia filiformia, longissima, flexuosa vel varie contorta, apicibus obtusis, guttulas oleosas (sporidiola?), seriatas foveant, pallide citrina, ante ascorum dehiscens vix conspicua, quin imo, eorundem mole et forma perspectis, prima fronte vix crederes ascis excipi posse, cum ut plurimum hos saepe longitudine excedant.

Hic iterum novam Stictidis speciem ascigero-paraphysiphoram habemus, prouti in St. Oleae (cf. Dec. III. n.º I) a qua characteribus validissimis differt: et 1.º sede constanter in pagina superiore foliorum: 2.º colore pallide citrino qui in illa fuscescens ater; 3.º structura molliori ascomatum: 4.º demum forma sporidiorum sane singulari, in ulla alia huius generis specie, quod sciam lucusque obvia. Ratione qua epidermis supra foliorum discum protuberat, tum modo quo laciniatim fissis recluditur, cum et hymenii in pulverem fatiscens indole, Stict. phacidioidi (FRIES Syst. mycol. 2. p. 198) potius analogi videtur; sed species citata hypophylla in foliis Arbut. Uvae ursi provenit, coloreque albedo-caesio a nostra distinguitur. Cacterum discrimen certum has inter species ab ipso generis characterem, ut primitus constitutum est, facile

eruitur, vel nempe e defectu paraphysium, quae si in Stictide phacidioidae pariter adessent, auctori acutissimo qui eam e vivo descripsit aufugere non potuissent, vel e sporidiis quae Stictidibus omnibus FRIESII (cf. Syst. l. c. p. 192) minuta, globosaeque sunt. Huc tandem praeterpropter redeunt ea omnia quae de affinitate Stictidis Oleae cum Phacidiis Lauro-cerasi, et Hederae in superioribus decadibus exponere sategi.

EXPLICATIO ICONIS II.

1. Ascomata lente aucta, *a.* e sicco, *b.* madida.
2. Sectio vertical. ascomatum nonnullorum ad augm. idem.
3. Portio hymenii ad augm. 400 diametr.
4. Ascus sporidia bina adhuc fovens a reliquis sejunctus ad augm. idem.
5. Sporidia ad augm. idem.

PYRENOMYCETES.

3. HYSTERIUM MICROGRAPHIUM DNTRS.

Provenit in pagina superiore foliorum Oleae Europaeae marcescentium, plerumque in consortio Diplodiae Oleae. Genuae vere 1842.

Minutissimum, sistit lincolas vel puncta ob epidermidem circumcirca nigrefactam, nudo oculo aegrins percipienda, vel laeviter observanti pro ostiolis prorumpentibus Diplodiae superius citatae sumenda. Perithecia dimidiata, superficialia, nuda, adnata, sine ordine sparsa, plus minusve inter se distantia, elliptica, oblonga, lineariter elongata, leviter convexa, recta varie curvata, subinde latere ramulo aucta, opaca, laevia, tenuia, subcoriacea, rima longitudinali dehiscentia, in sicco arcte clausa, humiditate ingruente labiis dimotis aperta, dilatata, disco planiusculo, pallido. Nucleus mollis subgelatinosus, ascis erectis, oblongis, oblongo-ovatis, obovatisve, obtusis, constans. Paraphyses nullae. Sporidia oblongo-attenuata subtorosa, extremitatibus obtusiusculis, sporidiola plerumque quatuor foventia, pallide flavicantia.

Basis perithecorum vel pars eorum inferior, si revera adest, tam tenuis et cubili tam arcte adhaeret, ut nullomodo eam decernere poterim, caeterum et pleraque Hysteria follicola talem ostendunt structuram.

Ab affinibus sectionis *Xylomatum* FRIESII (Syst. Mycol. 2. p. 589) ad quam spectat, distinguitur haec species vel minutie, omnes enim mihi notae nostram dimensione valde superant, vel forma, vel macularum exaridarum defectu, hinc vix cum ea comparandae species foliicolae verbi gr.: *H. punctiforme*, *H. foliicolum*, *H. maculare*, caeteraque. Quoad habitum, figuram, dimensionem, accedit *Aylographo* pinorum DESMAZIERII (Pl. Crypt. de France n.º 294) sed satis superque differt peritheciis tenuioribus vix subramosis, nucleo paraphysibus destituto, sporidiisque.

Quod ad genus *Aylographum* a clarissima Anna LIBERTIA in Annal. scient. natural. vol. 7. p. 125 propositum, non video quibus characteribus acutioribus ab *Hysterio* distingui possit, notam e peritheciis ramosis valde fallacem esse, nec ad fulciendum genus sufficere, hujusmodi exemplis compluribus comprobatum est, character signis adest, in structura perithecorum dimidiatorum sed hic pariter communis *H. foliicolo*, *H. Hederac*, *H. culmigeno* etc.

Num hinc reducendum sit *Aylographum Hederac* LIBERTIAE (peritheciis amphigenis, atris, sparsis, elongatis, subrectis, simplicibus, raro furcatis DESMAZ. in Annal. scient. natural. vol. 13. p. 189) in utraque pagina foliorum *Hederac*, *Ilicis*, et *Laurocerasi* proveniens, dijudicare nequeo.

EXPLICATIO ICONIS III.

1. Perithecia nonnulla lente aucta: *a.* e sicco arcte clausa: *b.* humecta, aperta.
2. Perithecia verticaliter secta, aperta, ad augm. idem.
3. Portio nuclei ad augm. 700 diametr.
4. 5. Ascus, et sporidia ad augm. 1000 diametr.

MICROTHYRIUM.

DESMAZ. Crypt. nouvell. in Annal. scient. natnr. vol. 15. p. 137. tab. 14. fig. 1
et Pl. Crypt. de France ed. 2. n.º 492.

Perithecium superficiale, dimidiatum, scutiforme, celluloso-subfibrosum, cellulis radiantibus, membranaceum corneumve, poro vertice perforatum: asci fixi, sporidia simplicia septataque octo foventes. DNTS.

4. *MICROTHYRIUM SMILACIS* DNTRS.

Ad ramos *Smilacis asperae* et *mauritanicae* emortuos in Sardinia, Liguria frequens, toto anni tempore.

Præbet oculo inermi maculas punctiformes discretas, plus minusve numerosas vel passim invicem confluentes in maculas fere atramentosas amorphas, ramos undique conspurcantes. Perithecia superficialia, laeviter adnata, dimidiato sentiformia, orbicularia, margine minute erosodenticulata, convexiuscula vel interdum depressa, umbilicata subpatellariaque, rugulosa, nigerrima, opaca, vertice papillata, poroque minutissimo pertusa, discreta vel huc illuc invicem connata, et tunc figura admodum varia, convexa, subundulata, crebre papillata, porisque binis pluribusve perforata, prouti e binis pluribusque individuis invicem confluentibus composita. Perithecia quoad structuram penitiorem crassiuscula, fere cornea, fragilia, ambitum versus tenuiora, pellucida, cellulis plerumque linearibus, vel cuneatis, e centro-radiantibus fere imbricatis contexta. Nucleus subgelatinosus, hyalinus, ex ascis e basi vix attenuata, ovatis, obovatisve apice rotundatis, sporidiis octo foetis. Sporidia subbiserialia ovata, simplicia, pallide citrina.

Quamvis hic pulcherrimus fungillus structura perithecii cornei potiusquam membranacci a genere *Microthyrio* celeberr. DESMAZIERII, hucusque monotypo, recedat, tamen sejungendum esse, ut primitus constitueram, non censeo. Ex eo quod penitiori structura omnino congruit cum planta a clarissimo viro descripta et in collectione plantarum Cryptogamicarum Galliae edita; quod restat unicum discrimen e Sporidiis, adhuc dubium num valeat in hoc ordine ad distinguenda genera nam persaepe in speciebus peraffinibus diversissima inveniuntur, prouti videre est in *Sphaeriis*, *Dothideis*, *Hysteriis* etc. hinc malui characterem a cl. viro propositum paululum reformare, quam novum condere genus. Paraphyses desunt in utraque specie, at haec organa tam pauci in praesenti casu, faciunda esse existimo, quod si in posterum novae *Microthyrii* species detegerentur, nucleo ascigero-paraphysiphoro instructae, nentiquam separandas esse pariter contenderem.

Hoc genus analogum esse *Leptothyrio* (KUNZE Mycol. Heft. 2. p. 79), *Actinothyrio* (KUNZE l. c. p. 81. tab. 2. fig. 3), *Sacidio* (NEES in KUNZE l. c. p. 64. tab. 2. fig. 2) et *Leptostromate* (FRIES Syst. Mycol. 2. p. 597),

unicuique facile patet, ab omnibus vero apprimè distinguitur structura nuclei, qui in citatis tantum *Sporidigerus* nec *aseigerus*.

EXPLICATIO ICONIS IV.

1. Frustulum ramuli exhibens plantam naturali magnitudine.
2. Eadem lente auctae.
3. Perithecium e pluribus compositum, lente valde auctum, adversus lucem foraminulis pluribus pertusum.
4. Perithecia verticaliter secta, lente visa.
5. Portiunculæ peritheciæ ad augment. 400 diametr. exhibentes figuram et dispositionem cellularum perithecia ipsa constituentium.
6. Portio nuclei ad augm. 400 diametr.

DIPLODIA

FRIES in lit. ad cl. MONTAGN. (cf. *Annal. scient. natural.* vol. 1. p. 302),
 DESMAZ. Note sur les Cryptog. l. c. tom. 10. p. 311, et *Plant. Crypt.*
de Franc. ed. 2.^a n.º 288.

Sporocadus CORDA?? ex MONTAGN. *Ess. hist. naturel. des Champign.* p. 34.
Sphaeriarum species AUCTORUM.

Perithecium sphaeroidem vertice ostiolo papillari vel punctiformi, aut cylindracco plus minusve evoluto, apertum; asci nulli, sporidia majuscula, oblonga, ellipticave primum pedicelli ope affixa, vel subsessilia, dein libera secedentia, simplicia, 2-3-plurilocularia sporidiolis farta. DNTRS.

Perithecia simplicia, discreta, vel confluentia, stromate gemino, in speciebus hucusque cognitis, prorsus nullo, plerumque, primitus saltem, hypophloeodea.

Genus a clarissimo FRIESIO in literis ad clariss. MONTAGNE l. c., hisce verbis circumscriptum, *asci elliptici, oblongi, didymi, sporidiis binis referti*, jam nunc reformandum esse persensit clariss. DESMAZIÈRES in *Plant. Cryptogam.* collectione citata, revera sporidia *Diplodiarum* mea quidem sententia asci haud dici merentur, nec desunt species sporidiis tantum unilocularibus instructae.

Sporidia si a primordio ad maturitatem usque pedetentim sequuntur, haec notatu digna praebent. Sporidium unumquodque, sive simplex sive compositum, constat primum sacculo membranaceo (Episporium) homoganeo, uniloculari, diaphano, basi in pedicellum plus minusve evidentem attenuato, nucleum pallide flavidum, grumosum fovente. Nucleus iste sensim sensimque fuscescit, inspissatur, ut ita dicam, homogeneus fit, vel in lobos inaequales extenditur, eo pacto ut limbus pellucidus, qui nucleum ipsum circumdat, et existentiam episporii vel membranae externae evidentissimam facit, postremo demum penitus evanescit, et sporidia nuice in endosporio, vel membrana interna consistere videntur. Quae sive simplex exstet, sive in articula bina invicem juncta, septoque e duobus faciebus articularum ipsorum inter se cohaerentium interstineta, vel in loculamenta pluria super imposita, vel quocumque alio modo disposita, abeat, tamen semper tenuis, subdiaphana, rigida, fragilisque, sub pressione utenique laevi facile laceranda. Adhuc dijudicare nequeo, utrum cavitas loculorum in sporidiis pluri-septatis, massam homogineam foveat, vel vacua sit, vel demum, si articuli quique pro sporidiolis habendi sint.

In cavitate loculorum sporidiorum, simplicium vel didymorum, pluries vidi corpuscula Sphaerica, bina, plurave, subinde fere bulla aëri-formi inclusa, quae certo certius pro sporidiolis considerata. Haec vero in eodem individuo varia, et inter auxilia diagnostica minime recipi posse saltem pro tempore censeo.

Diplodiae species, caeterum, praeter characteres e structura sporidiorum, facile dignoscuntur figura perithecii et crescendi modo, quin imo dispositionem specierum, lucusque mihi cognitarum, hisce notis superstruo.

I. Diplodiae, peritheciis cortice seccidente tandem liberis, denudatis.

Diplodia polymorpha.

Diplodia seriata.

II. Diplodiae, peritheciis subtectis, discretis, confluentibusque,

Diplodia mutila.

Diplodia profusa.

Huc porro divisioni reducendae sunt species sequentes huc tantum exempli gratia citatae.

Diplodia Ilcis DESMAZ. Pl. Crypt. ed. 2. n.º 288.

Diplodia viticola DESMAZ. l. c. n.º 289.

Sphaeria sarmentorum FRIES Scler. Succ. n.º 28.

Sphaeria semitecta Padacis FRIES l. c. n.º 313.

Sphaeria mammillana minor FRIES l. c. n.º 397.

Sphaeria sepincola Rosarum secund. specimen clariss. SOMMERFELT ab amiciss. AUNIER communicato.

III. Follicolae.

Diplodia Taxi.

Diplodia Oleae.

Huc subjungenda: *Sphaeria atrovirens* Visci, ex specimine a clariss. et mihi amicissimo Prof. KUNZE.

Sphaeria Hederae Sow. — DNTRS Micr. ital. Dec. II. n.º 5. ic. V.

5. DIPLODIA POLYMORPHIA DNTRS.

Sphaeria taphrina FRIES? Syst. Mycol. 2. p. 464.

Ad Lonicerae ejusdam ramulos in monte Cenisio, legerunt DD. LISA et BONNAZ, aestate 1838.

In ramis praecipue decorticatis eminent tubercula minuta, punctiformia, nigrave valde conspicua. Perithecia prinitus tecta, mox cortice secedente nuda, libera, ligno candicante denudato, longitudinaliter rimuloso, basi applanata laeviter immersa, libera, sparsa, rarissime approximata, vel in parvas greges conferta, sphaeroidea, conicave, elliptica, vel compressiuscula, rugulosa, fusco-atra, fragilia, tenuia, sub vitro structurae fere grumosae, vertice ostiolo minuto papillaeformi, vel poro tantum sat amplo pertusa, senio irregulariter rupta, in sicco fere immutata. Nucleus pallide-fuscescens, exsiccatione contractus, fere evanescens. Sporidia juniora pedicello brevi, crasso, perithecio parietibus affixa, elliptica subclavatave, matura secedentia, ovata, oblonga, ellipticave, bi-tri-pluriseptata, articulis septis transversis interdum ramosis conjugatis, e pallido fuliginea, pellucida.

Pluribus convenit species haec insignis cum *Sphaeria Taphrina* FRIESII, sed haec mihi haud visa, nec fructificatione cognita eandem identitatem statuere nequeo. A *Sphaeria seminuda*, picastra, quae *Taphrinae* analogae ex FRIESIO l. c. toto coelo diversa, ut a *Sphaeria Lonicerae* et *Xylostei* quae hic tantum citantur quia in Loniceris proveniunt.

EXPLICATIO ICONIS V.

1. Frustulum ramuli exhibens plantam naturali magnitudine.
2. Peritheec. aliquot lentis ope amplificata.
3. Peritheec. aliquot verticaliter secta ad idem augm.
4. 5. Fragmentum nuclei, sporidia juniora exhibens ad augment. 1000 diametr.
5. Sporidia matura ad augm. 1000 diametr.

6. DIPLODIA SERIATA DNTRS.

Ad sarmenta sicca Rubi fruticosi, circa Augustam Taurinorum, legi autumno 1837. Rara.

Minutissima, sed ob dispositionem seriatam etiam sine vitri auxilio conspicua, sub forma lineolarum nigrarum continuarum vel interruptarum, dummodo epidermide jam decussa se prodeat. Perithecia sphaeroideo-depressa, basi applanata, vertice papillata, laevia, atrò-opaca, siccando collapsa, valde varia, vertice punctiformi impressa, vel umbilicato-umbonata, corrugatae, aut compressa, in series lineares secus strias corticis parallelas disposita, nunc arcte contigua, nunc remotiuscula, primum transversim epidermidem qua arcte teguntur, varie ruptam erumpentia, demum nuda, passim libera, ostiolo papillaeformi minutissimo sed facile conspicuo praedita. Nucleus albicans, sporidia juniora pro more pedicellata, pedicello longitudine vario, demum libera secedentia, elliptica, oblonga, ovatae, unilocularia margine pellucido cincta, saturate badio-fuliginea. Sporidia repetitis vicibus, vitris acrioribus inspecta, vestigia dissepimenti mediani imperfecti mihi obtulerunt, nunquam vero bilocularia vidi.

Huic analoga quod ad peritheeciorum formam et dimensionem videtur *Sphaeria complanata* β . minor FRIES, sed structura nuclei valde differt; in hac enim adsunt sporidia minutissima cylindroidea fere Perisporii, simillima illis quae in *Sph. herbarum* varietate ad Perisporium disseminatum in praecedenti decade dubitanter relata observavi. Caeterum nostra ad caulicolas FRIESII non spectat.

EXPLICATIO ICONIS VI.

1. Perithecia lente aucta, Icon exhibet figuram peritheeciorum diversa aetate, nec non eorundem dispositionem.
2. Perithecia epidermide adhuc tecta, ad sectionem verticalem visæ, lente pariter aucta.
3. Particula nuclei ad augm. 700 diametr.
4. Sporidia ad augm. 1000 diametr.

7. DIPLODIA MUTILA FRIES.

FRIES et MONTAGN. Annal. scient. natur. 1. p. 302. tab. 13. fig. 7.
 Sphaeria mutila FRIES Syst. Mycol. 2. p. 424, et Scler. Suec. n.º 164. a.

In ramis Populi nigrae dejectis, Genuae vere 1842.

Nudo oculo observantur in ramulis puncta nigra minuta plus minusve numerosa. Perithecia entophloeodea, stromate nigrescente tenui supra corticem interiorem, veluti pictura fuligineo-atra, maculaeformi effuso passim confluyente insidentia, epidermide primum tecta, demum hac longitudinaliter vel laciniatim fissa, erumpentia, sparsa discreta, vel hinc inde approximata, sed tegmine epidermico inter se distincta, subinde etiam confluentia, binis, tribus, pluribusque, simul epidermide cinctis, sphaeroidea, conoideave, atra, opaca, rugulosa, vertice ostiolata, ostiolo papillaeformi valde prominulo, in sicco collapsa, parum prominentia, demum rupta, grumos amorphos parce sistentia. Nucleus albidus, sporidia juniora breviter pedicellata, oblonga, obovata, clavataque, matura libera septo transverso mediano constricto-didyma, articulis subrotundis, altero plerumque minore, fusco-fuliginea.

EXPLICATIO ICONIS VII.

1. Perithecia lente aucta.
2. Eadem verticaliter secta.
3. Eadem a latere visa.
4. Particula nuclei et sporidia perfecta, ad augm. 400 diametr.

8. DIPLODIA PROFUSA DNTRS.

Ad virgas quibus plantae suffuleiuntur in Horto Botanico Genuensi, vere 1842.

Sistit pustulas parvas, atras, sparsas, ramos undique circumambientes, vel per plagas effusas. Perithecia cortici interiori basi innato-immersa, solitaria stromate tenui effuso insidentia, vel simul juncta gregaria, epidermide varic rupta gregatim erumpentia, sphaerica, fusco-atra, rugulosa, opaca, vertice convexa, ostiolo punctiformi minimo pertusa, siccando corrugata, vel vertice depressa. Nucleus albidus. Sporidia juniora pedicellata, pedicello longitudine vario, subinde sporidiis ipsis longiore, demum libera ovoidea, utrinque rotundata, unilocularia, fusco-fuliginea, sporidiolis farta.

Priori affinis, tum structura peritheciæ, tum erumpendi modo, cum indole stromatis, statim vero distinguitur peritheciis magis prominulis, ostiolo punctiformi impresso pertusis, sporidiisque unilocularibus. Homonyma *Sphaeria profusa* FRIES est planta ab hac longe diversa.

Cum hac specie in eadem matrice, observavi fungillum ruhrum tubercularioideum, eodem ferme modo erumpentem, verosimiliter pro abortu hujusce specie ipsius habendum, et tuberculariis illis adnumerandum, quae meo sensu nil aliud praeferunt quam *Sphaerias inversas*.

EXPLICATIO ICONIS VIII.

1. Perithecia nonnulla lente aucta.
2. Eadem secta, ad augm. idem.
3. Particula nuclei una cum sporidiis perfectis, ad augm. 400 diametr.

9. DIPLODIA TAXI DNTRS.

Sphaeria Taxi SOWERB. cum ic. ex FRIES Observat. Mycol. 1. p. 183.

Syst. Mycol. 2. p. 500. Sclerom. Succ. n.º 22. DUBY Bot. gall. p. 705.

BERKEL. Brit. Fung. p. 272.

Cryptosphaeria Taxi GREVILL. SCOTT. Cryptog. Fl. tab. 13.

Ad folia dejecta *Taxi baccatae*, etiam in ramulis tenuioribus, Taurini in R. Horto Botanico, ant. 1838.

Puncta minutissima fusciscentia vix nisi lentis validae ope percipienda praebet. Perithecia hypophloeodea sine lege sparsa, rarius per paria aut majori numero approximata, sphaerica, primum epidermide omnino tecta, supra foliorum disemum parum prominentia, haec demum varie fissa, verticem obtusiusculum exporrigentia, subastoma, poro tandem aperta vel varie diffracta, in sicco collapsa, subumbilicata. Nucleus albidus mollis gelatinosus e sporidiis pedicello brevi primum affixis, demum liberis, lineari-oblongis, apicibus rotundatis, septo unico bilocularibus, loculis aequalibus, badio-fuligineis.

Species adspectu subinde varia, si perithecia epidermide varie fissa, vertice ut pro more denudato prominent, tunc astoma, saltem ostioli vestigium numquam offendere potui, si vero adversus epidermidem tenuatum protuberant, tunc videntur poro albicante pertusa; sed hoc pendet ab epidermide ipsa, nec a gemino ostiolo. Hinc parvi facienda videntur quae de ostiolo hujusce speciei acutissimus FRIESUS monuit in observationibus l. c. et eo magis quod in systemate haec omnia omisit. Clariss. BERKELEY tantum dicit, *at length piercing the epidermis by a pore*. Doleo valde quod ad manus non sit Icon SCOTT. Crypt. Florae superius adducta.

EXPLICATIO ICONIS IX.

1. Fragment. folii exhibens perithecia lente aucta.
2. Eadem verticaliter secta.
3. Sporidia et nucleus ad augm. 400 diametr.

10. DIPLODIA OLEAE DNTRS.

Sphaeria Oleae DC. Fl. fr. 6. p. 136. FRIES Syst. Mycol. 2. p. 489.

DUBY Bot. gall. p. 704. BALS. et DNTRS Enum. in Bibl. ital. tom. LXIV. n.º 57! MONTAGN. Crypt. novell. de France in Annal. scient. natur. 1. p. 342 (excl. forte variet. *b.* et *c.*). MORIS et DNTRS Fl. Capr. in Act. Acad. R. Scient. Taurin. Ser. 2. vol. 2. p. 277!

Ad folia Oleae dejecta passim, Gennae, Nicaeae, in Sardinia, ad Larium, ad Verbanum, toto anni tempore.

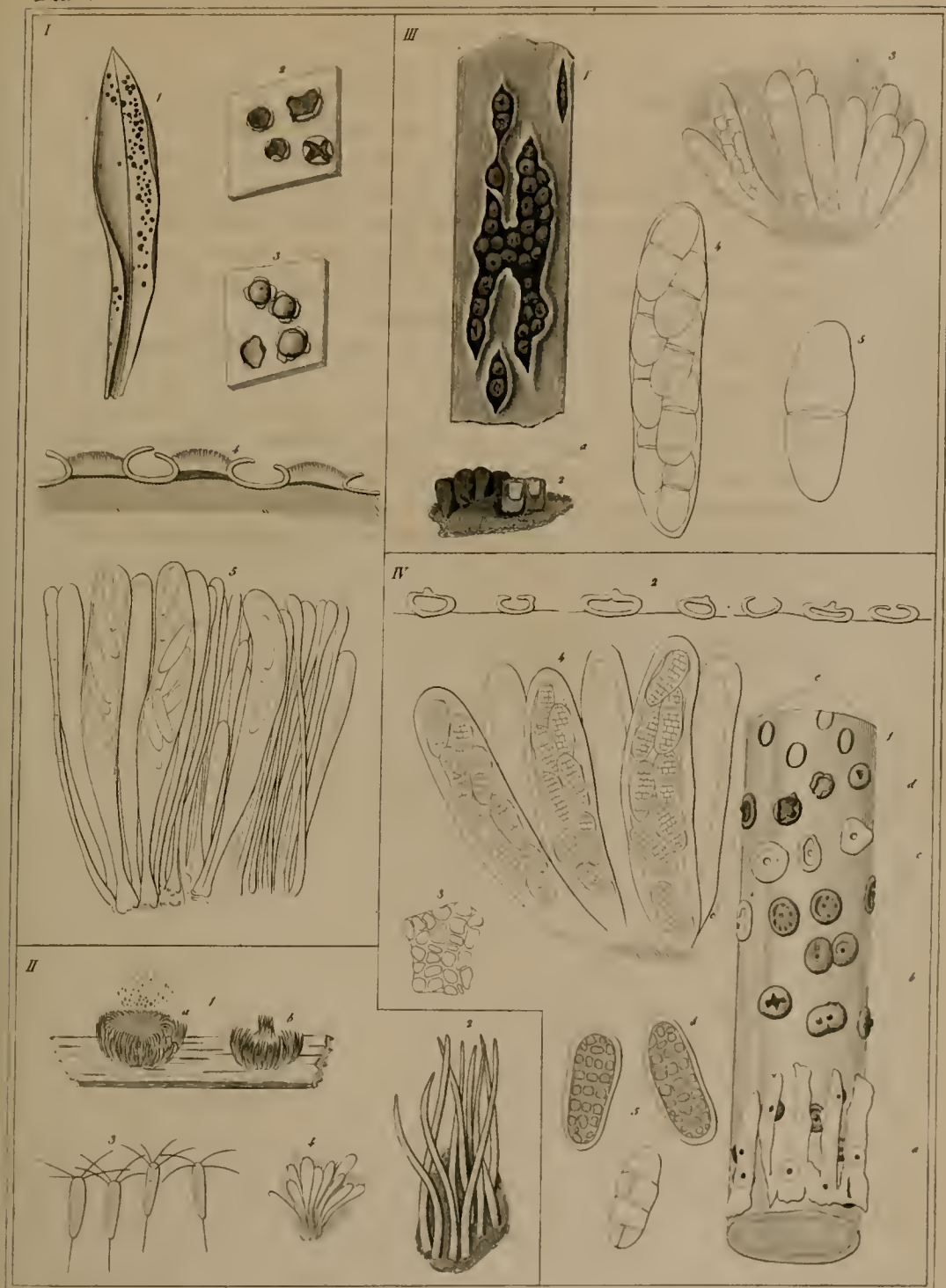
Species jam jam simplici attactu dignoscenda, folia enim quae eam alunt ob ostiola rigida valde protuberantia scaberrima evadunt. Nudo

oculo sistit puncta creberrima, nigerrima, nunc in utraque foliorum pagina, nunc in superiore vel inferiore tantum. Perithecia sparsa plus minusve distantia, hypophloeodea, basi in parenchymate foliorum plus minus alte immersa, e basi ovata, subrotundaque in ostiolum conoideo-truncatum majusculum desinentia, interdum ullo constricta suburceolata, epidermidem perforantia, rigida, cornea, superficie rugulosa, scabra, opaca. Ostiolum valde prominens, quandoque sulcis anularibus exaratum, ore bi-tri-quadridentatum, dentibus ovatis, acutis, pellucidisve, fragile facile decussum. Nucleus albidus in sicco collapsus. Sporidia primitus sessilia, matura libera, lineari oblonga, utrinque rotundata, sporidiola quatuor soventia pallide flavicantia.

Diplodiarum foliicolarum pulcherrima, notis expositis a congeneribus facillime dignoscenda.

Cl. MONTAGNE asserit se in foliis Nerii et Phillyreae in Gallia australiori hanc speciem invenisse, ipse in plantis adductis nunquam observavi, sed cum Phillyreae foliis, in Sardiniae nemoribus, legi fungillum punctiformem nigrum, facie huic analogum sed valde diversum sporidiis utrinque setula subulata candatis, ferme ac in Phlyctidio meo clypeato: in proxima decade locum habebit.

Dec. 3^a



L. M. del

I *Stelis Olea*

II *Exocypula ornata*

III *Sphaeria - Pinus*

IV *Sphaeria - Pinus*

L. M. del





T. M. del.

Ex. Bot. an.

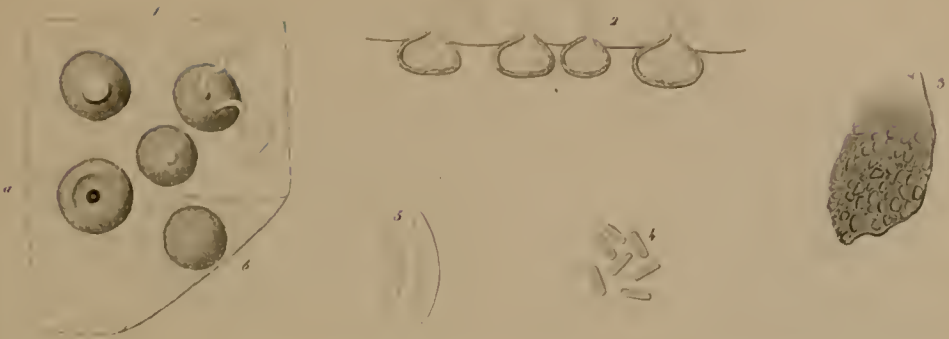
I *Hypsterium diviso*

VI *Leptostroma hyalerum, graminicolum*

VII *Phycetium clypeatum*



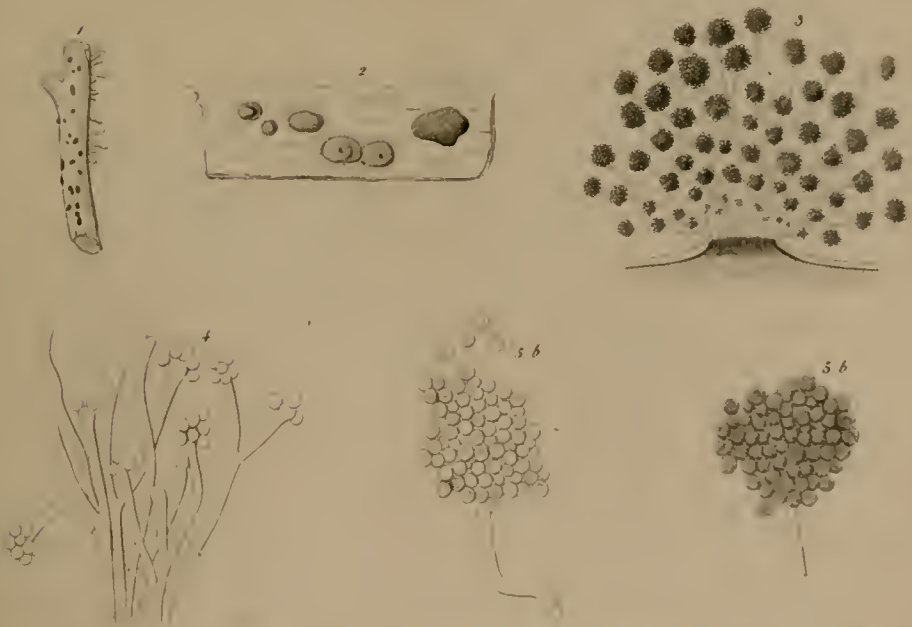
VII



IX



X



G. M. det.

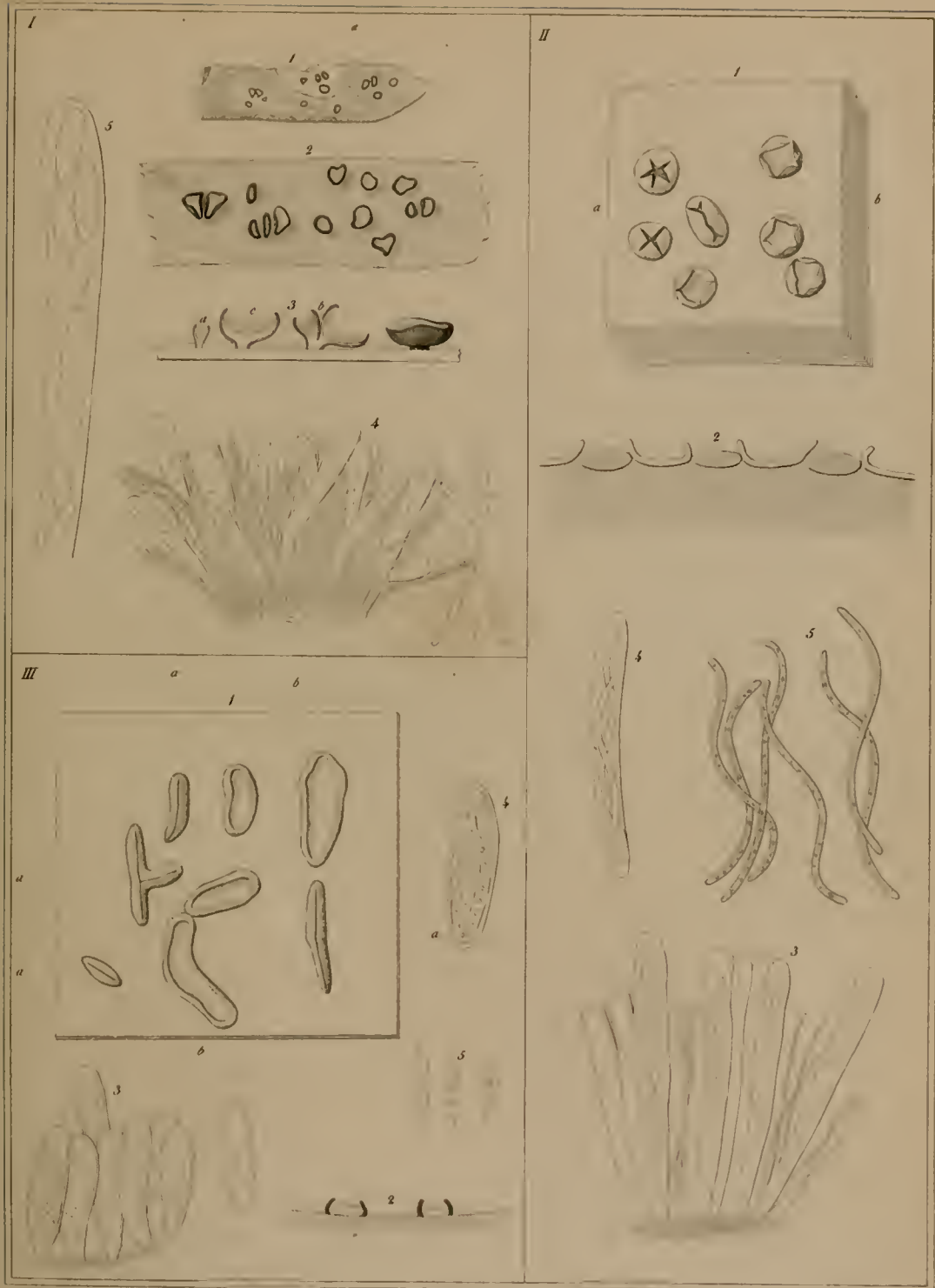
VIII *Sphaerocoma elegans*

G. M. det.

IX *Sphaerocoma fovea*

X *Hypocystum heliostictum*





I *Pityzo Canarium*

II *Hetero Panizzei*

III *Hystericum micrographum*



II

I



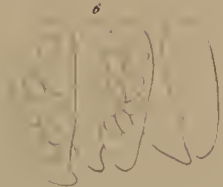
13



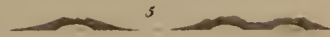
2



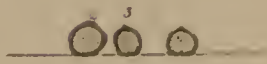
2



14



5

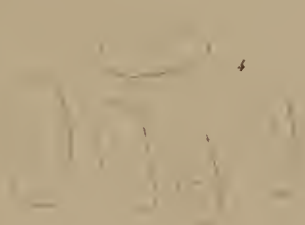


3

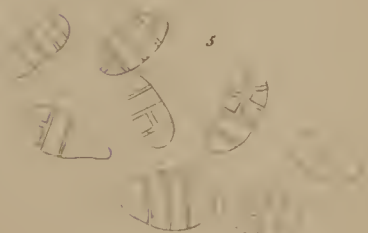
17



1



4



5



3



4



2

II. II. da

II. II. da

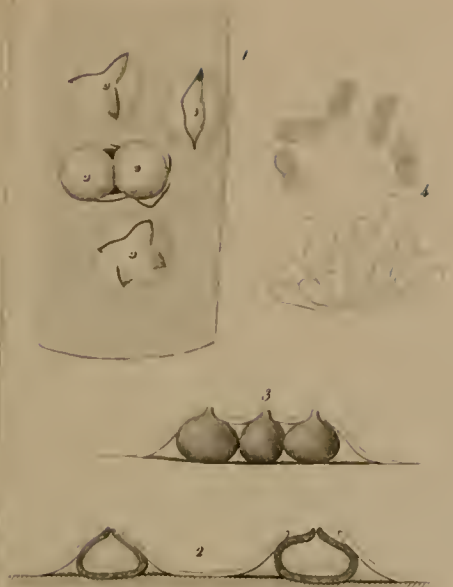
IV *Microthyrum imitans*

V *Diptodia polymorpha*

VI *Diptodia serotina*



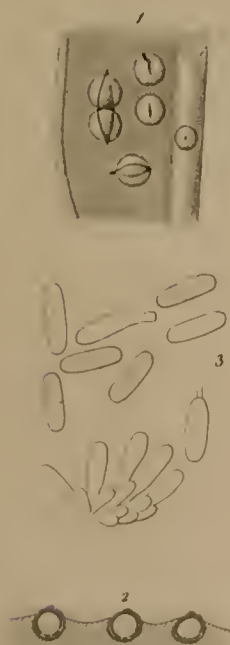
VII



VIII



IX



X



Dec. 42

VII *Diptera mutica*

IX *Diptera Favi*

VIII *Diptera propaga*

X *Diptera Cleve*

Dec. 42



OBSERVATIONS

SUR LES GRÊLES TOMBÉES EN 1840

DANS LES ÉTATS DE TERREFERME DE S. M. LE ROI DE SARDAIGNE

D'APRÈS LES RENSEIGNEMENTS RECUEILLIS

PAR LA COMMISSION SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE

PAR

M^r DESPINE

Lues dans la séance du 12 février 1843 ().*

Considérations préliminaires

Dans le nombre des météores qui troublent l'état habituel de l'atmosphère, celui de la grêle est certainement l'un des plus redoutés par sa fréquence et par le dommage qu'il occasionne aux territoires qui en sont frappés.

Aussi les causes qui peuvent donner lieu à sa formation occupent depuis longtemps l'attention des Physiciens. Plusieurs théories plus ou moins ingénieuses ont été par eux mises en avant pour en donner l'explication, sans qu'ils aient pu toutefois réussir à éclairer complètement ce point obscur de la Science météorologique.

(*) Voir dans la Notice historique des travaux de la Classe, imprimée au commencement du Volume, le rapport des Commissaires sur ce mémoire.

La Commission Supérieure de Statistique, nommée par S. M. et présidée par S. E. le Ministre de l'Intérieur, ne pouvait manquer de faire quelques recherches à ce sujet. Les renseignements qu'elle a recueillis et qu'elle se propose de publier sur les grêles tombées en 1840 dans les États de terreferme ne sont pas sans intérêt pour la science et peuvent, selon moi, aider à la solution du problème. J'ai donc cru utile d'en signaler les principaux résultats à l'Académie Royale de Turin, dont les travaux ont déjà si puissamment contribué à l'avancement des connaissances physiques.

Mais pour faciliter la comparaison des faits recueillis par la Commission avec les différentes théories de la grêle publiées jusqu'à ce jour, il me paraît indispensable de rappeler d'abord brièvement les opinions des divers Auteurs. C'est pourquoi, je diviserai en trois parties la présente notice : dans la 1^{re}, je présenterai un aperçu rapide des systèmes par lesquels les Physiciens ont voulu expliquer la production de la grêle ; dans la 2^{me}, le résumé des résultats extraits des documents de la Commission Supérieure de Statistique ; enfin dans la 3^{me}, les conséquences qui me semblent pouvoir être déduites de ces recherches.

I^{ÈRE} PARTIE

OPINIONS DES AUTEURS SUR LA FORMATION DE LA GRÊLE

Avant VOLTA, plusieurs solutions avaient été proposées pour expliquer l'origine et le grossissement des grêlons. Ainsi DESCARTES supposait les nuages grêleux composés de parcelles de neige ou de glace qui se fondent à demi, se réunissent et doivent à la présence d'un vent froid leur congélation complète (1). MUSCHENBROECK pensait que des atomes frigorifiques répandus dans l'air déterminent la congélation des gouttes de pluie (2). HAMBERGER prétendait que la partie supérieure d'un nuage empêchant celle inférieure de recevoir les rayons du soleil, celle-ci se

(1) Tract. de météor. cap. 6.

(2) Essais de physique, T. 2 ch. 39.

refroidit assez pour que les gouttes d'eau dont elle est composée se changent en glace (1). DE MAIRAN l'attribuait au passage des vapeurs aqueuses dans un air agité (2). Enfin GUYTON-MORVEAU croyait que les grêlons doivent leur origine à l'évaporation d'une portion de l'eau qui enveloppe les vésicules constituant les nuages, et qu'ils prennent ensuite de l'accroissement en traversant les couches atmosphériques inférieures.

VOLTA, reconnaissant l'insuffisance de ces théories, tenta d'expliquer le phénomène par les seules forces électriques. En admettant l'opinion de GUYTON-MORVEAU pour la formation de l'embryon de grêle, il ajouta que si deux nuages électrisés diversement venaient à se superposer, les molécules gelées subissant des attractions et des répulsions électriques, elles exécuteraient du nuage inférieur au nuage supérieur un mouvement de *va et vient* ou de *navette* analogue à la *danse électrique* qui déterminerait l'accroissement de leur volume jusqu'à l'instant où leur poids surmontant les forces électriques, elles tomberaient sur le sol (3).

Cette dernière théorie, toute ingénieuse qu'elle est, a été vivement combattue par divers savants, surtout par M^{rs} ARAGO et BELLANI. Ils ont observé : que si la formation des premiers rudimens de la grêle était le résultat de l'action solaire, une grêle qui tomberait le matin (comme celle de juillet 1806 en Italie) aurait dû osciller 10 à 12 heures entre les deux nuages, temps pendant lequel les décharges électriques eussent altéré mille fois l'équilibre nécessaire à la suspension des grêlons ; que l'évaporation produite par cette action solaire rendrait les grêles bien plus fréquentes qu'elles ne le sont en été ; que la mobilité et la division des couches nuageuses ne pouvaient produire le même effet que des disques métalliques immobiles, et que le mouvement des grêlons devrait cesser, comme il arrive dans la danse électrique, en substituant une nappe d'eau à la plaque inférieure ; que ce mouvement oscillatoire des grêlons n'avait jamais été aperçu ; qu'il faudrait une puissance électrique énorme pour soulever des grêlons de demi-livre ; qu'enfin l'ascension de ces grêlons, qui forment entre les deux nuages une chaîne

(1) Éléments de physique N.º 520.

(2) Encyclopédie, art. Grêle p. 627.

(3) Journal de physique, 1809. V. 69.

de communication, devrait produire des décharges électriques qui n'ont pas lieu (1).

La question n'étant donc pas jugée résolue, plusieurs Sociétés savantes, la Société Agraire de Turin en 1820, la Société de Halle en 1821, la Société de Lausanne en 1826, appelèrent de nouveau sur elle l'attention des Physiciens. L'Académie des Sciences de Paris la mit elle-même au concours en 1830 pour le grand prix qu'elle devait décerner en 1832; et, dans son programme, elle demanda une théorie appuyée non seulement sur des faits étudiés dans les régions mêmes où se forme la grêle, mais encore sur les connaissances physiques concernant le rayonnement de la chaleur, la température de l'atmosphère à différentes élévations, le froid qu'engendre l'évaporation, l'électricité etc.; elle exigea, de plus, que cette théorie expliquât la constitution des grêlons, leur volume souvent considérable, les saisons de l'année et les époques du jour où le phénomène se produit. Mais aucun Mémoire n'ayant été jugé digne du prix, la question fut de nouveau reproduite pour 1834 et tout aussi inutilement, en sorte qu'elle fut alors définitivement retirée du concours.

Toutefois l'intérêt qu'avaient manifesté les Sociétés savantes pour trouver une explication de la formation de la grêle continua à porter ses fruits; les physiciens de tous les pays s'empressèrent de signaler les faits par eux recueillis, et d'en déduire les conséquences qu'ils croyaient tendre à la solution du problème. Je citerai, parmi les plus remarquables :

1° L'opinion de M^r DENISON OLMSTED de Newhaven (Connecticut). Dans un Mémoire sur les circonstances et les causes des orages de grêle, ce Professeur, après avoir rappelé l'absence de ce météore dans la zone torride où cependant les autres phénomènes électriques sont si violents, croit devoir l'attribuer à la congélation de la vapeur aqueuse d'une masse d'air chaud et humide par le mélange brusque de cette masse avec un vent excessivement froid dans les hautes régions de l'atmosphère. Dans ce cas, la vapeur aqueuse du courant chaud sera congelée avec une intensité proportionnelle à la température du courant froid, et les grêlons descendront en condensant autour d'eux une épaisseur de glace

1) Ann. des longitudes, 1828 Giorn. di fisica di Pavia, V. 10. p. 359.

d'autant plus grande que la descente sera plus longue, et le milieu traversé plus humide (1).

2° Celle de M^r Ch. LECOQ de Clermont.

Dans deux orages arrivés les 28 juillet et 2 août 1835 à Clermont et sur le Puy-de-Dôme, M^r LECOQ a observé, que la grêle avait eu lieu à la suite de la superposition de deux couches de nuage poussées par les deux vents, Sud et Ouest; que les grêlons, une fois formés, étaient doués d'une grande vitesse horizontale et poussés par un vent très-froid; qu'ils avaient l'aspect d'un ellipsoïde dont les extrémités du grand axe portaient seules des indices de prismes hexagonaux terminés par des pyramides à six faces; que leur noyau était de grésil blanc, opaque et fibreux, recouvert de plusieurs couches de glace d'autant plus épaisses et plus dures qu'elles s'approchaient de la circonférence; que le nuage inférieur qui semblait soutenu par la puissance électrique du nuage supérieur se trouvait presque entièrement formé de grêlons soumis à un tourbillonnement remarquable dans la partie antérieure du nuage; que le bruit qui précédait la grêle était dû à la vitesse des grêlons, lesquels présentaient tous un mouvement de rotation très-rapide; enfin que l'eau, provenant de la grêle, contenait des chlorhydrates et des sulfates (2).

D'après ces faits, il a pensé que la grêle se formait pendant les vents d'impulsion et non d'inspiration; qu'il fallait le concours de deux couches de nuage et de deux vents différens; que l'accroissement des grêlons était dû à ce que l'extrémité du nuage grêleux pénétrant dans un air chaud, congelait une partie de l'eau en volatilissant l'autre, et formait des couches successives autour du noyau; que cette opération se répétait plusieurs fois, le nuage grêleux étant soutenu par l'affinité électrique du nuage supérieur et par la résistance de l'air; que le nuage inférieur augmentant de densité s'éloignait peu à peu du nuage électrisé, et lorsque l'action de celui-ci était devenue presque nulle, les grêlons électrisés de la même manière se repoussaient entr'eux en présentant le tourbillonnement qui chassait les grêlons dans tous les sens;

(1) Bibl. Univ. de Genève, 1830. V. 44. p. 364. — American Journal of Science, T. 28. avril.

(2) Ann. de chimie et de physique, V. 61. p. 202. février 1836. — Bibl. Univ. de Genève, 2^e S. V. 3. p. 217. juin 1836.

mais que le vent du Sud inférieur réunissait ceux-ci en leur imprimant la même direction vers le Nord.

3° Celle de M^r A. DE-LA-RIVE, de Genève.

M^r DE-LA-RIVE est d'avis, que la grêle, au lieu de devoir directement ou indirectement son origine à l'électricité, dépend plutôt de la même cause qui donne lieu au développement de celle-ci (1). D'après cet auteur, la propagation de la chaleur dans les corps étant toujours accompagnée d'un dégagement d'électricité, une différence de température entre les divers points d'un corps en rompra l'équilibre électrique naturel. Or, la température d'une colonne d'air diminuant depuis le sol jusqu'aux limites de l'atmosphère; et cette colonne recevant son état calorifique, non des rayons solaires qui la traversent, mais de la chaleur émanée de la terre, elle doit se trouver chargée d'une électricité positive, augmentant de bas en haut, tandis que l'électricité négative est absorbée par la terre. Si un nuage vient à s'interposer entre la colonne, la distribution de la température et l'état électrique changeront. La chaleur terrestre sera renvoyée vers la terre (ce qui occasionne la chaleur étouffante dont sont précédés les orages), tandis que la partie supérieure du nuage se refroidira d'autant plus que le nuage sera plus épais. Les deux couches de nuages deviendront par cette différence de température électrisées diversement, et, si le vent les sépare, l'atmosphère se trouvera remplie de nuages animés d'électricité différente. En outre, dès que la température supérieure sera assez basse pour congeler les gouttes d'eau du nuage, les grêlons se formeront et se grossiront ensuite en solidifiant les vapeurs qu'ils traverseront. Ainsi la même cause tendra à favoriser et l'accumulation de l'électricité et la formation de la grêle.

4° Celle de M^r l'Abbé GENEVOIS, de Turin.

Dans le second Congrès scientifique italien, tenu à Turin en 1840, ce physicien a reproduit une théorie qu'il avait déjà fait connaître en 1834 et 1838 (2). Selon lui, la grêle serait toujours précédée du tonnerre, et elle ne se formerait que dans certains points des montagnes,

(1) Bibl. Univ. de Genève, 2^e Série, V. 3. p. 238, juin 1836. Notice sur la formation de la grêle.

(2) Théorie de la grêle par l'Abbé J. P. Genevois. Turin 1838. Atti della 2.^a Riunione degli scienziati italiani. Torino 1841.

qu'il appelle *les foyers de la grêle*, favorables à la compression de l'air, d'où elle serait ensuite transportée par les vents sur d'autres territoires. Le choc d'un ou de plusieurs coups de foudre, en comprimant avec violence l'air contre les parois d'un col, un angle rentrant ou tout autre obstacle, lui semble suffisant pour en séparer le calorique, comme il arrive dans le briquet pneumatique, et pour produire, quand l'air revient à sa première tension, le froid nécessaire à la congélation des vapeurs et à la formation de la grêle. Ainsi la grêle serait plutôt un effet *mécanique* de la foudre qu'un effet *électrique*, et elle pourrait être prévenue à l'aide de plantations faites dans toutes les régions où se forment habituellement les nuages grêlex, lesquelles empêcheraient la production de la foudre, ou la compression de l'air qui la suit.

5° Celle de M^r FOURNET, de Lyon.

Eufin, dans le 9^{ème} Congrès scientifique de France, tenu à Lyon en septembre 1841, M^r le Professeur FOURNET, comparant les observations par lui faites sur les brises qui ont lieu le jour et la nuit autour des montagnes (1), sur l'influence que la superposition de deux vents, l'un méridional et l'autre septentrional, apportait à la température, et sur la distribution géographique des orages dans le Lyonnais, a pensé pouvoir en déduire la cause de la formation des grêles comme de celle des orages. Selon lui, chaque cône montagneux d'un chaînon détermine, pendant le jour, des brises ascendantes le long de ses flancs et par suite des colonnes chargées de vapeur qui forment des nuages parasites autour de sa cime; si un vent horizontal pousse des nuages transversalement au chaînon, ceux-ci se combinent avec les vapeurs ascendantes et forment une série de colonnes plus chargées de vapeurs vers les cônes que dans les intervalles qui les séparent. Un vent chaud qui rase les deux versans de la chaîne, produira le même effet; c'est le cas du vent Sud-Ouest essentiellement orageux qui provient des régions tropicales avec une dose énorme de vapeurs aqueuses toujours prêtes à se condenser par le moindre refroidissement; le concours du vent du Nord inférieur ou supérieur y contribuera encore par la condensation que sa température froide occasionnera, et sa présence simultanée devra produire la déviation

(1) Des brises de jour et de nuit autour des montagnes. Ann. des Sc. de l'Acad. de Lyon. V. 3. p. 1. Actes du Congrès scientifique de France, 9^e session, V. I. p. 450.

de la marche Sud-Ouest des colonnes orageuses , les changemens subits de température en hyver, et la formation de la grêle en été. Ainsi dans le Lyonnais dont l'horizon occidental est borné par quatre chaîons (Pilat, Riverie, Iseron et les Fayes) dirigés du Sud-Ouest au Nord-Est, c'est sur les communes situées sous les bandes magenses de chaque chaîon qu'éclatent habituellement les orages et que s'exercent les ravages de la grêle.

Telles sont les différentes manières dont les physiiciens ont envisagé jusqu'à ce jour la formation de la grêle; leur énoncé fait voir que le problème est loin encore d'être complètement résolu, et on doit l'attribuer, en partie, à ce que les faits sur lesquels sont appuyées ces théories n'ont été ni assez nombreux, ni observés sur une assez grande échelle pour pouvoir en déduire des lois générales et indépendantes de toute influence de localité.

II^{ÈME} PARTIE

RÉSUMÉ DES RECHERCHES FAITES PAR LA COMMISSION SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE

Questions proposées par la Commission.

La Commission, à laquelle le Gouvernement a confié l'honorable mission de réunir tous les élémens propres à former la Statistique générale du Royaume, ne pouvait négliger ceux qui se rapportent à son état météorologique.

L'un de ses membres, M^r l'Abbé GENEVOIS, qui avait fait, comme on l'a vu précédemment, une étude spéciale de la grêle, et qui désirait arriver à la détermination des points appelés par lui *les foyers de la grêle*, l'engagea à recueillir, dans tout le royaume, des renseignemens à ce sujet. Sur sa proposition, elle transmet, par circulaire du 2 juillet 1840, à chaque

Commune un état à remplir avant la fin du mois de novembre. Cet état comprenait 5 questions formulées par M^r l'Abbé GENEVOIS, lesquelles demandaient en substance :

1^o Si la grêle avait frappé en 1840 le territoire de la Commune, et dans quel jour ?

2^o Si elle avait auparavant frappé quelque territoire voisin et quel était ce territoire ?

3^o Quelle direction avait suivie la grêle avant d'atteindre la Commune.

4^o Quelle direction elle avait suivie, après avoir frappé la Commune, en indiquant même, s'il était possible, la totalité de la ligue parcourue.

5^o Enfin, quels étaient les points d'où provenait ordinairement la grêle qui frappait la Commune ?

A mesure que ces documens ont été fournis par les Juntas provinciales, M^r l'Abbé GENEVOIS devait en faire le dépouillement ; mais étant tombé malade, je me suis chargé, après sa mort, de le suppléer dans ce travail.

Documens transmis par les Communes.

En procédant au dépouillement de ces états, dont le nombre semblable à celui des Communes du Royaume ne s'élevait pas à moins de 2712, j'ai reconnu quelques lacunes dûes surtout à ce que les Sindics de différentes provinces n'avaient pas tous attendu, comme le prescrivait la circulaire, la fin de novembre pour transmettre leurs réponses. En effet, d'après les dates desdits états, on voit que :

Ceux des provinces de Casale et Voghera ont été fournis à la fin de juillet ;

Ceux de Nice, Saluces, le Genevois et le Chablais en août ;

Ceux de Suze et Albe en août et septembre ;

Ceux de Mondovì, Faussigny et Tarantaise en septembre et octobre ;

Ceux de Aoste, Savoie Propre et Maurienne en septembre, octobre et novembre ;

Enfin ceux de S. Remo, Oneglia, Albenga, Savone, Gênes, Chiavari, Levante, Bobbio, Tortone, Acqui, Alexandrie, Lomelline, Novare,

Asti, Coni, Turin, Pignérol, Ivree, Verceil, Bielle, Pallanza et Haute Savoie en octobre, novembre et décembre;

En sorte que les 8 premières Provinces n'ont pu signaler les grêles tombées postérieurement à août ou septembre, c'est-à-dire depuis la transmission de leurs états. Mais comme ces Provinces y ont suppléé jusqu'à un certain point par les renseignemens donnés sur les grêles des années antérieures, les résultats généraux qui peuvent en être déduits ne paraissent pas moins dignes de confiance.

La Province de Novi a fait une erreur plus grave dans son envoi en transmettant l'état des grêles de 1839, au lieu de celles 1840 qui lui étaient demandées. Mais comme elle ne signale dans toute ladite année qu'une seule grêle (30 avril 1839), laquelle n'a même frappé qu'une seule Commune (celle de Cantalupo), que d'ailleurs il résulte de ses documens qu'elle est à-peu-près totalement exempte de ce fléau, cette irrégularité ne paraît pas devoir influencer sur les résultats généraux obtenus dans le Royaume.

Une autre anomalie doit encore être signalée dans les renseignemens transmis. Elle concerne les directions indiquées pour la route de la grêle hors la Commune, directions qui souvent portent sur d'autres Communes dont les territoires, d'après leur propre état, n'auraient aucunement été atteints. Cette circonstance m'a déterminé à ne considérer comme *réellement frappées de la grêle* que les Communes dont la déclaration en signalait la chute sur leur propre sol, et à me régler spécialement sur cette donnée pour l'indication de la direction que la grêle avait suivie.

Résultats extraits des documens fournis.

En ayant égard aux circonstances qui précèdent, et en coordonnant entr'eux les faits recueillis, je suis arrivé à différens résultats qui me semblent de nature à éclairer quelques points relatifs à la formation de la grêle.

Conformément au mode adopté par la Commission Supérieure pour ses publications, les grêles tombées en 1840 ont été classées, Province par Province, de manière à grouper en un seul article les Communes frappées le même jour dans l'ordre où elles ont été successivement atteintes, prenant en considération leur position réciproque, les rensei-

gneurs moyens fournis par les Communes et la direction qu'elles ont indiquée.

Mais comme il serait difficile de déduire un fait général de l'examen isolé des grêles de chaque Province, j'ai cru nécessaire de former un autre Tableau, que doit aussi publier la Commission, dans lequel j'ai réuni sous le même numéro d'ordre tous les orages arrivés le même jour dans les différentes Provinces, avec les Communes frappées sur chacune d'elles, et la direction suivie par la grêle.

L'examen des faits consignés dans ce dernier tableau conduit aux résultats que je vais signaler :

1° Pendant l'année 1840, et conformément au tableau de récapitulation ci-après, 880 Communes ont été frappées une ou plusieurs fois par la grêle, savoir :

- 143 dans les 8 provinces de Nice, San Remo, Oneglia, Albenga, Savone, Gênes, Chiavari et Levante qui forment le versant Méditerranéen ;
 - 592 dans les 22 provinces de Bobbio, Novi, Tortone, Voghera, Acqui, Alexandrie, Casal, Lomelline, Mondovì, Albe, Asti, Coni, Saluces, Pignérol, Turin, Suze, Aoste, Ivree, Bielle, Vercell, Pallanza et Novare, qui forment le versant oriental des Alpes, ou le bassin du Pô ;
 - 145 dans les 7 provinces de Genevois, Chablais, Faucigny, Savoie Propre, Haute Savoie, Tarantaise et Maurienne qui forment le versant occidental des Alpes, ou le bassin du Rhône ;
-
- 880 ensemble, lesquelles sont environ le tiers des 2712 Communes dont se compose le territoire du Royaume.

RÉCAPITULATION.

RÉGIONS	PROVINCES	NOMBRE DES COMMUNES FRAPPÉES DANS LE MOIS DE												TOTAL DES	
		Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre	Communes	Jours de grêle
Région Méditerranéenne ou littoral maritime	Nice	»	»	»	»	1	2	12	»	»	»	»	»	15	5
	San Remo ...	»	»	1	»	5	»	»	3	2	»	»	»	11	6
	Oneglia	»	»	»	2	12	»	2	»	12	»	»	»	28	6
	Albenga	»	»	»	»	1	3	1	10	1	»	1	»	17	9
	Savone	»	»	»	»	»	»	»	10	3	»	»	»	13	4
	Gênes	»	»	»	»	»	»	2	5	14	8	4	»	33	20
	Chiavari	»	»	»	»	2	»	»	1	6	1	»	»	10	5
	Levante	»	»	»	»	4	5	»	4	1	2	»	»	16	6
Région Alpine orientale ou bassin du Pô	Bobbio	»	»	»	»	»	»	12	3	»	1	»	»	16	7
	Novi	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
	Tortone	»	»	»	»	»	»	22	3	»	»	»	»	25	5
	Voghera	»	»	»	»	4	1	15	1	»	»	»	»	21	7
	Aequi	»	»	»	2	2	14	3	6	»	16	»	»	43	6
	Alexandrio ...	»	»	»	1	3	5	7	»	»	»	»	»	16	10
	Casal	»	»	»	»	»	1	26	»	»	»	»	»	27	3
	Lomelline ...	»	»	»	»	3	16	7	2	4	»	»	»	32	14
	Mondovì	»	»	»	»	»	10	6	10	6	»	»	»	32	11
	Albe	»	»	»	»	2	7	3	9	»	»	»	»	21	10
	Asli	»	»	»	»	5	»	3	29	»	6	»	»	43	8
	Coni	»	»	»	»	3	5	3	12	3	»	»	»	26	14
	Saluces	»	»	»	»	»	8	6	»	»	»	»	»	14	9
	Pignérol	»	»	»	»	»	1	3	4	1	»	»	»	9	7
	Turin	»	»	»	1	7	7	10	16	10	6	»	»	57	24
	Suze	»	»	»	»	»	»	»	1	4	»	»	»	5	3
	Aoste	»	»	»	2	»	5	2	2	2	6	»	»	19	7
	Ivrée	»	»	»	»	»	5	8	1	3	5	»	»	22	10
	Nielle	»	»	»	»	6	»	20	11	1	»	»	»	38	14
Région Alpine occidentale ou bassin du Rhône	Vercell	»	»	»	»	9	3	9	7	3	»	»	»	31	15
	Pallanza	»	»	»	»	»	»	13	3	4	2	4	»	26	10
	Novare	»	»	»	»	21	6	19	21	2	»	»	»	69	24
	Genevois	»	»	»	1	2	7	22	1	»	»	»	»	33	15
	Chablais	»	»	»	»	»	1	11	»	»	»	»	»	12	3
	Faussigny ...	»	»	»	»	2	»	2	11	»	»	»	»	15	10
	Savoie propre	»	»	»	»	4	9	6	20	3	»	»	»	42	17
	Haute Savoie	»	»	»	»	1	2	1	»	»	»	»	»	4	4
	Tarantaise ...	»	»	»	»	1	4	1	2	»	»	»	»	8	4
	Maurienne ...	»	»	»	»	1	9	7	11	3	»	»	»	31	9
		»	»	1	9	101	136	261	219	88	53	9	»	... 880	

2° Le nombre des jours dans lesquels la grêle a été signalée s'élève à 129, dont:

	1	en mars	qui a frappé	1	Commune
	5	en avril	»	9	»
	18	en mai	»	101	»
	20	en juin	»	136	»
	27	en juillet	»	264	»
	25	en août	»	219	»
	19	en septembre	»	88	»
	11	en octobre	»	53	»
	3	en novembre	»	9	»
	129.			880.	

Dans ces 129 jours, les mois de mai, juin, juillet, août et septembre ont, comme on le voit, été seuls frappés avec une certaine intensité. Encore dans ceux-ci, les mois de juillet et août ont-ils été bien supérieurs aux trois autres, tant pour le nombre des jours, que pour celui des Communes atteintes.

3° Les Provinces qui ont été le plus fortement maltraitées, sont

		Jours de grêle	Communes grêlées
1° Sur le littoral :	Gênes qui a eu	20	33
»	Albenga »	9	17
»	Oneglia »	6	28.
2° Dans le bassin du Pô :	Novare »	24	69
»	Turin »	24	57
»	Vercell »	15	31
»	Lomelline »	14	32
»	Coni »	14	26
»	Bielle »	14	38
»	Mondovì »	11	32
»	Asti »	8	43
»	Acqui »	6	43.

	Jours de grêle	Communes grêlées
3° Dans le bassin du Rhône: Savoie Propre qui a eu	17	42
» Genevois »	15	33
» Fausigny »	10	15
» Maurienne »	9	31

4° D'après la direction suivie par chaque colonne gréleuse, on voit que pour les différentes Provinces, elles ont rayonné autour de la chaîne des Alpes et de celle des Apennins, de manière à se porter :

1° Le long du littoral, au Sud-Ouest, au Sud et au Sud-Est;

2° Dans le bassin du Pô, au Nord-Est, à l'Est et au Sud-Est.

3° Dans le bassin du Rhône, au Nord-Est.

5° Leurs points de départ, indiqués dans les états fournis par les Indics, proviennent généralement des sommités principales qui dominent chaque Province. Ainsi les points signalés orageux sont:

1° Dans le littoral:

Pour Nice, les montagnes Baus de S. Jeanet et Miaran en France, et la montagne del Plan;

Pour San Remo, Oneglia et Albenga, les monts Bajardo, Ceppo, Breglio, Vesio, Carpasina et Carpona;

Pour Savone, les monts Camossero, del Coletta et Begna;

Pour Gênes, les monts Bocchetta, Tourby et Antola;

Pour Chiavari et Levante, les monts Penna, Bello et Giglino;

C'est-à-dire les plus hautes sommités qui forment la ligne de faite des Apennins, depuis la frontière de France jusqu'à l'extrémité orientale du Royaume.

2° Dans le bassin du Pô:

Pour Bobbio, Novi, Tortone et Voghera, les monts Penice, Antola, Chiappa et Bocchetta, soit les sommités de l'Apennin qui les dominent au Sud-Ouest, et quelquefois les montagnes alpines situées à l'Ouest;

Pour Mondovì, Coni, Saluces, Albe et Acqui, les monts de l'Argentera, le mont Viso et le mont Bracco, plus rarement les montagnes situées au Nord-Ouest;

Pour Pignérol et Suze, les monts Pragelato et Thabor;

Pour Aoste, les monts au-dessus de Courmayeur et de Cogne, et ceux de l'Oropa qui séparent cette Province du Biellais;

Pour Pallanza, Novare et Lomellinè, le mont Rose, et les sommités qui s'y rattachent;

Pour Alexandrie, Casal, Asti, Turin, Ivree, Bielle et Verceil, toutes les hauteurs de la chaîne qui s'étend du Thabor au mont Rose, en sorte que la direction du météore a varié de l'Ouest au Nord-Ouest suivant son point de départ.

3° Enfin dans le bassin du Rhône, où les orages proviennent généralement du Sud-Ouest:

Pour le Genevois, le Chablais et le Faucigny, les montagnes du Colombier et autres du Jura, celles des Beauges, des Voirons, du Salève, du Vuache, du mont Saxonnex et du mont Joli;

Pour la Savoie Propre, la Haute Savoie, la Maurienne et la Tarantaise, les montagnes du département de l'Isère, celle de la Grande Chartreuse, d'Allevard, du Galibier, des aiguilles d'Arve, de la Vanoise, et du Thabor.

6° En comparant la direction suivie par les colonnes grêlenses, et celle des nombreuses vallées qui sillonnent le territoire, on remarque que les Communes frappées se trouvent presque toutes dans les portions de vallées dirigées du Sud-Ouest au Nord-Est, c'est-à-dire, à-peu-près dans une direction moyenne aux deux axes de soulèvement des Alpes occidentales et orientales, tandis que, parmi celles dirigées du Nord-Ouest au Sud-Est, soit dans le sens de l'axe du soulèvement du mont Viso, ainsi que parmi celles qui vont de l'Ouest à l'Est, il n'est presque pas une seule Commune qui ait été atteinte. Les provinces du Chablais, Genevois, Faucigny, Savoie Propre, Haute Savoie, Tarantaise et Maurienne, où la direction Nord-Ouest au Sud-Est se trouve fortement dessinée; et celles de Aoste, Ivree, Suze, Pignérol, Saluces et Coni où la direction de l'Ouest à l'Est est la plus générale, en présentent des exemples incontestables.

7° En négligeant les grêles qui ont seulement frappé une ou deux Communes, pour ne tenir compte que de celles qui se sont fait sentir sur une certaine étendue, les suivantes méritent d'être signalées:

DATE		DIRECTION	PROVINCES ET COMMUNES FRAPPÉES	NOMBRE des	
				PROVINCES	SENAIRES
Mai.....	10	Du N. au S.....	Oneglia (7)	3	9
		De l'O. à l'E.	Alexandrie (1). Novare (1).....		
	12	Du N-O. au S-E.	Oneglia (4)	1	4
	15	Du N-O. au S-E.....	Bielle (6). Verceil (6). Novare (13). Voghera (4)..	8	37
		Du S-O. au N-E.....	Oneglia (1). Albenga (1). Genevois (2). Savoie Propre (4)		
	17	Du N-O. au S-E.....	Turin (4)	1	4
	18	De l'O-N-O. à l'E-S-E.	Albe (1). Asti (1). Turin (1).....	3	3
	22	Du N-O. au S-E.....	San Remo (3). Chiavari (2). Levante (4). Ver- ceil (1)	4	10
	27	Du S-O. au N-E.....	Nice (1). Novare (2)	2	3
	28	Du S-O. au N-E.....	Maurienne (1). Tarantaise (1). Haute Savoie (1). Faussigny (2)	4	5
	29	Du N-O. au S-E.	Coni (3). Lomelline (2)	2	5
Juin.....	31	Du N-O. au S-E.....	Asti (4). Turin (2). Verceil (2). Novare (3) ...	4	11
	1	Du S-O. au N-E.....	Savoie Propre (5). Turin (1).....	2	6
	2	De l'O-N-O. à l'E-S-E.	Ivrée (3). Chablais (1)	2	4
	5	Du N-O. au S-E.....	Casal (1). Novare (1). Alexandrie (2)	3	4
	8	Du N-O. au S-E.....	Coni (2). Saluces (1). Turin (1)	4	6
		Du S-O. au N-E.....	Genevois (2)		
	10	Du N-O. au S-E.....	Levanto (4). Alexandrie (1). Lomelline (11). Sa- luces (6). Turin (1). Novare (2).....	6	25
	13	De l'O. à l'E.	Nice (2). Voghera (1).....	2	3
	15	Du S-O. au N-E.	Turin (2). Saluces (1). Maurienne (2)	3	5
	16	Du N-O. au S. E.	Albenga (2). Coni (2). Mondovi (4). Alba (1). Turin (1). Novare (3).....	7	15
		Du S-O. au N-E.	Savoie Propre (2).....		
	22	De l'O. à l'E.	Alba (2). Alexandrie (1). Aoste (4). Savoie Propre (1)	4	8
	23	Du N-O. au S-E.....	Mondovi (6). Acqui (13). Alba (4). Saluces (2). Verceil (1).....	8	38
		Du S-O. au N-E.....	Genevois (1). Maurienne (7). Tarantaise (4) ...		

DATE		DIRECTION	PROVINCES ET COMMUNES FRAPPÉES	NOMBRE des	
				PROVINCES	COMMUNES
Juin	24	Du S-O au N-E.....	Aoste (1). Genevois (2). Chablais (1). Savoie Propre (1). Haute Savoie (1)	5	6
"	29	De l'O. à l'E.	Albenga (1). Levante (1). Alexandrie (1). Lo- melline (1). Genevois (1)	5	8
Juillet	4	Du N-O. au S-E.....	Alexandrie (2). Vercell (4). Novare (1)	3	7
"	5	Du N-O. au S-E.....	Mondovì (3). Novare (1)	2	4
"	9	Du N-O. au S-E.....	Tortone (8). Alba (2)	2	10
"	10	De l'O. à l'E.	Bobbio (7). Voghera (3). Lomelline (2). Turin (1). Novare (2). Genevois (1)	6	16
"	11	Du S. au N.	Voghera (5)	1	5
"	12	De l'O. à l'E.	Voghera (6). Casal (2). Lomelline (1). Saluces (1). Vercell (1). Faussigny (1)	6	12
"	13	De l'O. à l'E.	Saluces (2). Acqui (3). Tortone (8). Alexandrie (6). Asti (1). Casal (2). Turin (3). Pallanza (1) ...	8	48
"	14	Du S-O. au N-E.....	Gênes (1). Bobbio (2). Mondovì (2). Nice (10)	5	16
"		Du N-O. au S-E.....	Saluces (1)		
"	15	De l'O. à l'E.	Nice (1). Gênes (1). Bobbio (3)	3	5
"	18	De l'O-S-O. à l'E-N-E.	Genevois (3)	1	3
"	19	Du S-O. au N-E.....	Maurienne (5). Tarantaise (1). Haute Savoie (1)	3	7
"	20	De l'O. à l'E.	Tortone (2). Lomelline (1). Asti (1). Saluces (1). Vercell (1)	5	6
"	21	Du S. O. au N. E.....	Bielle (1). Faussigoy (1). Chablais (11)	3	13
"	22	De l'O. à l'E.	Turin (2). Bielle (13). Novare (7)	3	22
"	23	De l'O. à l'E.	Bielle (1). Novare (2). Pallanza (3)	3	6
"	24	De l'O. à l'E.	Ivrée (3). Bielle (3). Genevois (1)	3	7
"	25	Du S-O. au N-E.....	Savoie Propre (3). Lomelline (1)	2	4
"	26	Du N-O. au S-E.....	Alba (1). Lomelline (1)	5	21
"		Du S-O. au N-E.....	Bobbio (2). Savoie Propre (2). Genevois (15) ...		
"	27	De l'O. à l'E.	Tortone (5). Voghera (1). Bielle (2). Novare (1). Pallanza (9). Genevois (1)	6	19
"	30	Du N-O. au S-E.....	Ivrée (1). Vercell (3)	2	4

DATE		DIRECTION	PROVINCES ET COMMUNES FRAPPÉES	NOMBRE des	
				PROVINCES	COMMUNES
Juillet	31	Du N-O. au S-E.	Coni (2), Asti (1), Pignérol (3), Turin (4), Aoste (2), Ivree (5), Bielle (1), Pallanza (1), Novare (5).	13	31
		Du S-O. au N-E.	Nice (1), Oneglia (3), Savoie Propre (2), Maurienne (2)		
Août	1	Du N-O. au S-E.	San Remo (2), Albenga (2), Tortone (3), Coni (2), Mondovi (1), Aequi (6), Verceil (3), Novare (4).	8	23
"	6	Du N-O. au S-E.	Alba (1), Novare (7)	2	8
"	7	Du N-O. au S-E.	Alba (3), Asti (8), Pignérol (1), Turin (14), Ivree (1), Bielle (1), Novaro (6), Faussigny (1)	8	35
"	8	De l'O. à l'E.	Albenga (7), Gênes (1), Alba (5), Savoie Propre (7), Maurienne (2), Tarantaise (2)	6	24
"	9	Du N-O. au S-E.	Mondovi (6), Asti (21), Coni (1), Turin (1), Bielle (5), Verceil (1)	9	47
		Du S-O. au N-E.	Genevois (1), Faussigny (4), Savone (7)		
"	10	Du N-O. au S-E.	Pignérol (2), Turin (3)	2	5
"	12	De l'O. à l'E.	Gênes (2), Voghera (1)	2	3
"	14	Du S-O. au N-E.	Genevois (1), Faussigny (1), Savoie Propre (7), Maurienne (9)	4	18
"	15	Du N-O. au S-E.	Albenga (2), Lomelline (1), Bielle (5)	3	8
"	16	Du N-O. au S-E.	Gênes (1), Chiavari (1), Levante (4), Coni (2), Savoie Propre (1)	5	9
"	17	De l'O. à l'E.	Verceil (1), Faussigny (3), Savoie Propre (1) ...	3	5
"	20	De l'O. à l'E.	Coni (1), Pallanza (3), Savoie Propre (1)	3	5
"	23	De l'O. à l'E.	Savone (3), Coni (6), Mondovi (2), Bielle (5), Novare (2)	5	18
"	24	De l'O. à l'E.	Aoste (2), Bielle (5), Verceil (4), Novare (5) ...	4	16
"	25	Du N-O. au S-E.	Novaro (10)	1	10
"	26	De l'O. à l'E.	Faussigny (3)	1	3
"	28	De l'O. à l'E. ..	Suze (1), Savoie Propre (1), Faussigny (2)	3	4
Septembre	1	De l'O. à l'E.	Novare (1), Savoie Propre (3), Maurienne (2) ...	3	6
"	3	De l'O. à l'E.	Gênes (7), Suze (1)	2	8
"	6	De l'O. à l'E.	San Remo (2), Oneglia (12), Savone (2), Gênes (3), Chiavari (6), Pignérol (1), Turin (6), Suze (3).	8	35

DATE		DIRECTION	PROVINCES ET COMMUNES FRAPPÉES	NOMBRE des	
				PROVINCES	COMMUNES
Septembre	13	De l'O. à l'E.	Chiavari (5). Coni (1)	2	6
"	14	De l'O. à l'E.	Albenga (1). Savone (1). Mondovì (3). Lomelline (4). Ivée (1). Verceil (3). Novare (1). Maurienne (1)	8	15
"	15	De l'O. à l'E.	Pallanza (3)	1	3
"	18	De l'O. à l'E.	Gênes (1). Aoste (2)	2	3
"	20	Du N-O. au S-E.	Gênes (3). Pignéról (1). Turin (3)	3	7
"	23	Du N-O. au S-E.	Levanle (1). Mondovì (1)	2	2
Octobre...	5	De l'O. à l'E.	Aequi (16). Asti (6). Turin (1). Pallanza (2) ..	4	25
"	6	Du N-O. au S-E.	Turin (4)	1	4
"	22	Du N-O. au S-E.	Gênes (3). Levanle (2)	2	5
"	30	Du N-O. au S-E.	Aoste (6). Ivée (5). Turin (1)	3	12
Novembre .	20	De l'O. à l'E.	Gênes (3). Pallanza (4)	2	7

Il serait facile de multiplier les citations qui précèdent; mais elles suffisent pour faire voir que, quoique la direction de la grêle ait été subordonnée, comme il a été dit, dans chaque localité aux chaînes de montagnes qui les dominent, cependant toutes les fois que ce météore a frappé le même jour plusieurs Provinces souvent très-éloignées et situées sur les deux versants des Alpes et des Apennins, il a presque constamment suivi une ou plusieurs lignes dirigées du Sud-Ouest au Nord-Est.

Une semblable remarque fut déjà faite par M^r TESSIER dans le rapport qu'il présenta en 1790 à l'Académie des Sciences de Paris sur le fameux orage qui traversa la France, les Pays-Bas et l'Hollande, orage qui frappa, dans sa course Sud-Ouest au Nord-Est, 1039 paroisses et occasionna un dommage de 24,962,000 fr. Cet orage, dont les grêlons pesaient jusqu'à demi-livre, atteignit les Communes sur deux bandes parallèles, l'une de 175 lieues de long sur 4 de large, et l'autre de 200

lienes de longueur sur 2 seulement de largeur, laissant entr'elles une bande large de 5 lienes, où il ne tomba que de la pluie (1).

La même direction a été également observée dans plusieurs autres orages, entr'autres dans celui du 21 février 1828 qui se fit sentir sur les côtes du Portugal et de la France méridionale (2), et dans celui du 19 juin 1835 à New-brunswick (3), l'un et l'autre accompagnés de trombes dont l'effet fut des plus désastreux.

8° Dans un grand nombre des états transmis, les *Sindies* ont cru devoir faire mention de la cause à laquelle sont vulgairement attribués les orages de grêles dans leurs Communes. Ils indiquent toujours alors, pour motif déterminant, le contraste du vent du Nord avec les vents du Sud ou de l'Ouest. Ainsi ceux de :

Nice, l'attribuent au contraste du vent du Nord avec le vent Sud-Ouest;

Levante, à celui du Nord avec le Sud ou le Sud-Ouest;

Novi, à celui du Nord avec le Sud;

Lomelline, à celui du Nord et de l'Ouest avec le Sud-Ouest;

Coni, à celui de l'Ouest (mont Viso) avec le Sud-Ouest;

Suze, à celui du Nord avec l'Ouest ou le Sud-Ouest;

Bielle, à celui de l'Ouest (mont Cervin et mont Rose) avec le Sud;

Tortone, à celui de l'Ouest avec l'Est;

Chablais, à celui du Nord avec l'Ouest et le Sud-Ouest;

Faussigny, à celui du Nord avec le Sud.

Une semblable déclaration, répétée dans plusieurs Provinces extrêmes, me paraît donner à ce contraste des deux vents une importance générale, venir à l'appui des observations locales antérieurement recueillies soit par M^r LECOQ sur le Puy-de-Dôme, soit par M^r FOURNET dans le Lyonnais, et s'étendre à toutes les grêles qui tombent, du moins à toutes celles dont l'effet est ressenti à la fois à de grandes distances.

(1) *Annuaire du Bureau des Longitudes* 1826. Notice ARAGO sur la grêle. Bibl. Univ. de Genève Vol. 37. p. 191.

(2) Bibl. Univ. susdite Vol. 37. p. 202.

(3) Id. Vol. 23. p. 145.

9° Parmi les autres faits consignés dans les mêmes documents, quelques-uns méritent encore d'être signalés. Ainsi :

Plusieurs Provinces indiquent certains vents comme les préservant de la grêle pour la porter sur d'autres territoires voisins. Dans ce nombre , sont les vents Nord-Ouest qui éloignent la grêle des provinces de Saluces et de Pignérol , ceux d'Est et de Nord-Ouest qui l'éloignent de la Province de Suze , ceux de Nord-Ouest qui préservent Gênes et San-Remo , ceux de Sud-Est qui en font autant pour Acqui , etc.

D'autres fois, une colline , un cône montueux garantissent une portion d'un territoire, tantôt en divisant la colonne de grêle qui frappe à droite et à gauche (Dent du chat, Savoie propre), tantôt en la déviant entièrement d'un autre côté (colline de Turin).

Assez souvent, la colonne gréleuse débouche par un col ou par une gorge (provinces de Oneglia, Albenga, Bobbio etc.), et des observations signalent même la présence de ce météore plus fréquemment depuis qu'on a abattu les futaies qui garnissaient les gorges (Tarantaise).

Un assez grand nombre des Communes non frappées en 1840, sont indiqués comme ne l'étant pas depuis fort longtemps. Toutefois comme cette donnée n'avait pas été demandée par la Commission Supérieure, et qu'ainsi elle n'a été fournie que par quelques Communes isolées, et surabondamment, on ne peut en déduire aucune loi générale.

Différentes Communes ne sont frappées qu'à de longs intervalles ; d'autres le sont tous les ans ; d'autres seulement après 2, 3, 4, 5, 6 etc. années.

Les grêles tombent assez fréquemment sur le sommet des montagnes sans s'étendre au-delà ; les provinces de Suze , Aoste , Maurienne , Genevois , Haute Savoie et Tarantaise en fournissent plusieurs exemples ; mais alors ces grêles sont désignées comme peu importantes, sans direction déterminée, accompagnées de pluie, et toujours restreintes dans un espace fort circonscrit.

Enfin c'est ordinairement dans l'après-midi plutôt que dans la matinée que ce météore se fait sentir.

III^{ÈME} PARTIE

OPINION SUR LA FORMATION DE LA GRÊLE

DÉDUITE DES FAITS PRÉCÉDENTS

Insuffisance des renseignemens obtenus.

J'ai fait connaître dans la II^e Partie les résultats principaux que m'ont fourni les documens transmis par les Communes. Il est à regretter que les questions qui y ont donné lieu aient été spécialement rédigées dans le but systématique que s'était proposé leur Auteur, M^r l'Abbé GENEVOIS, c'est-à-dire, la détermination de ce qu'il appelait les *foyers de la grêle*, et qu'elles n'aient pas embrassé toutes les recherches propres à éclairer les Physiciens dans l'étude de ce météore; car quand même les renseignemens n'auraient pas été recueillis par des personnes auxquelles les connaissances physiques fussent familières, néanmoins la possibilité de mettre les questions à la portée de tous, et l'examen comparé des différentes réponses obtenues auraient procuré des éclaircissemens précieux sur plusieurs faits encore contestés.

Ainsi il eût été convenable de demander pour chaque localité: l'heure de l'apparition du nuage grêloux, et celle de la chute de la grêle; la hauteur approximative de ce nuage; les vents régnant avant et après, et leur intensité; la durée du temps pendant laquelle la grêle était tombée; l'étendue et la portion du territoire frappé; si la grêle avait été précédée de tourbillons et du bruit qui décèle ordinairement son approche; quels étaient la forme des grêlons, leur grosseur et les caractères qu'ils avaient présentés; en un mot, toutes les circonstances qui avaient accompagné la grêle, afin de pouvoir en déduire, sur tous

les points du Royaume, les relations de temps, de distance, de direction, de forme, de grosseur et autres propres à faire apprécier la manière dont s'était reproduit ce météore le même jour en divers lieux, et souvent à de très-grandes distances.

Application des résultats obtenus aux différentes théories émises sur la grêle.

A défaut de ces renseignemens qu'il serait, sans doute, intéressant et même facile de se procurer pour les années à venir, il me paraît toutefois qu'en mettant en regard les résultats indiqués dans la II^e Partie de ces Observations avec les différentes opinions des Physiciens énoncées dans la I^{re} Partie, on peut arriver à quelques conclusions, lesquelles ne sont pas sans importance relativement au plus ou moins de probabilité des théories présentées.

En effet, on a vu qu'aucune des hypothèses antérieures à VOLTA n'avait satisfait les Météorologues; que tout en admettant que l'électricité jouait un rôle considérable dans le phénomène de la grêle, la théorie elle-même de VOLTA présentait dans son application des difficultés trop grandes pour attribuer à ce seul agent, quelque puissant qu'il soit, la production du météore.

La théorie proposée par l'Abbé GENEVOIS, dans laquelle l'électricité exercerait seulement une action mécanique, ne me paraît pas avancer davantage la solution du problème. En reconnaissant avec ce Physicien la possibilité de la congélation de l'eau par l'effet de la raréfaction de l'air, soit quand elle est traversée par un courant d'air précédemment très-comprimé, soit à la suite d'un violent coup de foudre, les faits semblent d'autant moins se passer ainsi dans la nature pendant le phénomène qui nous occupe que, d'après les documens fournis, la grêle ne provient pas des angles rentrants, ni des anfractuosités des montagnes, mais bien des sommités les plus élevées de la chaîne des Alpes et de celle des Apennins; qu'en outre le contraste de deux vents pour la production de la grêle ne saurait être révoqué en doute, et que cette action aurait bien moins d'effet dans ces angles rentrants, que partout ailleurs. Cette théorie me semble donc pécher par sa base fondamentale.

L'opinion de M^r le Professeur DE-LA-RIVE qui attribue à une cause identique le développement de l'électricité et la production de la grêle, soit au refroidissement dû à la diminution de température de la colonne atmosphérique, diminution accidentellement augmentée par l'interposition des nuages qui s'opposent au rayonnement de la chaleur terrestre, repose sur un principe certain (1). Nul doute que cette circonstance ne doive, d'une part, amener dans la région supérieure du nuage un refroidissement propre à faciliter la congélation des vapeurs aqueuses, et d'autre part, augmenter l'échauffement de la région inférieure, en contribuant ainsi à la chaleur étouffante qui se fait sentir avant les orages. Mais si elle était le seul et véritable motif déterminant de la grêle, il paraît que ce météore devrait se reproduire beaucoup plus souvent, et même chaque fois que l'atmosphère se trouvant chargée de nuages, ceux-ci détermineraient une solution de continuité, dans le rayonnement terrestre, en sorte qu'il ne devrait presque pas y avoir un orage qui ne fût accompagné de grêle.

La théorie de M^r le Professeur FOURNET sur la formation des nuages à l'aide des brises de montagnes, sur leur accumulation plus ou moins grande en raison de l'orientation des chaînes, sur le transport des masses de vapeurs par les vents Sud-Ouest qui viennent augmenter le volume des nuages, et dont la résolution en pluie ou en grêle dans la direction Nord-Est peut être déterminée par la moindre condensation, surtout quand elle est facilitée par le concours du vent du Nord, repose également sur des faits confirmés par de nombreuses observations. Mais cette théorie qui ne semble considérer comme indispensable que le vent du Sud-Ouest, si elle rend compte, d'une manière très-satisfaisante, de la formation des pluies, et de leur distribution en colonnes plus ou moins intenses, n'explique toutefois pas suffisamment le refroidissement nécessaire à la production de la grêle.

En admettant donc les différentes causes énoncées par les Savants

(1) Une observation présentée le 14 mars 1842 à l'Académie Royale des Sciences de Paris par M^r BOESSINGAULT, donne une nouvelle preuve de l'influence qu'exerce un corps interposé, pour intercepter le rayonnement terrestre. Au mois de février 1842, la terre étant recouverte de neige, ce Savant a constaté une différence de 9 degrés centigrades entre les températures inférieure et supérieure (Moniteur Universel du 31 mars 1842, n° 90).

qui précèdent, et en attribuant à chacune d'elles une part plus ou moins active dans les circonstances qui aident à la congélation de l'eau en grêle, elles ne me semblent cependant pas suffisantes pour déterminer à elles seules le phénomène dont nous nous occupons.

*Action que peuvent avoir deux vents opposés,
dans la production de la grêle.*

Si nous supposons, au contraire, avec M^r Denison OLMSTED et M^r Charles LECOQ, le concours nécessaire de deux vents soufflant en sens opposés, l'un de ces vents venant du Sud ou de l'Ouest chargé de vapeurs, l'autre venant du Nord ou de l'Est sec et froid, la formation de ce météore présente une explication facile.

Admettons, en effet, que le vent froid (Nord, Nord-Est, Nord-Ouest) souffle supérieurement, et de manière à raser les sommités des montagnes. Il chassera devant lui les nuages qu'il rencontrera autour de ces sommités, soit qu'ils y aient été accumulés des vallées par les brises des montagnes, soit qu'ils y aient été amenés de plus loin; et ces nuages présenteront une lame plus ou moins profonde suivant l'orientation de la chaîne montagneuse (conformément à l'opinion de M^r FOURNET). Le vent chaud (Sud, Sud-Ouest, Sud-Est) qui soufflera inférieurement en sens contraire, amènera, de son côté, une grande masse de vapeurs. La rencontre du vent supérieur tendra nécessairement à condenser celles-ci avec une intensité croissant à mesure que l'une et l'autre auront plus de vitesse, et à en former de nouveaux nuages que grossiront de nouvelles condensations de vapeur. Le refroidissement sera lui-même augmenté par la diminution de température qu'éprouveront les régions supérieures, tant à cause de l'interception du rayonnement terrestre due à l'interposition des couches nuageuses que à cause du changement d'état électrique et de la raréfaction de l'air résultant des décharges électriques (conformément à l'opinion de M^r DE-LA-RIVE). Les directions relatives de chacun des vents opposés, directions que devront d'ailleurs modifier l'orientation des vallées et celle des montagnes, et leur vitesse d'impulsion y contribueront aussi en déterminant souvent des tourbillons, et par suite des trombes réelles lorsque ce contraste des vents se fera

sentir jusqu'au bas de la colonne atmosphérique, comme tendent à le confirmer de nombreux exemples (1).

Toutes ces causes paraissant plus que suffisantes pour amener la congélation des vapeurs condensées, cette congélation s'opérera à la rencontre des deux couches nuageuses, soit des deux vents, c'est-à-dire à une hauteur moindre que les sommités des Alpes, et elle y formera les embryons de la grêle ou le grésil. La force d'impulsion du vent dominant combinée avec la résistance de l'air et l'attraction électrique des nuages, retiendront ensuite dans l'atmosphère les grêlons formés pendant un temps plus ou moins prolongé, mais que M^r LECOQ a reconnu sur le Puy-de-Dôme capable de laisser porter à demi-lieue de distance des grains de la grosseur d'une noisette (2).

Ces grêlons pourront donc se grossir en traversant de nouvelles couches de vapeurs jusqu'au moment où ils auront atteint le sol dans leur course oblique. Si les vents sont faibles, la grêle sera d'une petite dimension, et la surface frappée sera très-restreinte, peut-être même limitée aux sommités où se trouve le nuage. S'ils sont forts, du moins le vent dominant, la grêle sera plus étendue, et frappera des distances souvent fort éloignées. Si la colonne grêlense rencontre dans sa course inclinée un obstacle tel qu'une aiguille plus ou moins élevée qui lui barre le passage, cette colonne s'arrêtera, ou se divisera, ou se déviara toute d'un même côté de l'obstacle. Si, au contraire, elle rencontre une dépression telle qu'un col ou une gorge, elle s'y engouffrera pour se porter sur des points plus éloignés, en sorte qu'il pourra y avoir des territoires constamment exposés à la grêle, et d'autres constamment préservés, et qu'en général la colonne grêlense se développera davantage dans la plaine que dans les pays de montagnes. La colonne grêlense sera plus ou moins intense, suivant que le vent froid chassera devant lui

(1) Bibliothèque Universelle de Genève.

Trombe du 11 août 1827 sur le lac Lemane, vol. 36. p. 142.

Trombe du 22 février 1828 à Hyères, vol. 37. p. 109.

Trombe du 9 juin 1830 sur le lac de Neuchâtel, vol. 44. p. 18.

Trombe du 19 juin 1835 à Newbrunswick, 2^e Série, vol. 23. p. 149.

Mémoire de Mr Ch. LECOQ. vol. 3. p. 235 — etc. etc

(2) Biblioth. Univers. de Genève. Mémoire LECOQ, vol. 3. p. 234.

une plus ou moins grande quantité de nuages. Elle pourra même ne frapper les territoires situés sur sa ligne de direction que par intervalles, ou, comme on dit vulgairement, *par sauts*, quand ces nuages se trouveront à certaine distance les uns des autres.

La direction apparente de la colonne grêleuse sera généralement dans le sens du vent dominant qui lui imprimera son impulsion. Néanmoins, lorsque la grêle se fera sentir sur plusieurs points très-éloignés, le même jour et à-peu-près dans le même temps, ce sera sur une même ligne dirigée du Sud-Ouest au Nord-Est, c'est-à-dire, dans le sens du vent chaud qui apporte le plus de vapeurs à condenser. Par ce motif, toutes les directions de chaînes de montagnes en sens contraire, et qui présentent un obstacle à la marche du vent Sud-Ouest, se trouveront beaucoup moins exposées que les autres à être battues par la grêle.

*Confirmation de ces faits
déduite des observations météorologiques.*

Les renseignemens consignés dans la II^e Partie de ces Observations viennent tous à l'appui du raisonnement qui précède, et semblent en confirmer l'exactitude. Néanmoins, pour m'assurer si les observations météorologiques recueillies à la même époque pourraient on lui prêter une nouvelle force, on la combattre, j'ai cru devoir consulter celles faites sur les vents qui ont régné en différens lieux susceptibles d'éprouver jusqu'à un certain point la même influence que les territoires frappés par la grêle.

A cet effet, j'ai choisi pour points de repère, et comme pouvant le mieux procurer des données utiles à la question qui nous occupe, les observations faites en 1840 :

1^o A l'Hospice du Grand St-Bernard, 2491 mètres au-dessus de la mer, insérées dans la Bibliothèque Universelle de Genève.

2^o A l'Observatoire de Genève, 407 mètres au-dessus de la mer, insérées dans le même Journal.

3^o A l'Académie Royale des Sciences de Turin, 284,8 mètres environ au-dessus de la mer, extraites des registres de cette Société savante.

4° A l'Université de Gênes, 45 mètres environ au-dessus de la mer, extraites des registres de cet Établissement.

5° Enfin à Nice, 20 mètres au-dessus de la mer, recueillies par M^r Risso.

J'ai comparé lesdites observations avec les jours de grêle; puis j'ai dressé l'état suivant indiquant, mois par mois, la totalité des vents qui ont régné dans ces différents lieux, et le rapport comparatif de ces vents avec ceux qui ont soufflé seulement pendant les jours de grêle.

ÉTAT COMPARATIF DES VENTS

QUI ONT SOUFFLÉ PENDANT L'ANNÉE 1840

ET DES VENTS QUI ONT SOUFFLÉ LA MÊME ANNÉE

PENDANT LES JOURS DE GRÊLE

À

L'HOSPICE DU GRAND S^T-BERNARD, GENÈVE, TURIN, GÈNES

ET NICE

1840.

NOMBRE DES JOURS*pendant lesquels ont soufflé chaque mois les vents.*

MOIS	CALME			NORD-OUEST		NORD			NORD-EST			EST			SUD-EST			SUD			SUD-OUEST			OUEST			
	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir
HOSPICE DU GRAND SAINT-BERNARD																											
à 2491 mètres au-dessus de la mer																											
Janvier	»	»	»	»	»	»	»	»	»	22	22	22	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Février	»	»	»	»	»	»	»	»	»	10	10	11	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Mars	»	»	»	»	»	»	»	»	»	23	24	24	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Avril	»	»	»	»	»	»	»	»	»	12	13	14	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Mai	»	»	»	»	»	»	»	»	»	16	17	16	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Juin	»	»	»	»	»	»	»	»	»	20	20	21	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Juillet	»	»	»	»	»	»	»	»	»	20	22	22	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Août	»	»	»	»	»	»	»	»	»	22	23	23	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Septembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	12	12	14	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	23	24	23	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Novembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	14	14	16	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Décembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	9	10	11	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
	»	»	»	»	»	»	»	»	»	203	211	217	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
GENÈVE																											
à 407 mètres au-dessus de la mer																											
Janvier	2	6	»	»	1	»	7	5	»	1	»	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	20	16	»
Février	2	1	»	»	»	»	11	17	»	2	1	»	»	»	»	1	1	»	1	»	»	»	»	»	12	9	»
Mars	5	»	»	»	»	»	22	28	»	1	2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	3	1	»
Avril	5	3	»	»	»	»	22	22	»	1	»	»	»	»	»	1	1	»	»	»	»	»	»	»	1	4	»
Mai	6	4	»	»	»	»	12	14	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1	1	»	»	»	»	»	12	12	»
Juin	4	»	»	»	»	»	18	15	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	7	15	»
Juillet	3	1	»	1	1	»	13	11	»	1	2	»	»	»	»	»	»	3	1	»	»	»	»	»	10	14	»
Août	2	»	»	1	1	»	18	17	»	»	2	»	»	»	»	»	»	8	8	»	»	»	»	»	2	3	»
Septembre	8	4	»	»	»	»	8	10	»	2	»	»	»	»	»	1	1	»	1	»	»	»	»	»	10	15	»
Octobre	10	5	»	1	1	»	9	18	»	3	2	»	»	»	»	»	»	1	1	»	»	»	»	»	7	4	»
Novembre	4	7	»	»	»	»	6	7	»	4	2	»	»	»	»	1	1	»	»	»	»	»	»	»	12	13	»
Décembre	8	9	»	1	»	»	6	9	»	7	6	»	1	1	»	4	2	»	1	1	»	»	»	»	4	2	»
	59	10	»	3	5	»	152	173	»	23	17	»	2	1	»	8	7	»	16	12	»	»	»	»	100	108	»

NOMBRE DES JOURS DE GRÈLE

pendant lesquels ont soufflé les vents.

MOIS	CALME			NORD-OUEST			NORD			NORD-EST			EST			SUD-EST			SUD			SUD-OUEST			OUEST		
	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir
HOSPICE DU GRAND SAINT-BERNARD																											
à 2491 mètres au-dessus de la mer																											
Janvier	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Février	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Mars	11	11	11	11	11	11	11	11	11	1	1	1	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Avril	11	11	11	11	11	11	11	11	11	3	3	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	2	2	2	11	11	11
Mai	11	11	11	11	11	11	11	11	11	6	8	9	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12	10	9	11	11	11
Juin	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12	12	13	11	11	11	11	11	11	11	11	11	8	8	7	11	11	11
Juillet	11	11	11	11	11	11	11	11	11	18	19	20	11	11	11	11	11	11	11	11	11	9	8	7	11	11	11
Août	11	11	11	11	11	11	11	11	11	18	19	18	11	11	11	11	11	11	11	11	11	7	6	7	11	11	11
Septembre	11	11	11	11	11	11	11	11	11	7	7	9	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12	12	10	11	11	11
Octobre	11	11	11	11	11	11	11	11	11	7	7	7	11	11	11	11	11	11	11	11	11	4	4	4	11	11	11
Novembre	11	11	11	11	11	11	11	11	11	1	11	1	11	11	11	11	11	11	11	11	11	2	3	2	11	11	11
Décembre	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	11	11	11	11	11	11	11	11	11	73	76	81	11	11	11	11	11	11	11	11	11	56	53	48	11	11	11

GENÈVE

à 407 mètres au-dessus de la mer

Janvier	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Février	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Mars	11	11	11	11	11	11	1	1	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Avril	1	1	11	11	11	11	4	4	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Mai	4	3	11	11	11	11	6	7	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	1	11	8	7	11	11	11	11
Juin	4	11	11	11	11	11	11	8	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	5	12	11	11	11	11
Juillet	3	1	11	1	1	11	11	10	11	1	2	11	11	11	11	11	11	11	3	1	11	8	11	11	11	11
Août	2	11	11	1	1	11	13	12	11	11	2	11	11	11	11	11	11	11	7	7	11	2	3	11	11	11
Septembre	6	2	11	11	11	11	4	5	11	2	11	11	11	11	11	1	1	11	11	11	6	11	11	11	11	11
Octobre	5	4	11	11	11	11	1	4	11	2	1	11	11	11	11	11	11	11	1	1	11	2	1	11	11	11
Novembre	11	11	11	11	11	11	11	2	11	1	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	1	1	11	1	11	11
Décembre	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	25	11	11	2	2	11	51	53	11	6	5	11	11	11	11	1	1	11	11	10	11	32	46	11	1	1

1840.

Suite du **NOMBRE DES JOURS**
pendant lesquels ont soufflé chaque mois les vents.

MOIS	CALME			NORD-OUEST			NORD			NORD-EST			EST			SUD-EST			SUD			SUD-OUEST			OUEST		
	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir
TURIN																											
à 284, 8 mètres au-dessus de la mer																											
Janvier	»	»	»	»	1	1	3	2	»	4	8	6	1	2	7	1	»	1	1	2	1	17	15	12	4	1	3
Février	»	»	»	1	1	»	4	6	10	7	7	5	»	1	2	»	1	»	4	7	5	7	5	7	6	1	»
Mars	»	»	»	1	»	1	6	6	6	7	7	2	1	3	3	»	»	1	3	4	6	8	8	6	5	3	6
Avril	»	»	»	4	1	5	11	8	4	4	5	4	»	2	1	»	1	1	3	4	9	5	2	4	3	7	2
Mai	»	»	»	1	2	2	5	4	6	11	8	6	2	2	5	1	1	5	2	6	2	8	4	1	1	4	4
Juin	»	»	»	»	»	2	5	8	1	10	5	7	3	5	3	»	1	3	3	7	6	5	2	8	4	2	»
Juillet	»	»	»	1	»	»	4	5	8	10	9	11	2	4	4	»	2	2	8	4	2	4	6	3	2	1	1
Août	»	»	»	1	»	»	6	7	5	16	11	14	3	2	4	»	1	2	5	3	2	3	2	1	3	2	»
Septembre	»	»	»	»	2	3	7	9	5	14	11	12	»	3	2	1	1	1	3	4	1	1	»	3	4	»	3
Octobre	»	»	»	1	2	3	7	5	2	8	5	10	2	7	5	1	»	2	3	4	2	7	5	2	2	3	5
Novembre	»	»	»	5	1	»	6	4	7	5	9	12	1	3	2	1	»	1	3	1	1	7	6	5	2	6	2
Décembre	»	»	»	2	2	3	5	1	1	7	8	9	1	4	1	»	»	2	2	5	1	11	9	12	3	2	2
	»	»	»	17	12	20	69	65	55	103	93	98	16	38	39	5	7	20	37	53	39	82	65	65	37	33	30
GÈNES																											
à 45 mètres au-dessus de la mer																											
Janvier	1	»	5	»	2	»	9	8	6	7	3	9	5	2	3	7	10	6	1	2	2	1	3	»	»	1	»
Février	2	»	2	»	»	»	14	19	10	9	1	12	1	»	2	1	4	2	»	4	1	»	»	»	2	1	»
Mars	6	»	3	»	1	»	19	17	10	2	»	15	2	»	2	1	3	»	1	5	»	»	4	1	»	1	»
Avril	5	2	9	»	1	»	13	9	9	3	3	6	1	1	4	4	3	1	2	8	»	2	3	1	»	»	»
Mai	2	»	15	»	»	»	3	1	2	1	1	1	»	1	2	8	9	8	12	8	2	5	9	1	»	2	»
Juin	1	1	15	»	»	»	3	4	2	2	1	3	»	»	2	9	6	5	10	10	2	5	8	1	»	»	»
Juillet	»	»	15	»	»	»	4	1	»	1	»	3	»	»	1	8	12	10	13	6	2	5	11	»	»	1	»
Août	»	1	16	1	1	1	3	2	»	3	»	4	»	1	2	11	6	8	8	11	»	5	9	»	»	»	»
Septembre	1	»	7	»	1	»	6	5	9	5	2	5	»	»	»	16	17	3	2	3	3	»	2	3	»	»	»
Octobre	1	»	1	»	»	»	13	13	17	8	»	8	3	»	1	4	11	3	2	5	»	»	2	1	»	»	»
Novembre	3	1	3	»	»	»	7	7	5	3	2	7	2	»	2	12	14	10	1	»	2	2	6	1	»	»	»
Décembre	3	2	3	»	1	»	17	20	18	10	6	8	»	»	1	»	1	1	»	»	»	1	1	»	»	»	»
	25	7	94	1	7	1	111	106	88	54	19	81	14	5	22	81	96	57	52	62	14	26	58	9	2	6	»

1840.

Suite du **NOMBRE DES JOURS DE GRÊLE***pendant lesquels ont soufflé les vents.*

MOIS	CALME			NORD-OUEST			NORD			NORD-EST			EST			SUD-EST			SUD			SUD-OUEST			OUEST		
	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir
TURIN																											
à 284,8 mètres au-dessus de la mer																											
Janvier	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Février	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Mars	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1	»	»	»	1	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Avril	»	»	»	»	»	»	1	2	1	1	»	»	»	»	1	»	»	»	»	2	2	1	1	1	2	»	»
Mai	»	»	»	»	2	2	2	1	2	7	5	4	2	1	3	1	»	4	»	4	2	5	2	»	1	3	1
Juin	»	»	»	»	»	1	4	8	1	8	1	5	3	3	3	»	1	2	2	4	5	2	1	3	1	2	»
Juillet	»	»	»	1	»	1	2	5	8	10	9	10	1	3	3	»	1	2	8	3	2	3	5	»	2	1	1
Août	»	»	»	1	»	»	5	4	3	12	10	12	3	2	3	»	1	1	3	3	2	3	2	1	3	1	1
Septembre	»	»	»	»	1	2	4	5	3	8	9	7	»	2	1	1	»	1	2	2	»	1	»	3	3	»	2
Octobre	»	»	»	»	»	2	4	1	1	4	1	2	»	3	2	»	1	1	1	2	1	2	3	1	»	1	1
Novembre	»	»	»	1	»	»	1	1	3	»	2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1	»	»	»	»	»
Décembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
	»	»	»	3	3	8	23	27	22	51	37	40	9	15	17	2	3	11	14	18	15	18	15	10	9	12	6
GÈNES																											
à 45 mètres au-dessus de la mer																											
Janvier	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Février	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Mars	1	»	»	»	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Avril	3	»	2	»	»	»	1	1	»	»	»	»	1	»	1	1	»	»	2	»	»	1	1	»	»	»	»
Mai	1	»	8	»	»	»	2	1	3	1	»	»	1	1	5	6	5	5	4	1	4	5	»	»	1	»	»
Juin	1	1	10	»	»	»	2	3	1	»	»	2	»	»	1	8	6	3	5	4	2	4	6	1	»	»	»
Juillet	»	»	10	»	»	»	4	1	»	1	»	3	»	»	2	7	11	9	11	5	2	4	9	1	»	1	»
Août	»	1	11	1	1	1	2	1	»	1	»	3	»	1	2	11	6	7	6	8	1	4	7	»	»	»	»
Septembre	»	»	3	»	»	»	4	2	6	2	1	1	»	»	1	11	9	3	2	5	3	»	2	2	»	»	»
Octobre	1	»	»	»	»	1	2	3	3	3	»	3	1	»	1	2	5	2	2	3	»	»	»	1	»	»	»
Novembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1	»	»	1	2	2	1	»	»	»	1	1	»	»	»
Décembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
	7	2	44	1	1	3	17	12	13	8	1	13	2	2	9	46	47	31	32	31	9	16	31	7	»	2	»

Suite du NOMBRE DES JOURS

pendant lesquels ont soufflé chaque mois les vents.

MOIS	CALME			NORD-OUEST			NORD			NORD-EST			EST			SUD-EST			SUD			SUD-OUEST			OUEST		
	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir
NICE																											
à 20 mètres au-dessus de la mer																											
Janvier	11	11	11	3	11	11	8	11	11	5	11	11	8	11	11	2	11	11	11	11	11	5	11	11	11	11	11
Février	11	11	11	11	11	11	2	11	11	9	11	11	10	11	11	3	11	11	4	11	11	11	11	11	11	11	11
Mars	11	11	11	1	11	11	4	11	11	5	11	11	13	11	11	1	11	11	5	11	11	11	11	11	2	11	11
Avril	11	11	11	1	11	11	2	11	11	4	11	11	9	11	11	4	11	11	7	11	11	1	11	11	2	11	11
Mai	11	11	11	1	11	11	3	11	11	1	11	11	15	11	11	2	11	11	6	11	11	11	11	11	3	11	11
Juin	11	11	11	2	11	11	3	11	11	4	11	11	4	11	11	13	11	11	4	11	11	11	11	11	11	11	11
Juillet	11	11	11	5	11	11	11	11	11	2	11	11	1	11	11	8	11	11	8	11	11	11	11	11	7	11	11
Août	11	11	11	1	11	11	11	11	11	6	11	11	2	11	11	11	11	11	8	11	11	1	11	11	2	11	11
Septembre	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Octobre	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Novembre	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Décembre	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	11	11	11	14	11	11	22	11	11	36	11	11	62	11	11	42	11	11	44	11	11	2	11	11	22	11	11

* Les observations de Nice, dues à Mr Risso, n'ont été faites que le matin à 9 heures, et ont été interrompues en septembre, par l'absence de leur Auteur.

1840.

Suite du **NOMBRE DES JOURS DE GRÊLE**
pendant lesquels ont soufflé les vents.

MOIS	CALME			NORD-OUEST			NORD			NORD-EST			EST			SUD-EST			SUD			SUD-OUEST			OUEST		
	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir	matin	midi	soir
NICE																											
à 20 mètres au-dessus de la mer																											
Janvier	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Février	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Mars	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	1	»	»
Avril	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	2	»	»	»	»	»	2	»	»	»	»	»	»	1	»	»
Mai	»	»	»	1	»	»	»	»	»	1	»	»	8	»	»	1	»	4	»	»	»	»	»	»	3	»	»
Juin	»	»	»	1	»	»	1	»	»	2	»	»	3	»	»	9	»	4	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Juillet	»	»	»	5	»	»	»	»	»	2	»	»	1	»	»	6	»	7	»	»	»	»	»	»	6	»	»
Août	»	»	»	1	»	»	»	»	»	5	»	»	2	»	»	7	»	8	»	»	1	»	»	»	1	»	»
Septembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Novembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Décembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
	»	»	»	8	»	»	1	»	»	10	»	»	16	»	»	23	»	25	»	»	1	»	»	»	12	»	»

RAPPORT COMPARATIF DES VENTS

*qui ont soufflé toute l'année,
et de ceux qui ont soufflé pendant les jours de grêle.*

VENTS	GRAND S ^t -BERNARD		GENÈVE		TURIN		GÈNES		NICE	
	toute l'année	jours de grêle	toute l'année	jours de grêle	toute l'année	jours de grêle	toute l'année	jours de grêle	huit premiers mois de l'année	huit mois — Jours de grêle
Calme	"	"	13,53	13,96	"	"	11,45	13,72	"	"
Nord-Ouest	"	"	1,06	1,56	4,44	3,58	0,76	1,32	5,74	8,34
Nord	"	"	44,50	40,32	17,23	18,57	27,80	10,62	9,02	1,04
Nord-Est	57,52	59,43	5,44	4,24	26,82	33,04	14,01	5,72	14,75	10,42
Est	"	"	0,40	"	8,46	10,56	3,70	3,39	25,41	16,66
Sud-Est	"	"	2,01	0,77	2,90	4,10	21,32	32,07	17,21	23,96
Sud	"	"	3,80	8,14	11,75	12,10	11,64	18,63	18,03	26,04
Sud-Ouest	42,48	40,57	28,45	30,24	19,30	11,05	8,62	13,98	0,82	1,04
Ouest	"	"	0,81	0,77	9,10	7,0	0,70	0,55	9,02	12,50
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

L'examen de ces états conduit aux remarques suivantes :

Au *Grand Saint-Bernard*, deux seuls vents soufflent toute l'année; ce sont les vents froids de Nord-Est, et les vents chauds de Sud-Ouest, dans la proportion : : 57,52 : 42,48. Pendant les jours de grêle, ils ont été : : 59,43 : 40,57, c'est-à-dire que le vent septentrional est devenu plus fréquent.

Genève a présenté plus de variation dans la nature des vents, soit pendant l'année, soit pendant les jours de grêle. Le nombre des jours calmes a été le même dans l'un et l'autre cas, soit environ 14 pour 100; mais le rapport des vents froids aux vents chauds à été : : 51,40 : 35,06

pour l'année, tandis que pour les jours de grêle, il est devenu : : 46, 12 : 39, 92. Ce sont donc les vents méridionaux qui ont augmenté.

Turin n'a eu aucun jour calme. Les variations des vents se sont reproduites encore plus fréquemment qu'à Genève, et le rapport des vents a été pour l'année : : 56, 99 : 43, 05, et pour les jours de grêle : : 65, 75 : 34, 25, c'est-à-dire, que dans ce dernier cas, les vents froids ont fortement pris le dessus.

Gênes a offert, à-peu-près, le même nombre de jours calmes que Genève, dans l'année et pendant les jours de grêle, soit 12 à 14 pour cent. Le rapport des vents froids aux vents chauds a été pour l'année : : 46, 27 : 42, 28, et pour les jours de grêle : : 21, 05 : 65, 23. Ainsi les vents chauds ont augmenté dans une proportion considérable.

Enfin, quoique les observations de Nice ne soient pas aussi nombreuses que les précédentes, et qu'ainsi il soit difficile d'en tirer des inductions aussi positives, on voit néanmoins que le rapport a été pour l'année : : 54, 92 : 45, 08, et pour les jours de grêle : : 36, 46 : 73, 54, c'est-à-dire, que l'augmentation des vents chauds a subi la même progression croissante qu'à Gênes.

En résumé le rapport des vents a été pour les différens lieux d'observation :

	CALME		VENTS FROIDS		VENTS CHAUDS	
	Année	Jours de grêle	Année	Jours de grêle	Année	Jours de grêle
Grand Saint-Bernard ...	»	»	57, 52	59, 43	42, 48	40, 57
Genève	13, 53	13, 96	51, 40	46, 12	35, 06	39, 92
Turin	»	»	56, 99	65, 75	43, 05	34, 25
Gênes	11, 45	13, 72	46, 27	21, 05	42, 28	65, 23
Nice	»	»	54, 92	36, 46	45, 08	73, 54

L'analogie qui existe entre le rapport des vents qui ont régné à Genève, et ceux de Gênes et de Nice est frappante. Cependant elle ne doit point surprendre, si l'on considère que la première de ces villes, malgré sa position élevée au-dessus de la mer (407 mètres), reçoit presque sans obstacle intermédiaire l'action des vents méridionaux par

la grande vallée du Rhône et de ses affluens, tandis que le Piémont se trouve cerné par la chaîne des Apennins et par celle des Alpes, lesquelles doivent nécessairement arrêter et modifier les vents qui tendraient à suivre la même direction.

En comparant d'ailleurs le nombre des jours de grêle dans chaque région, on trouve qu'ils se sont répartis :

	<i>Savoie</i>	<i>Piémont</i>	<i>Ligurie</i>
Mars	»	»	1
Avril	1	4	1
Mai	2	15	6
Juin	11	18	4
Juillet	11	24	4
Août	12	19	10
Septembre	2	16	10
Octobre	»	6	8
Novembre	»	1	3
	—	—	—
	39	103	47 ,

c'est-à-dire que leur nombre a été, à-peu-près, le même en Ligurie que en Savoie, mais qu'il est devenu bien plus considérable en Piémont, ce qui paraît démontrer l'influence spéciale des vents septentrionaux sur la formation de ce météore.

Pendant les jours de grêle, surtout quand il s'est agi de grêles d'une certaine étendue, le vent régnant à la hauteur du Grand Saint-Bernard s'est trouvé presque toujours contraire à celui de la contrée grêlée. C'était ordinairement le vent du Nord ou Nord-est, tandis que le Sud ou le Sud-Ouest se faisait sentir dans les régions inférieures de Genève, Turin, Nice et Gènes.

Enfin les orages de grêle ont été, à-peu-près, constamment accompagnés d'un changement de vent dans la région inférieure, et c'est ordinairement le vent le plus froid qui a pris le dessus.

Ces données auraient, sans doute, besoin d'être constatées pendant plusieurs années consécutives pour acquérir tout le degré de certitude nécessaire. Elles me semblent toutefois déjà suffisantes pour qu'il ne soit pas permis de méconnaître d'une part l'influence qui doit être attribuée au concours des deux vents, septentrional et méridional, relativement à la production de la grêle, et d'autre part, la formation de ce météore à un niveau généralement inférieur à celui du Grand S'-Bernard ou des hautes Alpes.

Inutilité du paragrêlage.

Je ne terminerai pas ces considérations sans dire un mot des paragrêles. L'abandon complet où sont tombés ces appareils après la grande vogue dont ils ont joui momentanément, démontre assez qu'ils n'ont pas rempli le but pour lequel ils avaient été construits. Mais il n'est peut-être pas inutile de remarquer que ce résultat aurait été prévu, si l'on eût admis que la grêle était spécialement due au concours de deux vents, et que l'électricité n'y jouait pas le rôle principal. On conçoit que des plantations, faites sur les pentes des montagnes, et dans des gorges, peuvent bien fixer les vapeurs atmosphériques, et prévenir la formation des nuages sur quelques points réputés orageux, comme on assure l'avoir remarqué en Tarantaise; mais elles ne pourraient jamais être considérées que comme un remède local et accidentel, lequel d'ailleurs ne réussirait point à empêcher la formation de ce météore dans tous les cas où il peut se reproduire.

MÉMOIRE

SUR

LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

À LA SURFACE DE DEUX SPHÈRES CONDUCTRICES COMPLÈTEMENT ISOLÉES

PAR

JEAN PLANA

« L'observation, quelquefois le hasard, découvrent les phénomènes ; la méthode expérimentale les développe et détermine leurs lois physiques : mais le dernier mystère des forces élémentaires qui les produisent ne peut être mis en évidence que par la puissance de la pensée ».

Discours de M. Biot. - Voyez le *Journal des Savans*, avril 1821.

Lu dans la séance du 10 mars 1844.

Les deux célèbres Mémoires sur la distribution de l'électricité à la surface des corps parfaitement conducteurs, présentés par Poisson en 1812 et 1813 à l'Académie des Sciences de Paris, renferment le principe général du véritable équilibre électrique, qui, désormais, avec la loi de COULOMB, doit servir de base à la solution de tous les problèmes d'électricité statique, quelle que soit d'ailleurs la cause qui retient l'électricité libre à la surface des corps conducteurs. La masse de la matière électrique et la figure qu'elle affecte sont les seuls élémens pris en considération.

Peu importe, pour la solution du problème qui nous occupe, de savoir, que la figure de la couche électrique est maintenue en équilibre par la pression de l'air, ou celle de l'éther; ou par une action particulière de la matière pondérable du corps conducteur, d'une manière qui nous est inconnue. C'est ainsi, par exemple, que pour calculer l'attraction d'un ellipsoïde liquide, nous pouvons, à la rigueur, nous passer de savoir que la force centrifuge, née de sa rotation, est celle qui associée avec la pesanteur maintient la figure ellipsoïdale de la masse. Et à l'égard des expériences par lesquelles, dans ces dernières années, quelques Physiciens ont cru pouvoir démolir le principe dont nous parlons, je me bornerai à dire qu'elles ne me paraissent pas avoir nécessairement la seule interprétation qui leur a été attribuée. Il faudrait établir les équations relatives à ces expériences d'après le principe de Poisson, et démontrer ensuite que les conditions ainsi exprimées sont incompatibles avec les résultats de l'observation. Alors les Géomètres seraient forcés

d'y renoncer, en attendant la découverte d'un autre point d'appui pour une théorie mathématique. Un tel travail n'ayant pas été fait, ni essayé avec succès, que je sache, j'ai repoussé toutes les objections d'un autre genre, et dans ce Mémoire j'ai adopté, sans restriction, la loi de COULOMB et le principe de l'équilibre électrique, tel qu'il a été défini et développé par POISSON.

L'application qu'il en a faite au cas particulier où il s'agit de deux sphères conductrices électrisées, mises en contact, ou séparées par un grand ou un petit intervalle, quoique conduite avec une admirable analyse, est loin d'être, sous plus d'un rapport, complète. Par un examen approfondi l'on reconnait que, malgré le mérite incontestable de ces deux Mémoires de POISSON, la question avait besoin d'être entièrement reprise, soit pour conduire à son dernier terme la solution sous forme finie, soit pour rectifier plusieurs résultats qui ne sont pas une exacte conséquence des équations fondamentales. En outre il fallait offrir un système de formules susceptibles d'une plus facile réduction numérique. Mais c'était un grand pas, celui d'avoir soumis à l'analyse algébrique une des branches de la physique expérimentale qui semblait se refuser à toute déduction théorique rigoureuse. Si le principe fondamental peut être saisi d'un coup d'œil, il y a, il faut l'avouer, une énorme distance entre ce point de départ et l'ensemble des conséquences variées qu'il recèle dans son énoncé; pur, simple, et dégagé de toute action de la matière pondérable sur la matière constituante le fluide électrique. Pour les faire ressortir, et donner ainsi raison de l'expérience (ce qui doit arriver si le principe est vrai en lui-même) il faut souvent employer des artifices de calcul qui ne sont pas faciles à imaginer. Et on trouve dans les deux Mémoires de POISSON déjà cités plusieurs résultats pour lesquels il faut s'engager dans des recherches d'analyse détournées et épineuses, si l'on veut acquérir des notions claires sur le mode de leur existence.

Je sens que cela peut être inutile pour la plupart des Physiciens, qui, contents d'avoir une idée du principe de l'équilibre électrique et des principales conséquences qui peuvent s'en déduire sans le secours de l'expérience, se bornent à lire les deux préfaces de POISSON, où ils trouvent tout ce qui peut les intéresser. Cette facilité, offerte par l'auteur lui-même, cache en quelque sorte le mérite de la difficulté vaincue; et là, où il y a une théorie profonde à admirer, il est pénible de voir qu'on puisse se faire illusion, et croire que l'effort du génie mathématique n'a en

d'autre effet que celui de produire d'une manière savante la simple confirmation des expériences et des lois établies par COULOMB. Mais les Physiciens-Géomètres conviendront aisément, que la singularité de l'analyse employée par Poisson mérite toute leur attention. Et c'est par une méditation long-temps continuée sur ce sujet, que j'ai trouvé les principaux résultats dont je vais rendre compte dans ce préambule. Pour plus de clarté je distinguerai les trois cas qui peuvent se présenter lorsqu'on demande les lois générales de la distribution de l'électricité entre deux sphères.

Le premier est celui où les sphères sont mises en contact: le second lorsqu'elles sont séparées par un intervalle quelconque: le troisième cas est celui où les surfaces des deux sphères en présence sont séparées par un intervalle fort petit en comparaison de la distance des deux centres. Ce troisième cas, quoiqu'il ne soit qu'une variété du second, exige un développement spécial pour mettre en évidence les modifications tout-à-fait remarquables que la circonstance de la petitesse de l'intervalle fait subir aux formules générales.

Afin de rattacher cette théorie à une autre déjà connue j'ai commencé par faire voir dans le premier Chapitre de ce Mémoire, que les formules primitives peuvent être immédiatement dérivées des formules relatives à l'attraction des sphéroïdes, données par LAPLACE dans le second Volume de la Mécanique Céleste. Cette application est permise, puisque la raison inverse du carré de la distance est (comme pour la matière pondérable) la loi de l'attraction et de la répulsion entre les élémens d'une masse de fluide électrique.

Je me suis attaché à démontrer d'une manière qui me paraît nouvelle et rigoureuse le principe que l'on énonce en disant: que la différence des répulsions électriques sur deux points placés sur la même normale, l'un très-près de la surface extérieure et l'autre très-près de la surface intérieure, est proportionnelle à l'épaisseur de la couche électrique. La démonstration synthétique de LAPLACE ne peut être admise sans l'appui de plusieurs développemens propres à faire cesser les objections que l'on pourrait élever contre les hypothèses sur lesquelles elle se fonde. J'ai ensuite remarqué que les considérations employées pour démontrer ce principe pouvaient éclairer la théorie du *plan d'épreuve*, si heureusement imaginé par COULOMB: mais le Mémoire étant déjà terminé, j'ai consigné dans une addition placée à la fin ce développement ultérieur des §§ III et IV.

Après avoir établi les deux équations fondamentales aux différences finies et variables qui expriment les conditions de l'équilibre électrique entre les deux sphères, quelle que soit la distance de leurs centres, j'ai commencé le second Chapitre par l'intégration de ces équations pour le cas particulier où les sphères sont mises en contact. La méthode que j'ai employée pour cela, si dans le fond elle est la même que celle imaginée par Poisson, je puis dire que je l'ai reproduite ici d'une manière nouvelle et propre à rendre plus facile et plus lumineuse la marche du calcul et celle des transformations qui se succèdent.

Pour faciliter autant que possible la comparaison de cette théorie avec l'observation j'ai réuni plusieurs séries convergentes propres à calculer les épaisseurs *moyennes* et les épaisseurs *maximum* des deux couches électriques. Ces dernières ont lieu, pendant le contact, aux deux points qui lui sont diamétralement opposés: et les premières succèdent au contact, lorsque l'on sépare les deux sphères de manière que chacune d'elles, maintenue isolée, puisse emporter la quantité totale d'électricité dont elle était reconvertie et la retenir uniformément distribuée.

On a par là des formules fort commodes pour calculer, en fonction de la quantité totale de l'électricité primitivement communiquée à l'une et à l'autre sphère, le rapport suivant lequel cette quantité totale se partage entre les deux sphères: ce qui peut être utile pour varier les expériences sans être gêné dans le choix des rayons. J'ai même calculé une petite table, où l'on pourra prendre immédiatement ce rapport, lorsque celui des rayons sera donné par une fraction rationnelle assez simple. Cette table placée vers la fin du Mémoire (*) est précédée d'une autre table qui rend très-facile le calcul des épaisseurs *maximum*.

La loi de l'épaisseur variable de la couche électrique qui recouvre deux sphères en contact peut être exprimée par trois séries distinctes. La première est particulièrement applicable aux points qui avoisinent ceux opposés au point de contact. La seconde, au contraire, ayant explicitement la propriété de devenir *nulle* au point de contact, offre plus d'avantage pour exprimer la loi de cette épaisseur aux environs de ce point. Ces deux séries remarquables sont tout-à-fait nouvelles. Poisson avait seulement reconnu l'existence de la troisième qui, généralement parlant, s'applique aux points de la couche placés entre les extrêmes.

Au reste, on peut aussi exprimer cette loi sous forme finie, par des intégrales définies. Poisson avait trouvé le principe propre à cette trans-

* Voyez § XXVII, page 379.

formation: mais la complication de l'expression lui avait paru devoir rendre ce résultat théorique inutile. Cependant un examen attentif m'a fait découvrir que l'on pouvait simplifier considérablement le résultat primitif, et l'on verra dans ce Mémoire, que la formule est en elle-même fort remarquable et susceptible d'être évaluée par les quadratures avec plus de facilité qu'on ne l'aurait d'abord espéré.

Chaque terme de la troisième série dont je viens de parler est un radical de la forme

$$(A + B \cos. \theta)^{-\frac{3}{2}};$$

θ désignant la distance angulaire du point que l'on considère sur la surface d'une des deux sphères au point de contact. Le calcul numérique de cette série pour une valeur donnée de θ est fort pénible; et d'autant plus que l'angle θ est plus petit. A l'aide d'une équation transcendante facile à former, on peut connaître *a priori* combien de termes on doit calculer pour avoir une approximation donnée. Et ce nombre est, en général, assez grand pour imprimer un sentiment de frayeur. Par exemple, pour un point placé à 30° du point de contact de deux sphères égales, il faut calculer au moins 120 termes de la série si l'on veut que le résultat soit exact à un millième près. Ajoutons à cela, qu'il y a même un point où la série cesse d'être convergente; ce qui arrive aux environs du point de contact. Alors on croit d'abord pouvoir sauver la difficulté en mettant chaque radical sous la forme

$$\{A + B - B(1 - \cos. \theta)\}^{-\frac{3}{2}},$$

pour les développer ensuite suivant les puissances entières et positives du *sinus verse*. Et c'est effectivement ainsi que Poisson a opéré la transformation au N.º 38 de son premier Mémoire. Mais, sans faire attention à la nature intime de la fonction qu'il s'agissait de développer, il a borné le développement de chaque radical aux *deux* premiers termes, et rien n'indique qu'il ait remarqué, ni l'impossibilité de la forme pré-supposée, ni la loi générale qui a lieu pour la somme de tous ces développemens dont le nombre est infini. Cette limitation aux deux premiers termes a été la cause radicale d'une interprétation erronée, qui, pendant plusieurs semaines, a tourmenté mon imagination. Voici en quoi elle consiste.

Poisson voyant que chaenn des deux termes qu'il avait ainsi calculé était *nul*, s'est hâté d'en tirer la conséquence que l'épaisseur de la couche

électrique était développable par une série dont le premier terme significatif devait être le produit d'un coefficient numérique par le carré de $1 - \cos.\theta$. Et comme, tacitement, il supposait la série légitime à l'égard de la forme, et même convergente, il croyait avoir de la sorte démontré par la théorie le fait observé par COULOMB; savoir, que l'épaisseur de la couche électrique était presque insensible jusqu'à une assez grande distance du point de contact. Mais, sans contester le fait, on pouvait démontrer qu'il y avait illusion dans cette manière de l'expliquer. Car, en calculant le troisième terme de la série, lequel a pour facteur le carré du *sinus verse*, on le trouve composé de plusieurs quantités, qui par une destruction mutuelle donnent un résultat exactement *nul*. De sorte que, en transportant à ce point l'argument de POISSON, on en conclurait que la série dont il s'agit commence pour un terme de l'ordre du *cube* du *sinus verse*; ce qui semblerait devoir rendre encore plus lent l'accroissement de l'épaisseur de la couche depuis le point de contact. Mais cette conséquence ne serait pas moins illusoire que la précédente. Pour s'en convaincre il n'y a qu'à calculer le quatrième terme pour voir qu'il est également *nul*. Et cela arrive aussi pour les termes ultérieurs par une étonnante combinaison entre les différentes quantités, qui, associées aux *nombres Bernoulliens*, composent ces coefficients.

En lisant ce Mémoire l'on verra que la cause radicale de cette singularité tient à ce que la véritable forme de la série par laquelle la fonction dont il s'agit est développable, doit contenir les puissances négatives et fractionnaires du *sinus verse*, et non les puissances positives: ou bien, les puissances négatives et fractionnaires d'un binôme de la forme $1 + p(1 - \cos.\theta)$. C'est de quoi on peut avoir une idée plus claire par la simple inspection des équations (121) et (127) données, pour la première fois, dans ce Mémoire. L'on rencontre ici une espèce de phénomène d'analyse semblable à celui que présente la formule propre à exprimer la température des couches de la Terre à une petite profondeur, comparativement à son rayon, pour l'époque très-éloignée de nous, où la température de l'espace traversé par le système solaire était à son *maximum*. Si l'on voulait développer cette fonction suivant les puissances descendantes de la profondeur, on trouverait égaux à zéro les termes successifs de la série (*).

Cependant le fait observé par COULOMB étant incontestable, nous en avons trouvé l'explication dans notre série (127) qui, pour une distance

(*) Voyez p. 37 du Supplément à la Théorie de la Chaleur par POISSON.

angulaire de 10° du point de contact, donne dans le cas des sphères égales, par exemple, une intensité qui est à peine la *millième* partie de l'intensité moyenne. Et certes, d'aussi faibles intensités électriques devaient paraître insensibles d'après la manière dont elles étaient observées par COULOMB.

J'ai terminé le second Chapitre en donnant les détails du calcul qui sont à l'appui de cette explication. Cela était d'autant plus nécessaire qu'il fallait faire voir qu'il n'y a aucune similitude entre la véritable formule, et la formule empirique par laquelle COULOMB croyait aussi expliquer la lenteur du même accroissement (*).

Le troisième Chapitre renferme la solution du problème pour le cas où les deux sphères électrisées seraient séparées par un intervalle quelconque. Ici, l'intégration des deux équations de l'équilibre électrique a été faite par un procédé tout-à-fait analogue à celui du contact. Un examen attentif fait sur la forme du résultat m'a fourni des formules nouvelles, à la fois générales et explicites, propres à résoudre avec plus de facilité, par les séries, le cas particulier où les surfaces des deux sphères électrisées en présence sont à une grande distance; ou, du moins, sont placées de manière que le rayon de la plus petite est fort au-dessous de la distance de son centre à la surface de la plus grande. Ce cas est le plus simple de tous, sous le rapport de l'expression analytique. Poisson l'avait traité dans son premier Mémoire; et j'ai perfectionné la solution qu'il en avait donnée en découvrant la loi par laquelle on forme les termes successifs de la série qui s'y rapporte. Ce perfectionnement rend manifeste l'avantage du principe à l'aide duquel, par une simple permutation entre les lettres, on peut adapter à la seconde sphère les formules trouvées pour la première. Ce principe, naturel à prévoir, se trouve démontré *a priori* dans le sixième paragraphe de mon Mémoire, tandis que Poisson l'a présenté comme une conséquence de l'intégration déjà exécutée (**).

Les formules générales, dont je viens de parler, ont la forme convenable pour démontrer *a priori* le fait, que l'influence mutuelle entre deux sphères séparées ne saurait augmenter la masse *algébrique* de l'électricité positive et négative répandue sur leurs surfaces. Cette démonstration rapportée vers la fin du § XVIII a l'avantage d'être tout-à-fait explicite, et de n'avoir pas besoin que l'expression de l'épaisseur

(*) Voyez page 455 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'année 1787.

(**) Voyez la page 74 de son premier Mémoire, et les pages 23 et 24 du second.

électrique soit, préalablement, réduite en une série composée de termes semblables à ceux dont LAPLACE a fait la base de sa Théorie de la figure et de la Chaleur de la Terre, si justement estimée par les Géomètres.

Mais ces mêmes formules générales subissent une modification remarquable, lorsque les surfaces des deux sphères électrisées après avoir été mises d'abord en contact sont séparées pour être replacées à des distances diverses. Alors, la circonstance, que les épaisseurs moyennes et primitives des deux couches cesse d'être arbitraire donne lieu à des formules nouvelles qui deviennent la base de l'explication, comme de la mesure, des expériences faites par COULOMB avec des sphères inégales, graduellement séparées du contact pour être amenées à une distance telle, où il voyait que l'électricité devient de nouveau *nulle*, non sur les deux sphères mais seulement sur la plus petite des deux, au point même qui avait été en contact avec la plus grande. La formation et la solution de l'équation qui donne *a priori* la distance entre les surfaces où ce phénomène a lieu, présentait une difficulté assez grande que je ne puis clairement indiquer ici; mais en lisant les §§ XX, XXI et XXII l'on verra où elle prend sa source et de quelle manière elle a été surmontée. C'est un problème qui avait échappé aux recherches profondes de Poisson; car il dit, dans le préambule de son second Mémoire: « il » paraît difficile de déterminer cette distance *a priori*, lorsque les rayons » des deux sphères que l'on sépare sont donnés ». Toutefois, afin d'offrir aux Physiciens toute la facilité possible, pour vérifier et varier les expériences de ce genre que COULOMB croyait « propres à jeter du jour sur » cette matière », j'ai terminé le § XXII par une petite table où l'on pourra prendre cette distance pour plusieurs valeurs de la fraction qui exprime le rapport des rayons des deux sphères.

Considérant ensuite que les séries appliquées à la solution des problèmes précédents étaient impuissantes, lorsque la distance des surfaces devient fort petite, et même évanouissante, je les ai transformées de manière à pouvoir, en général, exprimer l'épaisseur de la couche électrique sous forme finie par des intégrales définies. Ce problème avait été *in abstracto* résolu par Poisson dans son second Mémoire; mais il fallait encore franchir une grande distance pour faire disparaître le signe imaginaire et arriver aux formules nouvelles que l'on trouvera dans le § XXIII de ce Mémoire; on verra que ces formules sont dignes de fixer l'attention par la symétrie, et même par la simplicité de leur forme.

Toutefois elles deviennent incomparablement plus simples à l'égard des quatre points placés sur la ligne des centres, ainsi que je le fais voir dans le § XXIV.

Je me suis attaché à élaborer ces dernières formules, parceque c'est par elles que j'ai pu développer dans le quatrième et dernier Chapitre les lois tout-à-fait remarquables de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices séparées par un petit intervalle, en considérant, pour les points les plus rapprochés et les plus éloignés, les deux cas qui peuvent se présenter: c'est-à-dire, celui de la séparation qui précède le contact, et celui de la séparation qui aurait lieu *après* le contact.

J'ai trouvé pour le premier de ces deux cas les formules de Poisson, abstraction faite d'une correction qui me paraît due à une méprise de calcul (*). J'ai donné à ces formules une forme propre à faciliter les applications qu'on en voudrait faire, comme on peut le voir par les équations (351) et la Table qui les accompagne. Cela peut être utile pour comparer la théorie avec l'observation des distances, qui, avec, ou sans l'interposition d'une lame de verre ou de toute autre substance isolante différente de l'air atmosphérique, précèdent immédiatement la rupture de l'équilibre électrique et l'apparition de l'étincelle.

Mais en considérant ce qui se passe *après* le contact, l'accord qui a lieu pour des sphères *inéga*les entre mes formules et celles de Poisson, cesse de subsister pour le cas particulier où les deux sphères sont *égales* et *également* électrisées. Ici en bornant d'abord les développemens aux termes de la quatrième puissance de la variable δ qui règle l'approximation, j'ai trouvé que la série de la forme

$$k\delta^2 + k'\delta^4 + k''\delta^6 + \text{etc.},$$

qui représente l'épaisseur de la couche électrique, était telle que l'on avait $k=0$, $k'=0$, tandis que Poisson a trouvé $k=0$ et

$$k' = \frac{1}{120 \cdot \text{Log. } 2}$$

dans la page 105 de son second Mémoire. Mais je fais voir que cela tient à une erreur de calcul qu'il a commise à la page 83. D'après cela il devenait nécessaire de calculer le terme suivant $k''\delta^6$, et en exécutant ce calcul j'ai obtenu pour k'' un coefficient numérique *né*gatif. De là j'ai conclu qu'il faudra concevoir que, immédiatement après la séparation de deux sphères *égales*, il y a, par influence, décomposition

(*) Voyez les équations (324), (325) et la page 341.

d'une partie de l'électricité naturelle et affluence d'électricité *contraire* vers les points qui étaient primitivement en contact; ce qui est une conséquence de la théorie opposée à celle énoncée par Poisson à la page 106 de son second Mémoire. Cet exemple prouve qu'il est par fois difficile de tirer des mêmes équations fondamentales les véritables conséquences qu'elles recèlent. Je puis en offrir une nouvelle preuve en ajoutant que dans le XXVII^{ème} et dernier paragraphe j'obtiens, pour les intensités électriques des points les plus éloignés qui ont lieu *après* le contact, deux expressions où la variation est *logarithmique* et non proportionnelle à la petite distance qui sépare les deux surfaces, ainsi que Poisson l'avait affirmé en finissant son second Mémoire. Au reste je ne puis donner ici une idée exacte de tous les résultats qui se trouvent dans le dernier Chapitre: on ne peut absolument en prendre connaissance que par une complète lecture. Je dois en dire autant à l'égard de deux Notes placées à la fin du Mémoire. La première offre le calcul des expériences faites par COULOMB avec plusieurs sphères électrisées mises en contact; desquelles il expose les détails dans le Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1788. La seconde Note, qui serait mieux placée à la tête de ce Mémoire, contient une démonstration nouvelle sur la loi fondamentale de la répulsion électrique. J'ai voulu faire voir par une analyse, qui me paraît fort simple, que le seul fait général de l'électricité *libre*, toujours amenée par couches disposées en équilibre à la surface des corps conducteurs, suffit pour démontrer *a priori*, que la loi de cette force doit être la raison inverse du carré de la distance. C'est ainsi que, d'après les faits généraux qui s'observent dans les différens cas d'équilibre qui ont lieu sous l'action mutuelle des courans voltaïques, on peut, sans aucune mesure effective, déterminer le signe et la valeur absolue des *deux* constantes qui entrent dans la formule primitive découverte par AMPÈRE.

J'espère que les Géomètres surmonteront un jour les difficultés que présente la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs d'une figure différente de la sphérique. Peut-être on trouvera des formules, où la loi de cette distribution y sera empreinte avec cette admirable simplicité qui préside souvent aux lois de la nature. La complication est ordinairement inhérente à la limitation, et même aux défauts des premières conceptions humaines. Une méditation continuée et bien dirigée soulève enfin le voile qui couvrait les formes algébriques qui ont l'avantage d'être à la fois les plus simples et les plus générales.

CHAPITRE PREMIER

EXPOSITION DES FORMULES GÉNÉRALES.

§ I.

En empruntant les formules de LAPLACE sur l'attraction et la répulsion des sphéroïdes peu différens d'une sphère, il résulte du théorème démontré dans la page 37 du second volume de la *Mécanique Céleste*, que l'action d'une couche sphéroïdale sur un point qui lui est extérieur sera nulle, si les rayons vecteurs r'' et r' de sa surface extérieure et intérieure sont tels que l'on ait;

$$(1) \dots r'' = a' + \alpha a' \{ Y'_{(1)} + Y'_{(2)} + Y'_{(3)} + Y'_{(4)} + \text{etc.} \} ,$$

$$(2) \dots r' = a + \alpha a \left\{ \frac{a'}{a} Y'_{(1)} + Y'_{(2)} + \frac{a}{a'} Y'_{(3)} + \frac{a^2}{a'^2} Y'_{(4)} + \text{etc.} \right\} .$$

La différence $r'' - r'$ de ces deux rayons, sera

$$r'' - r' = (a' - a) + \alpha (a' - a) Y'_{(2)} + \frac{\alpha (a'^2 - a^2)}{a'} Y'_{(1)} + \frac{\alpha (a'^3 - a^3)}{a'^2} Y'_{(4)} + \text{etc.} :$$

donc, si l'on fait $a' - a = b$; l'on aura, en mettant en évidence le facteur commun b ;

$$r'' - r' = b \left\{ 1 + \alpha Y'_{(2)} + \frac{\alpha (a' + a)}{a'} Y'_{(3)} + \frac{\alpha (a'^2 + a'a + a^2)}{a'^2} Y'_{(4)} + \frac{\alpha (a'^3 + a'^2 a + a' a^2 + a^3)}{a'^3} Y'_{(5)} + \text{etc.} \right\} .$$

La différence $a' - a$ étant de l'ordre de petitesse de la quantité α , c'est-à-dire de l'excentricité du sphéroïde, l'on peut ici faire $a' = a$ dans les termes multipliés par α , puisque, dans cette théorie, l'on néglige

le carré de α . Alors, en posant pour plus de simplicité, $\gamma = r'' - r'$, il viendra ;

$$(3) \dots \gamma = b + \alpha b \{ Y'_{(2)} + 2 Y'_{(3)} + 3 Y'_{(4)} + 4 Y'_{(5)} + \text{etc.} \}.$$

Telle est l'expression (que Poisson obtient dans la page 24 du 1^{er} Mémoire) de l'épaisseur de la couche électrique en équilibre sur la surface du sphéroïde ayant r'' pour le rayon vecteur de sa surface extérieure.

Je préfère cette démonstration, parceque, elle est une conséquence immédiate d'une théorie déjà connue.

La masse de cette couche, c'est-à-dire la quantité d'électricité qu'elle contient, sera exprimée par la double intégrale

$$a'^2 \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \gamma' \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\omega' ;$$

où θ' et ω' désignent les deux angles qui déterminent les coordonnées polaires d'un rayon vecteur quelconque correspondant à l'épaisseur γ' . Cette masse sera *vitreuse* ou *résineuse* suivant que le signe qui l'affecte sera positif ou négatif. Mais, $Y'_{(n)}$ est, comme l'on sait, une fonction de ces deux angles telle que l'on a

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y'_{(n)} \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\omega' = 0 ;$$

donc, la masse de la couche sera toujours exprimée par $4\pi a'^2 b$. De sorte que, elle est indépendante des quantités variables $Y'_{(2)}$, $Y'_{(3)}$ etc.; et sa valeur est équivalente à celle d'une couche sphérique très-mince qui aurait a' pour rayon et b pour épaisseur constante.

§ II.

Pour avoir la valeur de V relative à l'action de la même couche sur un point extérieur placé à la distance x de son centre de gravité; c'est-à-dire, la somme des molécules électriques que contient la couche divisées, respectivement, par leurs distances à ce point, il faudra appliquer la formule (3) posée dans la page 30 du second Volume de la

Mécanique Céleste; ce qui revient à considérer la couche comme la différence de deux sphéroïdes dont les rayons vecteurs de leurs surfaces sont r'' et r' . D'après cette manière de voir nous avons d'abord

$$V = \frac{4\pi}{3x}(a'^3 - a^3) + \frac{4\pi\alpha}{x} \left\{ \begin{aligned} &\left(a'^4 - \frac{a'}{a} \cdot a^4 \right) \frac{Y'_{(1)}}{3x} + (a'^5 - a^5) \frac{Y'_{(2)}}{5x^2} \\ &+ \left(a'^6 - \frac{a}{a'} \cdot a^6 \right) \frac{Y'_{(3)}}{7x^3} + \left(a'^7 - \frac{a^2}{a'^2} \cdot a^7 \right) \frac{Y'_{(4)}}{9x^4} + \text{etc.} \end{aligned} \right\};$$

et en mettant en évidence le facteur commun b , l'on aura

$$\begin{aligned} V = & \frac{4\pi b}{3x}(a'^3 + a a' + a^3) + 4\pi\alpha b \cdot a'(a'^2 + a a' + a^2) \frac{Y'_{(1)}}{3x^2} \\ & + 4\pi\alpha b (a'^4 + a'^3 a + a^2 a'^2 + a' a^3 + a^4) \frac{Y'_{(2)}}{5x^3} \\ & + \frac{4\pi\alpha b}{a'}(a'^6 + a'^5 a + a'^4 a^2 + \dots + a^6) \frac{Y'_{(3)}}{7x^4} \\ & + \frac{4\pi\alpha b}{a'^2}(a'^8 + a'^7 a + \dots + a^8) \frac{Y'_{(4)}}{9x^5} \\ & + \frac{4\pi\alpha b}{a'^3}(a'^{10} + a'^9 a + \dots + a^{10}) \frac{Y'_{(5)}}{11x^6} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Actuellement, si l'on fait $a' = a$ dans les termes multipliés par α , l'on aura

$$(4) \dots V = \frac{4\pi a^3 b}{x} \left\{ 1 + \alpha \left[\frac{a}{x} Y'_{(1)} + \frac{a^2}{x^2} Y'_{(2)} + \frac{a^3}{x^3} Y'_{(3)} + \text{etc.} \right] \right\};$$

ce qui s'accorde avec la valeur de V que l'on voit dans la page 26 du Mémoire déjà cité.

Pour avoir les trois composantes rectangulaires de la force qui agit sur le point déterminé par les trois coordonnées polaires x , ϑ et ω , il

fandra déduire de la formule (4) les trois quantités

$$-\left(\frac{dV}{dx}\right), \quad -\frac{1}{x}\left(\frac{dV}{d\vartheta}\right), \quad -\frac{1}{x\sin\vartheta}\left(\frac{dV}{d\omega}\right).$$

Mais nous n'entrerons pas dans le détail des conséquences que l'on peut déduire de la considération de ces forces. Nous rappellerons seulement que l'on tire de là et de l'équation (3), après avoir fait $x=r''$ et supprimé les termes qui seraient multipliés par le carré de α ;

$$(5) \dots -\left(\frac{dV}{dx}\right)=4\pi\gamma.$$

De sorte que cette composante de la force répulsive dirigée suivant le rayon vecteur r'' , est, à la surface extérieure du sphéroïde, proportionnelle en chaque point à l'épaisseur γ de la couche. C'est d'après cette propriété que l'on peut, expérimentalement, évaluer le rapport des épaisseurs de la couche électrique qui ont lieu sur deux points donnés de sa surface. Cette variabilité du coefficient différentiel $-\left(\frac{dV}{dx}\right)$ fait un contraste frappant avec la valeur constante que reçoit V pour tous les points de la surface. En effet, si l'on fait $x=a$ dans les termes multipliés par α , la formule (4) donne d'après l'équation (1);

$$V=\frac{4\pi a^2 b}{x} \cdot \frac{r''}{a'}=4\pi ab \cdot \frac{a}{a+b};$$

c'est-à-dire une quantité constante égale à $4\pi ab$, en négligeant le carré de b .

§ III.

Pour obtenir les deux valeurs de V que l'on voit dans la page 35 du Mémoire de Poisson, il suffit de supprimer la partie due à la sphère du rayon a dans les formules (3) et (4), posées dans les pages 30 et 36 du second Volume de la Mécanique Céleste. En outre, il faut observer que le facteur commun $\alpha \cdot a$ est censé compris dans les fonctions $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, etc. Alors l'on a, comme Poisson;

$$(6) \dots a+\gamma=a+\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\text{etc.}$$

pour le rayon vecteur de la surface extérieure de la couche; et

$$(7) \dots V = 4\pi a \left\{ r_0 + \frac{x}{3a} r_1 + \frac{x^2}{5a^2} r_2 + \frac{x^3}{7a^3} r_3 + \text{etc.} \right\};$$

$$(8) \dots V = \frac{4\pi a^2}{x} \left\{ r_0 + \frac{a}{3x} r_1 + \frac{a^2}{5x^2} r_2 + \frac{a^3}{7x^3} r_3 + \text{etc.} \right\};$$

pour les valeurs de V qui se rapportent, respectivement, à son action sur un point intérieur ou extérieur.

S'il était question d'une couche ayant

$$a + r = a + r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \text{etc.},$$

$$a + r' = a + r'_0 + r'_1 + r'_2 + r'_3 + \text{etc.},$$

pour les rayons vecteurs de sa surface extérieure et intérieure, les mêmes formules de la Mécanique Céleste, donneraient

$$V = 4\pi a \left\{ (r_0 - r'_0) + \frac{x}{3a} (r_1 - r'_1) + \frac{x^2}{5a^2} (r_2 - r'_2) + \text{etc.} \right\},$$

$$V = \frac{4\pi a^2}{x} \left\{ (r_0 - r'_0) + \frac{a}{3x} (r_1 - r'_1) + \frac{a^2}{5x^2} (r_2 - r'_2) + \text{etc.} \right\}.$$

Mais, en faisant $z_0 = r_0 - r'_0$; $z_1 = r_1 - r'_1$; $z_2 = r_2 - r'_2$; etc. l'on pourra considérer les fonctions z_0 , z_1 , z_2 etc. comme assujetties à la même forme et aux mêmes propriétés que celles désignées par r_0 , r_1 , r_2 , etc. C'est ce qui devient manifeste par la seule inspection de l'expression générale de ces fonctions explicitement donnée par LEGENDRE dans la page 70 du second Volume de ses *Exercices de Calcul Intégral*. Par le rapprochement des équations (6) et (7) il est facile d'en conclure, que l'épaisseur r de la couche peut toujours être déterminée par la fonction V et son premier coefficient différentiel pris par rapport à x . En effet; en différentiant par rapport à x les deux membres de l'équation (7), et multipliant ensuite par $2x$, il est évident que l'on a l'équation

$$V + 2x \frac{dV}{dx} = 4\pi a \left\{ r_0 + \frac{x}{a} r_1 + \frac{x^2}{a^2} r_2 + \frac{x^3}{a^3} r_3 + \text{etc.} \right\}.$$

Donc en faisant $x=a$ dans les deux membres, et désignant par $\bar{V}$ et $\frac{d\bar{V}}{dx}$ ce qui deviennent les valeurs de V et $\frac{dV}{dx}$ pour cette valeur particulière de x , l'on a, en vertu de l'équation (6),

$$(9) \dots 4\pi a \gamma = \bar{V} + 2a \frac{d\bar{V}}{dx}.$$

Si, au lieu de différentier l'équation (7) l'on différentie l'équation (8) par rapport à x , l'on trouve

$$V + 2x \frac{dV}{dx} = -\frac{4\pi a^2}{x} \left\{ \gamma_0 + \frac{a}{x} \gamma_1 + \frac{a^2}{x^2} \gamma_2 + \frac{a^3}{x^3} \gamma_3 + \text{etc.} \right\};$$

d'où l'on tire, en faisant $x=a$ et nommant $\check{V}$ et $\frac{d\check{V}}{dx}$ les valeurs correspondantes de V et $\frac{dV}{dx}$;

$$(10) \dots -4\pi a \gamma = \check{V} + 2a \frac{d\check{V}}{dx}.$$

Comme l'on a évidemment $\bar{V} = \check{V}$, il est clair que le changement de signe du premier membre dans le passage de l'équation (9) à l'équation (10) doit dériver d'une différence absolue entre les deux quantités $\frac{d\bar{V}}{dx}$ et $\frac{d\check{V}}{dx}$; ce qui tient à la nature des forces exprimées par ces coefficients différentiels.

L'équation (9) constitue un principe fondamental dans cette théorie, puisque, par son moyen, la recherche de l'épaisseur γ de la couche est concentrée dans celle de la fonction V , relative à son action sur les points qui lui seraient intérieurs. La masse de la couche dépend aussi de cette même fonction, puisque en faisant $x=0$ l'équation (7) donne $aV = 4\pi a^2 \gamma_0$; c'est-à-dire la masse de la couche d'après ce qui a été démontré dans le premier §.

Pour la clarté des idées, il importe de ne pas perdre de vue, que les deux séries (7) et (8) résultent de la même intégrale définie développée de deux manières différentes, afin d'avoir une série convergente propre au calcul de la quantité V , soit pour les cas de $x < a$, soit pour les cas de $x > a$. L'expression unique de V est, en négligeant les quantités de l'ordre du carré de l'épaisseur γ' de la couche;

$$(11) \dots V = a \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{y' \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\omega'}{\sqrt{1 - 2\frac{x}{a}p + \frac{x^2}{a^2}}};$$

où y' représente une fonction quelconque de θ' et ω' qui ne devient pas infinie entre les limites de l'intégration, et

$$p = \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cdot \cos(\omega - \omega').$$

De là l'on tire pour l'expression unique de $V + 2x \frac{dV}{dx}$;

$$(12) \dots V + 2x \frac{dV}{dx} = a \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) y' \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\omega'}{\left(1 - 2\frac{x}{a}p + \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, on ne peut remplacer ce radical unique et toujours positif par des séries convergentes sans observer que l'on a

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - 2ax \cdot p + x^2}} = P_{(0)} + \frac{x}{a} P_{(1)} + \frac{x^2}{a^2} P_{(2)} + \frac{x^3}{a^3} P_{(3)} \dots + \frac{x^n}{a^n} P_{(n)} + \text{etc.},$$

pour les cas où $\frac{x}{a} < 1$; et

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - 2ax \cdot p + x^2}} = \frac{a}{x} P_{(0)} + \frac{a^2}{x^2} P_{(1)} + \frac{a^3}{x^3} P_{(2)} \dots + \left(\frac{a}{x}\right)^{n+1} P_{(n)} + \text{etc.},$$

pour les cas où $\frac{x}{a} > 1$. En différentiant ces deux équations par rapport à x , l'on aura

$$\frac{1 - \frac{x^2}{a^2}}{\left(1 - 2\frac{x}{a}p + \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = P_{(0)} + 3\frac{x}{a} P_{(1)} + 5\frac{x^2}{a^2} P_{(2)} \dots + (2n+1) \frac{x^n}{a^n} P_{(n)} + \text{etc.},$$

pour toute valeur de x plus petite que a ; et

$$\frac{1 - \frac{x^3}{a^3}}{\left(1 - 2\frac{x}{a} + \frac{x^3}{a^3}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a}{x}P_{(0)} - 3\frac{a^3}{x^3}P_{(1)} - 5\frac{a^5}{x^5}P_{(2)} \dots - (2n+1)\frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}P_{(n)} - \text{etc.}$$

pour toute valeur de x plus grande que a .

Il est manifeste d'après cela que, ces deux valeurs doivent être, en général, inégales et de signe contraire, et que pour distinguer ces deux cas, sans exécuter aucune intégration, il faut remplacer l'équation (12) par les deux suivantes; savoir

$$(13) \dots V + 2x \frac{dV}{dx} = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (2n+1) \left(\frac{x}{a}\right)^n P_{(n)} \gamma' \sin \theta' \cdot d\theta' d\omega';$$

$$(14) \dots V + 2x \frac{dV}{dx} = -a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (2n+1) \left(\frac{a}{x}\right)^{n+1} P_{(n)} \gamma' \sin \theta' \cdot d\theta' d\omega';$$

où le signe $\sum_{n=0}^{\infty}$ s'étend à toutes les valeurs entières et positives de n depuis $n=0$ jusqu'à $n=\infty$.

Il est clair d'après cela que, dans le cas particulier de $x=a$, le second membre de ces équations devient égal et de signe contraire. Et comme en même temps on conclut de l'équation (11), que les deux valeurs de V sont alors égales et de même signe, il faut nécessairement admettre que les deux valeurs de $\frac{dV}{dx}$ sont inégales. Ce que l'on démontre ainsi d'une manière générale serait confirmé par le calcul dans tous les cas où la double intégration du second membre de l'équation (12) serait possible sans développer le radical. Alors, la double valeur de l'expression que l'on aurait serait inhérente à la condition que le radical a toujours une valeur positive dans les élémens de l'intégrale. Au reste, en posant $\gamma' = f(\theta', \omega')$, il est possible de démontrer, sans développer le radical, que la limite vers laquelle converge la double intégrale,

$$a \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) y' \sin \theta' \cdot d\theta' d\omega'}{\left(1 - 2\frac{x}{a} \cdot p + \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

à mesure que la quantité $1 - \frac{x}{a}$, toujours positive, décroît pour s'approcher de zéro est $+4\pi a \cdot f(\theta, \omega)$; et qu'elle est égale à $-4\pi a \cdot f(\theta, \omega)$ lorsque l'on prend $\frac{x}{a} - 1$ pour la quantité positive évanouissante. On peut lire dans le Chap^e VIII de la Théorie de la Chaleur de Poisson, les détails de l'admirable explication qu'il a donnée de ce paradoxe de Calcul Intégral.

La comparaison des équations (9) et (13) fournit l'équation

$$(15) \dots \dots 4\pi y = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (2n+1) P_{(n)} y' \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\omega',$$

à l'aide de laquelle on pourrait déterminer, par les quadratures, les différens termes $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \dots + y_n + \text{etc.}$ de l'épaisseur y , même dans les cas où la fonction y' serait donnée d'une manière discontinue. En calculant ainsi, pour chaque valeur de n , un nombre $2n+1$ de valeurs particulières correspondantes aux coordonnées polaires

$$\theta, \omega; \quad \theta_1, \omega_1; \quad \theta_2, \omega_2; \quad \dots \dots \theta_{2n}, \omega_{2n};$$

censées connues, l'on aurait le nombre suffisant d'équations qui est nécessaire pour déterminer l'expression générale de y_n . Car l'on a d'un côté

$$(16) \dots \dots y_n = \frac{(2n+1)}{4\pi} \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_{(n)} y' \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\omega' :$$

et par d'autres considérations, si l'on fait $\mu = \cos \theta$,

$$\left(1 - 2\mu \cdot z + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + Q_{(1)} z + Q_{(2)} z^2 + Q_{(3)} z^3 + Q_{(4)} z^4 \dots + Q_{(n)} z^n + \text{etc.},$$

l'on a;

$$J_1 = A_{(1)} Q_{(1)} + \sin \theta (B_{(1)} \cos \omega + C_{(1)} \sin \omega) \frac{dQ_{(1)}}{d\mu} ;$$

$$J_2 = A_{(2)} Q_{(2)} + \sin \theta (B_{(2)} \cos \omega + C_{(2)} \sin \omega) \frac{dQ_{(2)}}{d\mu} \\ + \sin^2 \theta (D_{(2)} \cos 2\omega + E_{(2)} \sin 2\omega) \frac{d^2 Q_{(2)}}{d\mu^2} ;$$

$$J_3 = A_{(3)} Q_{(3)} + \sin \theta (B_{(3)} \cos \omega + C_{(3)} \sin \omega) \frac{dQ_{(3)}}{d\mu} \\ + \sin^2 \theta (D_{(3)} \cos 2\omega + E_{(3)} \sin 2\omega) \frac{d^2 Q_{(3)}}{d\mu^2} \\ + \sin^3 \theta (F_{(3)} \cos 3\omega + G_{(3)} \sin 3\omega) \frac{d^3 Q_{(3)}}{d\mu^3} ;$$

etc. ;

où $A_{(1)}$, $B_{(1)}$ etc. sont autant de coefficients indéterminés.

Après ces généralités je reprends la considération des deux équations (7), (8), lesquelles étant différenciées par rapport à x donnent

$$-\left(\frac{dV}{dx}\right) = -4\pi \left\{ \frac{1}{3} J_1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{x}{a} J_2 + \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2}{a^2} J_3 + \frac{4}{9} \cdot \frac{x^3}{a^3} J_4 + \text{etc.} \right\} ,$$

$$-\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{4\pi a^2}{x^2} \left\{ J_0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{x} J_1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{a^2}{x^2} J_2 + \frac{4}{7} \cdot \frac{a^3}{x^3} J_3 + \text{etc.} \right\} .$$

En faisant $x=a$, et nommant T la première de ces valeurs de $-\left(\frac{dV}{dx}\right)$, et T' la seconde, nous aurons

$$T = -4\pi \left\{ \frac{1}{3} J_1 + \frac{2}{5} J_2 + \frac{3}{7} J_3 + \frac{4}{9} J_4 + \text{etc.} \right\} ,$$

$$T' = 4\pi \left\{ J_0 + \frac{2}{3} J_1 + \frac{3}{5} J_2 + \frac{4}{7} J_3 + \frac{5}{9} J_4 + \text{etc.} \right\} ,$$

pour les composantes de la force que la couche exerce suivant le même rayon vecteur, relativement à deux points électriques dont le premier serait placé sur la surface intérieure et le second sur la surface extérieure. Malgré l'excessive proximité des deux points sur lesquels ces forces agissent,

il y a entre elles une différence absolue, abstraction faite du signe, et leur différence est toujours finie et proportionnelle à l'épaisseur γ ; car l'on a,

$$T' - T = 4\pi(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \text{etc.}) = 4\pi\gamma.$$

C'est aussi ce que l'on pouvait conclure immédiatement des équations (9) et (10). La démonstration de cette propriété importante est par là établie pour des couches à-pen-près sphériques. Cependant quelle que soit la figure d'une couche (même fort alongée dans un sens et fort rétrécie dans un autre) pourvu qu'elle soit homogène, d'une très-petite épaisseur, et composée de matière douée d'un pouvoir attractif ou répulsif en raison inverse du carré de la distance, l'on peut démontrer que la différence des attractions qu'elle exerce suivant la normale sur deux points placés sur la même normale; l'un à sa surface intérieure et l'autre à sa surface extérieure est toujours proportionnelle au produit de l'épaisseur de la couche par la densité du fluide électrique. Poisson a rapporté dans son Mémoire une démonstration synthétique de cette proposition qui lui avait été communiquée par LAPLACE (Voyez p. 30-34). Mais on peut, ce me semble, rendre cette démonstration plus rigoureuse en y appliquant les développemens que je vais exposer.

§ IV.

Considérons d'abord l'attraction d'un segment sphérique sur le point de sa surface placé à son sommet. Je place l'origine des coordonnées x, y, z d'un point quelconque du segment à ce même sommet, de manière que l'axe des z soit dirigé suivant la flèche, et les axes des x et des y dans le plan tangent. Comme je suppose le segment homogène, si l'on nomme P la composante de la force attractive suivant la normale, il est clair que l'on a;

$$P = \iiint \frac{dx dy dz \cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

abstraction faite du coefficient extérieur au signe intégral qui serait formé du produit de la densité par le nombre qui mesure le pouvoir attractif

de l'unité de masse à l'unité de distance. L'intégrale indéfinie par rapport à z étant

$$-\iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

si l'on nomme z' les ordonnées de la surface convexe du segment et H la flèche, nous aurons en intégrant entre ces limites;

$$P = \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} - \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + H^2}}.$$

Actuellement, si l'on fait $x = u \cos \varphi$, $y = u \sin \varphi$, l'on aura d'après le principe connu sur la transformation des intégrales doubles;

$$P = \iint \frac{u du d\varphi}{\sqrt{u^2 + z'^2}} - \iint \frac{u du d\varphi}{\sqrt{u^2 + H^2}}.$$

En intégrant la seconde partie par rapport à u depuis $u = 0$ jusqu'à $u = u'$, nous aurons

$$P = \iint \frac{u du d\varphi}{\sqrt{u^2 + z'^2}} - \int d\varphi \sqrt{u'^2 + H^2} + H \int d\varphi;$$

où le rayon u' doit être regardé comme le rayon du petit cercle qui sert de base au segment. En nommant δ' le rayon de la sphère, et supposant $H < \delta'$, nous avons

$$H = \delta' - \sqrt{\delta'^2 - u'^2}; \quad z' = \delta' - \sqrt{\delta'^2 - u^2}.$$

Donc, en intégrant par rapport à φ depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, et posant $v = \sqrt{\delta'^2 - u^2}$, il viendra

$$P = 2\pi H \left(1 - \sqrt{\frac{2\delta'}{H}} \right) - 2\pi \int \frac{v dv}{\sqrt{2\delta'^2 - 2\delta'v}};$$

d'où l'on tire

$$P = 2\pi H \left(1 - \sqrt{\frac{2\delta'}{H}} \right) - \frac{4\pi}{\sqrt{2\delta'}} \left\{ \frac{2}{3} (\delta' - v)^{\frac{3}{2}} - \delta' (\delta' - v)^{\frac{1}{2}} \right\} + \text{const.}$$

Cette intégrale commencée avec $u=0$, ou bien $v=\delta'$, et finit avec $u=u'$, ou bien $v=\sqrt{\delta'^2-u'^2}=\delta'-H$: donc

$$P=2\pi H\left(1-\sqrt{\frac{2\delta'}{H}}\right)-\frac{4\pi}{\sqrt{2\delta'}}\left(\frac{2}{3}H^{\frac{3}{2}}-\delta'H^{\frac{1}{2}}\right);$$

ce qui donne

$$(17) \dots\dots P=2\pi H\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H}{\delta'}}\right).$$

Telle est la formule qui, en supposant $H<\delta'$, exprime l'attraction d'un segment sphérique sur un point placé au sommet de sa calotte. Lorsque le rayon δ' de la sphère sera fort grand en comparaison du double $2H$ de la flèche, il suffira de prendre $P=2\pi H$; ce qui revient à dire que cette force est alors proportionnelle à l'épaisseur du segment.

Considérons maintenant l'attraction que le même segment sphérique peut exercer sur le centre de sa base que je nomme D . Il est facile de voir, que

$$\frac{2\pi u du \cdot z dz}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

est l'élément de cette force en y comptant les ordonnées z depuis le point D . En intégrant d'abord par rapport à u depuis $u=0$ jusqu'à $u=u'$, nous avons

$$-\frac{2\pi z dz}{\sqrt{u'^2+z^2}}+\frac{2\pi z dz}{\sqrt{z^2}}.$$

Mais l'équation

$$u'^2=(H-z)\{2\delta'-(H-z)\},$$

donne

$$u'^2+z^2=2\delta'H-H^2-(2\delta'-2H)z;$$

partant, si l'on nomme Q cette force, l'on a

$$Q=2\pi\int dz-2\pi\int\frac{z dz}{\sqrt{(2\delta'-H)H-(2\delta'-2H)z}}.$$

En prenant l'intégrale indéfinie l'on obtient

$$Q = 2\pi z - \frac{\pi}{3(\delta' - H)^3} \left\{ (2\delta' - H)H - 2(\delta' - H)z \right\}^3 \\ + \frac{\pi H(2\delta' - H)}{(\delta' - H)^3} \left\{ (2\delta' - H)H - 2(\delta' - H)z \right\}^{\frac{1}{2}} + \text{const.}$$

Les limites de cette intégration étant $z=0$ et $z=H$, on tire de là :

$$Q = 2\pi H - \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{H^{\frac{3}{2}}(2\delta' - H)^{\frac{3}{2}}}{(\delta' - H)^2} + \frac{2\pi H^2\delta'}{(\delta' - H)^2} - \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{H^3}{(\delta' - H)^2} ;$$

ou bien

$$(18) \dots Q = 2\pi H \left\{ 1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2H}{\delta'}} \left(1 - \frac{H}{2\delta'} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{H}{\delta'} \right)^{-2} \right. \\ \left. + \frac{H}{\delta'} \left(1 - \frac{H}{\delta'} \right)^{-2} - \frac{2}{3} \left(\frac{H}{\delta'} \right)^2 \left(1 - \frac{H}{\delta'} \right)^{-2} \right\}.$$

En comparant cette formule avec la formule (17) l'on voit qu'il est impossible d'avoir $P=Q$. Mais, il est vrai de dire que la différence de ces deux forces sera d'autant plus petite que le rapport $\frac{H}{2\delta'}$ de la flèche au diamètre de la sphère sera plus petit. En retenant seulement les trois premiers termes, l'on a

$$(19) \dots Q = 2\pi H \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2H}{\delta'}} + \frac{H}{\delta'} \right).$$

De sorte que l'on a $P=Q$ en négligeant les termes multipliés par le carré de l'épaisseur H .

En appliquant la formule

$$\frac{2\pi u du \cdot z dz}{(u^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

au calcul de l'attraction exercée suivant son axe par un cylindre droit sur le centre de sa base, l'on trouve, en nommant Q' cette force;

$$(20) \dots Q' = 2\pi \left\{ H + u' - \sqrt{H^2 + u'^2} \right\} ;$$

où H désigne la hauteur du cylindre et u' le rayon de sa base. En supposant le rayon u' très-grand en comparaison de la hauteur H , il suffira de prendre $Q' = 2\pi H$. C'est en ce sens que l'on doit entendre que l'attraction d'un disque est proportionnelle à son épaisseur.

Considérons maintenant l'attraction d'un segment convexe ayant une fort petite flèche, appartenant à un corps quelconque homogène. Quelle que soit la surface convexe de ce segment, l'on pourra représenter son équation par $z' = Ax^2 + By^2$, en plaçant l'axe des z sur la direction de la normale AD , élevée au point A de sa surface, qui est à la fois l'origine des coordonnées et le point attiré. Les axes des x et des y sont disposées sur le plan tangent au même point A suivant les sections rectangulaires de plus grande et de moindre courbure. Cela posé, l'on aura encore ici, comme dans le cas du segment sphérique ;

$$P = \iint \frac{u du d\varphi}{\sqrt{u^2 + z'^2}} - \iint \frac{u du d\varphi}{\sqrt{u^2 + H^2}} ;$$

H étant la hauteur AD du segment, mesurée dans le sens de la normale. Or, nous avons

$$x = u \cos \varphi ; \quad y = u \sin \varphi ; \quad z' = (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) u^2 ;$$

partant

$$P = \iint \frac{u du d\varphi}{\sqrt{u^2 + (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)^2 u^2}} - \iint \frac{u du d\varphi}{\sqrt{u^2 + H^2}} .$$

Donc en exécutant l'intégration indéfinie par rapport à u , il viendra ;

$$P = \int d\varphi \cdot \text{Log.} \left\{ \frac{u(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) + \sqrt{1 + (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)^2 u^2}}{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi} \right\} - \int d\varphi \sqrt{u^2 + H^2} .$$

Les limites de cette intégration étant $u = 0$, $u = u'$, l'on a

$$P = H \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{u'^2 + H^2} + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi} \text{Log.} \left\{ u'(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) + \sqrt{1 + (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)^2 u'^2} \right\} .$$

La valeur de u' devant être déterminée par l'équation

$$H = (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) u'^2,$$

qui a lieu pour tous les points du contour de la courbe plane qui sert de base au segment, nous pouvons écrire

$$P = 2\pi H - \int_{\xi}^{2\pi} d\varphi \sqrt{u'^2 + H^2} + \int_{\xi}^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{u'^2}{H} \text{Log.} \left(\frac{H}{u'} + \sqrt{1 + \frac{H^2}{u'^2}} \right),$$

ou bien

$$P = 2\pi H - \int_0^{2\pi} u' d\varphi \left\{ \sqrt{1 + \frac{H^2}{u'^2}} - \frac{u'}{H} \text{Log.} \left[\frac{H}{u'} + \sqrt{1 + \frac{H^2}{u'^2}} \right] \right\}.$$

La formule

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \text{Log.} (p + \sqrt{1+p^2}),$$

donne la série

$$\text{Log.} (p + \sqrt{1+p^2}) = p - \frac{1}{2} \cdot \frac{p^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{p^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{p^7}{7} + \text{etc.};$$

done, en développant le radical $\sqrt{1 + \frac{H^2}{u'^2}}$, nous aurons

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \frac{H^2}{u'^2}} - \frac{u'}{H} \text{Log.} \left[\frac{H}{u'} + \sqrt{1 + \frac{H^2}{u'^2}} \right] = \\ & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{H}{u'} \right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} \left(1 + \frac{3}{5} \right) \left(\frac{H}{u'} \right)^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(1 + \frac{5}{7} \right) \left(\frac{H}{u'} \right)^6 - \text{etc.} \end{aligned}$$

De sorte que l'expression précédente de P donne

$$P = 2\pi H - H \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) \frac{H}{u'} - \frac{1}{2 \cdot 4} \left(1 + \frac{3}{5} \right) \left(\frac{H}{u'} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(1 + \frac{5}{7} \right) \left(\frac{H}{u'} \right)^5 \\ & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(1 + \frac{7}{9} \right) \left(\frac{H}{u'} \right)^7 + \text{etc.} \end{aligned} \right\}.$$

Mais

$$\frac{H}{u'} = \sqrt{H} \cdot \sqrt{A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi} = \sqrt{AH} \cdot \sqrt{1 - \frac{(A-B)}{A} \sin^2 \varphi};$$

et en nommant r' , r'' les deux rayons de plus grande et de moindre courbure au point attiré, l'on a $A = \frac{1}{2r'}$; $B = \frac{1}{2r''}$; partant, si l'on fait pour plus de simplicité;

$$\Delta = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r'}{r''}\right) \sin^2 \varphi},$$

il viendra

$$\frac{H}{u'} = \sqrt{\frac{H}{2r'}} \cdot \Delta.$$

Ainsi, nous pouvons, en général, exprimer la force P par cette série;

$$(21) \dots P = 2\pi H - \frac{2}{3} H \sqrt{\frac{H}{2r'}} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \Delta + \frac{H}{2 \cdot 4} \left(1 + \frac{3}{5}\right) \left(\frac{H}{2r'}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \Delta^3 \\ - \frac{H \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(1 + \frac{5}{7}\right) \left(\frac{H}{2r'}\right)^{\frac{5}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \Delta^5 + \text{etc.}$$

Il est par là clairement démontré que, en prenant $P = 2\pi H$, l'on néglige la puissance $\frac{3}{2}$, et non le carré de l'épaisseur H du segment.

On peut trouver de la même manière la force Q que le segment exerce sur le point D où la normale AD rencontre sa base. En effet; nous avons

$$Q = - \iiint \frac{dx dy dz (H - z)}{\{x^2 + y^2 + (H - z)^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

et en intégrant par rapport à z depuis $z = z'$ jusqu'à $z = H$, l'on a

$$Q = - \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (H - z')^2}};$$

d'où l'on tire

$$Q = - \iint \frac{u du d\varphi}{\sqrt{u^2}} + \iint \frac{u du d\varphi}{\sqrt{u^2 + (H - z')^2}} ;$$

et comme

$$z' = (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) u^2 ,$$

il viendra

$$Q = - \iint du d\varphi + \frac{1}{2} \iint \frac{2 u du d\varphi}{\sqrt{u^2 + \left[H - u^2 (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \right]^2}} .$$

En intégrant par rapport à u depuis $u=0$ jusqu'à $u=u'$, et ayant égard à l'équation

$$H = (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) u'^2 ,$$

nous tirons de là

$$Q = - \int_0^{2\pi} u' d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{u'^2}{H} \text{Log.} \left(1 + \frac{2H}{u'} \right) ;$$

et en développant le Logarithme

$$Q = - H \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ 1 - \frac{2^2}{3} \left(\frac{H}{u'} \right) + \frac{2^3}{4} \left(\frac{H}{u'} \right)^2 - \frac{2^4}{5} \left(\frac{H}{u'} \right)^3 + \text{etc.} \right\} .$$

En substituant ici pour $\frac{H}{u'}$ sa valeur précédente, c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{H}{2r'}} \cdot \Delta , \text{ il viendra ;}$$

$$\begin{aligned} (22) \dots Q = & - 2\pi H + \frac{2^2}{3} H \sqrt{\frac{H}{2r'}} \int_0^{2\pi} d\varphi \Delta - \frac{2^3}{4} H \left(\frac{H}{2r'} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \Delta^2 \\ & + \frac{2^4}{5} H \left(\frac{H}{2r'} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \Delta^3 - \text{etc.} \end{aligned}$$

Le rapprochement des formules (21) et (22) démontre, que l'on ne saurait avoir $P = -Q$, sans négliger les termes de l'ordre $\frac{3}{2}$ relativement

à l'épaisseur H du segment. De sorte que la véritable expression de la différence $P-Q$ est telle que l'on a ;

$$(23) \quad \dots \quad P-Q = 4\pi H - H \sqrt{\frac{2H}{r'}} \int_0^{2\pi} d\varphi \Delta + \frac{1}{2} \cdot \frac{H^2}{r'} \int_0^{2\pi} d\varphi \Delta^2 \\ - 3H \left(\frac{H}{2r'} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \Delta^3 + \text{etc.}$$

Cela posé, remarquons que le raisonnement de Poisson, rapporté dans les pages 31 et 32 de son Mémoire, revient à dire que l'on a

$$R = S + P, \quad \text{et} \quad R' = S' + Q ;$$

où S et S' désignent les attractions du grand segment sur les points qu'il désigne par A et a ; c'est-à-dire sur ceux que nous avons désignés par A et D .

Donc nous avons

$$R - R' = (S - S') + (P - Q) .$$

Or, nous venons de prouver que, en négligeant la puissance $\frac{3}{2}$ de l'épaisseur, l'on a

$$P - Q = 4\pi \cdot H, \quad \text{ou bien} \quad P - Q = 4\pi \cdot \gamma ,$$

en remplaçant H par γ . Donc nous avons l'équation

$$R - R' = (S - S') + 4\pi \cdot \gamma .$$

Quelle que soit l'expression analytique de la force S , l'on peut supposer $S = F(\gamma, q)$; où q désigne la distance du point attiré au centre de gravité du grand segment. Cette fonction des deux variables γ et q étant développée suivant les puissances positives et ascendantes de γ donnera une série de la forme

$$S = \gamma^{\frac{m}{n}} F_1(q) + \gamma^{\frac{m'}{n'}} F_2(q) + \gamma^{\frac{m''}{n''}} F_3(q) + \text{etc.}$$

Donc pour avoir la valeur de la force S' que le même segment exerce

sur un point éloigné de $q + \gamma$ de son centre de gravité, il faudra écrire l'équation

$$S' = \gamma^{\frac{m}{n}} F_1(q + \gamma) + \gamma^{\frac{m'}{n'}} F_2(q + \gamma) + \text{etc.}$$

Si l'on admet maintenant que les fonctions $F_1(q + \gamma)$, $F_2(q + \gamma)$ etc. sont développables par la série de TAYLOR, il devient manifeste que le premier terme de la différence $S - S'$ est au moins de l'ordre $1 + \frac{m}{n}$, et qu'en conséquence il est permis de négliger tout-à-fait cette différence, lorsque l'on borne l'approximation aux quantités du premier ordre, par rapport à l'épaisseur de la couche. Alors l'on a l'équation

$$R - R' = 4\pi \cdot \gamma$$

qu'il s'agissait de démontrer sans faire aucune supposition gratuite, et de manière à donner des idées justes sur le mode de son existence.

§ V.

Les deux valeurs de V déterminées par les équations (7) et (8) sont telles que, en posant

$$V = 4\pi a \cdot \varphi \left\{ \cos \theta, \sin \theta \cdot \cos \omega, \sin \theta \cdot \sin \omega, \frac{x}{a} \right\},$$

et supposant connue la fonction φ , l'on en conclura que l'équation (8) revient à dire que l'on a

$$V = \frac{4\pi a^3}{x} \cdot \varphi \left\{ \cos \theta, \sin \theta \cdot \cos \omega, \sin \theta \cdot \sin \omega, \frac{a}{x} \right\}.$$

Lorsque la figure de la couche constitue une surface de révolution, la fonction φ doit être indépendante de l'angle ω , et après avoir fait $\cos \theta = \mu$, il suffit d'écrire au lieu de l'équation (7),

$$(24) \dots V = 4\pi a \cdot \varphi \left(\mu, \frac{x}{a} \right);$$

et au lieu de l'équation (8),

$$(25) \dots V = \frac{4\pi a^2}{x} \cdot \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right).$$

Cela posé, remarquons que, dans ce cas, par la nature des fonctions y_0, y_1, y_2 etc., l'on a

$$y_0 = A_0 P_0; \quad y_1 = A_1 P_1; \quad y_2 = A_2 P_2; \quad \text{etc.}$$

où les coefficients A_0, A_1, A_2 , etc. sont des quantités indépendantes de μ , et P_0, P_1, P_2 , etc. des fonctions entières et rationnelles de μ qui naissent du développement de la fonction

$$(1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

mis sous la forme

$$P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \text{etc.}$$

La formule (7) donne alors

$$(26) \dots V = 4\pi a \left\{ A_0 P_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{a} A_1 P_1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{a^2} A_2 P_2 + \text{etc.} \right\}.$$

Ainsi, il suffirait de connaître A_0, A_1, A_2 etc., puisque, ceux désignés par P_0, P_1, P_2 etc. sont censés toujours connus. Or, en considérant le point pour lequel l'on a $\cos\theta = \mu = 1$, tous les coefficients P_0, P_1 , etc. deviennent égaux à l'unité positive. Donc, en désignant par $\bar{V}$ la valeur correspondante de V , nous aurons

$$(27) \dots \bar{V} = 4\pi a \left\{ A_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{a} A_1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{a^2} A_2 + \text{etc.} \right\}.$$

Il suit de là que, en supposant connue d'une manière quelconque la fonction de x désignée par $\bar{V}$, il suffira de la développer suivant les puissances entières et positives de x pour en tirer la valeur des coefficients A_0, A_1, A_2 etc. Après cela, en remplaçant dans ce développement A_0, A_1, A_2 etc. par $A_0 P_0, A_1 P_1, A_2 P_2$ etc. l'on formera la valeur de la fonction V . Ainsi, en désignant par $f\left(\frac{x}{a}\right)$ ce que devient

la fonction $\varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right)$ lorsque $\mu = 1$, l'on aura

$$\bar{V} = 4\pi a \cdot f\left(\frac{x}{a}\right).$$

C'est à LEGENDRE que l'on doit cette règle pour former la fonction V . (Voyez Tome X des Savans Étrangers).

Soit $\varphi'(\mu, \frac{x}{a})$ le coefficient différentiel de la fonction $\varphi(\mu, \frac{x}{a})$ pris par rapport à $\frac{x}{a}$. L'équation (26) donne

$$(28) \dots \varphi'(\mu, \frac{x}{a}) = \frac{1}{3} A_1 P_1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{x}{a} A_2 P_2 + \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2}{a^2} A_3 P_3 + \text{etc.}$$

Donc, en introduisant ces expressions dans l'équation (9), il viendra

$$(29) \dots y = \varphi(\mu, 1) + 2\varphi'(\mu, 1).$$

En faisant successivement $\mu = +1$ et $\mu = -1$ dans cette formule, et nommant Y' et Y les épaisseurs correspondantes de la couche électrique, nous aurons

$$Y' = \varphi(1, 1) + 2\varphi'(1, 1); \quad Y = \varphi(-1, 1) + 2\varphi'(-1, 1).$$

Soit $f'(\frac{x}{a})$ le coefficient différentiel de $f(\frac{x}{a})$ pris par rapport à $\frac{x}{a}$; nous avons

$$\varphi(1, 1) = f(1); \quad \varphi(-1, 1) = f(-1);$$

$$\varphi'(1, 1) = f'(1); \quad \varphi'(-1, 1) = -f'(-1);$$

partant

$$Y' = f(1) + 2f'(1); \quad Y = f(-1) - 2f'(-1);$$

ce qui revient à dire que l'on aura ces deux épaisseurs extrêmes en faisant $x = \pm 1$ dans l'équation

$$(30) \dots y = f(x) + 2f'(x).$$

Pour une autre sphère d'un rayon égal à b l'on aura de même les équations

$$(31) \dots V_1 = 4\pi b \Phi\left(\mu_1, \frac{x}{b}\right),$$

$$(32) \dots \dots V_i = \frac{4\pi b^2}{x_i} \Phi\left(\mu_i, \frac{b}{x_i}\right),$$

$$(33) \dots \dots \bar{V}_i = 4\pi b F\left(\frac{x_i}{b}\right);$$

où V_i est la quantité analogue à V , et $\mu_i = \cos \theta_i$; l'angle θ_i étant celui que la ligne x_i , menée du même point O , attiré ou repoussé par les deux sphères électrisées, fait avec la ligne c qui joint leurs centres.

La fonction F de laquelle l'on doit conclure la fonction Φ par la règle précédente sera en général fort différente de la fonction $f\left(\frac{x}{a}\right)$, du moins à l'égard de sa valeur absolue. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue, qu'en considérant l'action simultanée des deux sphères sur le même point O , l'on pourra considérer $\Phi\left(\mu_i, \frac{x_i}{b}\right)$ comme une fonction des deux variables μ et x . En effet; le triangle rectiligne formé par les droites x , x_i , c donne ces équations

$$x_i = \sqrt{c^2 - 2cx + x^2}; \quad \sin \theta_i = \frac{x}{x_i} \sin \theta; \quad \cos \theta_i = \frac{c - x \cos \theta}{x_i}.$$

Et dans le cas particulier de $\theta = 0$, l'on a $c = x + x_i$; ce qui donne

$$F\left(\frac{x_i}{b}\right) = F\left(\frac{c-x}{b}\right).$$

Cela posé il est clair que, en désignant par U ce que devient la fonction V relativement à l'action réunie des deux sphères sur le même point O , l'on aura

$$U = 4\pi a \varphi\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + \frac{4\pi b^2}{x_i} \Phi\left(\mu_i, \frac{b}{x_i}\right),$$

si le point O est intérieur à la première sphère; et

$$U = \frac{4\pi a^2}{x} \varphi\left(\mu, \frac{a}{x}\right) + 4\pi b \Phi\left(\mu_i, \frac{x_i}{b}\right),$$

s'il est intérieur à la seconde.

En considérant le cas particulier duquel dépend la solution du cas général; c'est-à-dire celui où le point O serait sur la ligne c ou sur

son prolongement, l'on tirera de là la conséquence, que l'équilibre des deux couches électriques ne peut avoir lieu sans avoir ces deux équations

$$(A) \dots af\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^2}{c-x} F\left(\frac{b}{c-x}\right) = h,$$

$$(B) \dots \frac{a^2}{x} f\left(\frac{a}{x}\right) + b F\left(\frac{c-x}{b}\right) = g;$$

où h et g désignent des quantités constantes. Telles sont les équations que Poisson obtient dans la page 43 de son premier Mémoire.

§ VI.

L'élimination de la fonction F entre ces deux équations est exécutée par Poisson d'après un raisonnement qui me paraît obscur. Pour expliquer ce passage, je fais dans l'équation (B); $\frac{c-x}{b} = \frac{b}{c-x'}$; ce qui donne

$$x = \frac{c^2 - b^2 - c x'}{c - x'};$$

et la transforme en celle-ci;

$$\frac{a^2(c-x')}{c^2-b^2-cx'} f\left\{\frac{ac-ax'}{c^2-b^2-cx'}\right\} + b F\left(\frac{b}{c-x'}\right) = g.$$

L'équation (A) devant se vérifier *par identité*, rien n'empêche d'y substituer x' au lieu de x , et d'écrire

$$af\left(\frac{x'}{a}\right) + \frac{b^2}{c-x'} F\left(\frac{b}{c-x'}\right) = h.$$

Actuellement, l'élimination de la fonction F entre ces deux dernières équations donne, après avoir remplacé x' par x ;

$$(C) \dots af\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a^2 b}{c^2 - b^2 - c x} f\left(\frac{ac - ax}{c^2 - b^2 - cx}\right) = h - \frac{g b}{c - x}.$$

Quoique toutes les valeurs de x comprises dans les équations (A) et (B) soient renfermées entre les limites $-a$ et $+a$, il n'est pas vrai

de dire, que les valeurs de x' tirées de l'équation $\frac{c-x}{b} = \frac{b}{c-x'}$, soient aussi renfermées entre les mêmes limites. En faisant $x=0$, par exemple, l'on a $x' = c - \frac{b^2}{c}$; c'est-à-dire une quantité qui surpasse $+a$.

C'est donc en s'appuyant sur le principe de l'identité, que cette manière d'éliminer la fonction F devient légitime, même en faisant abstraction de la grandeur absolue des limites entre lesquelles les équations (A) et (B) subsistent, physiquement parlant. Toutefois, je ne passerai pas sous silence, que cela ne serait pas permis dans les cas, où, conformément à la théorie de FOURIER, l'on voudrait substituer aux fonctions primitives de x d'autres fonctions en termes périodiques qui cessent d'être équivalentes au-delà des limites données.

C'est d'après le principe de l'identité que je vais éliminer de la même manière la fonction f et former l'équation qui détermine la fonction F .

Pour cela, je fais $\frac{a}{x} = x'$, ce qui change l'équation (B) en celle-ci;

$$a x' f(x') + b F\left(\frac{c x' - a}{b x'}\right) = g.$$

Maintenant, si l'on écrit ax au lieu de x dans l'équation (A), il viendra

$$a f(x) + \frac{b^2}{c - ax} F\left(\frac{b}{c - ax}\right) = h.$$

Cette équation devant avoir lieu par identité, rien n'empêche de remplacer x par x' : après cela, si l'on multiplie les deux membres par x' l'on aura

$$a x' f(x') + \frac{b^2 x'}{c - ax'} F\left(\frac{b}{c - ax'}\right) = h x'.$$

Donc, en faisant l'expression de la différence $g - h x'$, nous aurons

$$h F\left(\frac{c x' - a}{b x'}\right) - \frac{b^2 x'}{c - ax'} F\left(\frac{b}{c - ax'}\right) = g - h x'.$$

Cela posé, si l'on fait

$$\frac{c x' - a}{b x'} = x'', \quad \text{c'est-à-dire} \quad x' = \frac{a}{c - b x''};$$

l'on aura, après avoir écrit x au lieu de x'' :

$$(D) \dots bF(x) - \frac{ab^2}{c^2 - a^2 - cbx} F\left(\frac{bc - b^2x}{c^2 - a^2 - cbx}\right) = g - \frac{ah}{c - bx}.$$

En remplaçant x par ax , l'équation (C) devient

$$(E) \dots af'(x) - \frac{ba^2}{c^2 - b^2 - acx} f\left(\frac{ac - a^2x}{c^2 - b^2 - acx}\right) = h - \frac{gb}{c - ax}.$$

Le rapprochement de ces deux équations démontre que, après avoir obtenu $f'(x)$, l'on pourra en conclure $F(x)$ par une simple permutation entre les lettres. En effet, il est évident que, si

$$f(x) = \text{fonct.}(x, a, b, c, h, g)$$

est la fonction de x qui rend identique l'équation (E), il suffira de prendre

$$F(x) = \text{fonct.}(x, b, a, c, g, h),$$

pour rendre identique l'équation (D).

Dans le cas particulier où les deux sphères sont en contact, l'on a $c = a + b$: ce qui contribue à simplifier cette règle. Alors, en faisant $a = 1$, et posant, pour un moment, $bF(x) = \Gamma(x)$, les deux équations (D) et (E) se changent en celles-ci ;

$$\Gamma(x) - \frac{1}{b+2-(1+b)x} \Gamma\left(\frac{1+b-bx}{b+2-(1+b)x}\right) = g - \frac{h}{1+b-bx};$$

$$f(x) - \frac{b}{1+2b-(1+b)x} f\left(\frac{1+b-x}{1+2b-(1+b)x}\right) = h - \frac{gb}{1+b-x}.$$

Si l'on fait $b' = \frac{1}{b}$, la première de ces deux équations peut être écrite ainsi ;

$$\Gamma(x) - \frac{b'}{1+2b'-(1+b')x} \Gamma\left(\frac{1+b'-x}{1+2b'-(1+b')x}\right) = g - \frac{hb'}{1+b'-x}.$$

Donc, en supposant que l'on ait trouvé

$$f(x) = \text{fonct.}(x, b, h, g),$$

l'on aura immédiatement, par un simple changement de lettres,

$$\Gamma(x) = bF(x) = \text{fonct.}(x, b', g, h).$$

Et comme, dans le cas du contact des deux sphères, l'on a $g = h$ (*), si l'on trouve d'après cette condition

$$f(x) = \text{fonct.}(x, b),$$

l'on aura

$$bF(x) = \text{fonct.}\left(x, \frac{1}{b}\right).$$

Cette règle fort simple, remarquée aussi par Poisson dans la page 74 de son premier Mémoire, peut donc être démontrée *à priori* sans avoir, comme lui, exécutée l'intégration qui donne les deux fonctions $f(x)$, $F(x)$. Il en est de même de la règle relative au cas général que nous venons de démontrer directement, et que Poisson a reconnue dans la page 24 de son second Mémoire après avoir exécutée l'intégration.

Relativement aux deux constantes désignées par h et g il faut d'abord observer, qu'il sera démontré ci-après, que l'expression de $f(x)$ est nécessairement de la forme

$$f(x) = h.f_1(x, a, b, c) + g.f_2(x, a, b, c);$$

et que, par conséquent, celle de $F(x)$ est telle que l'on a

$$F(x) = g.f_1(x, b, a, c) + h.f_2(x, b, a, c).$$

Or, en faisant $x=0$, et posant $f(0)=A$, $F(0)=B$, l'on tire de là;

$$A = h.f_1(a, b, c) + g.f_2(a, b, c),$$

$$B = g.f_1(b, a, c) + h.f_2(b, a, c).$$

(*) Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer, qu'en faisant $c=a+b$ et $x=1$, l'équation (E) se réduit à $af(1) - af(1) = h - g$; ce qui exige que l'on ait $h=g$.

Mais, d'après ce qui a été dit dans les §§ III et V l'on peut regarder les quantités $4\pi a^2.A$, $4\pi b^2.B$ comme exprimant, respectivement, les masses des deux couches électriques répandues sur les surfaces des deux sphères. En outre l'on sait que ces masses, en excluant le cas du contact et celui d'un rapprochement assez grand entre les surfaces pour déterminer la diffusion du fluide électrique par étincellement, demeurent les mêmes *avant et après* l'influence qui a eu lieu entre l'électricité des deux sphères. Donc, en supposant évaluées d'une manière quelconque les épaisseurs A et B des deux couches avant l'influence, l'on pourra déterminer par ces deux équations les constantes h et g en fonction des données physiques et initiales de la question. C'est-à-dire que l'on a, en général;

$$D.h = A.f_1(b, a, c) - B.f_2(a, b, c),$$

$$D.g = B.f_1(a, b, c) - A.f_2(b, a, c);$$

en faisant, pour plus de simplicité;

$$D = f_1(a, b, c).f_1(b, a, c) - f_2(a, b, c).f_2(b, a, c).$$

Il était important d'anticiper cette remarque, afin de pouvoir définir, dès ce moment, avec clarté l'idée que l'on doit attacher aux constantes h et g qui entrent dans les équations générales du problème.

Comme l'on vient de voir que la différence $h-g$ est nulle dans le cas particulier du contact, l'on doit présumer, que son expression générale présentera un numérateur nul, ou bien un dénominateur infini, lorsque l'on y fera $c = a + b$. D'après cela il conviendra, par la suite, de remplacer h et g par les valeurs de $h+g$ et $h-g$, afin d'introduire dans les fonctions qu'il faudra développer le facteur $h-g$, que l'on sait d'avance devoir être évanouissant avec la distance entre les surfaces des deux sphères électrisées.

CHAPITRE SECOND

LOIS DE LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

À LA SURFACE DE DEUX SPHÈRES CONDUCTRICES EN CONTACT.

§ VII.

Considérons maintenant d'une manière spéciale le cas où les deux sphères électrisées sont en contact. Soit $a=1$ et $c=1+b$: en faisant en outre

$$\beta = b + (1+b) = 1 + 2b ; \quad \gamma = 1 + b ; \quad H = \frac{bg}{\gamma - x} ,$$

l'équation (E) donnera

$$(G) \dots f'(x) - \frac{b}{\beta - \gamma x} f\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right) = h - H .$$

Nous pourrions faire, dès ce moment, $g=h$; mais comme cette circonstance ne facilite pas l'intégration de l'équation (G), nous introduirons plus loin cette condition. D'après la forme linéaire de cette équation, il est évident qu'en établissant séparément les trois équations

$$(G') \dots f'(x) - \frac{b}{\beta - \gamma x} f'\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right) = 0 ;$$

$$(G'') \dots f''(x) - \frac{b}{\beta - \gamma x} f''\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right) = h ;$$

$$(G''') \dots f'''(x) - \frac{b}{\beta - \gamma x} f'''\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right) = -H = -\frac{gb}{\gamma - x} ,$$

l'on aura l'intégrale de l'équation (G), en prenant pour $f(x)$ la somme $f'(x) + f''(x) + f'''(x)$.

Cela posé ; considérons l'équation (G') et remarquons que, en posant

$$f'(x) = \frac{A}{B - Cx} ,$$

l'on a

$$f'\left(\frac{\gamma-x}{\beta-\gamma x}\right) = \frac{A(\beta-\gamma x)}{(B\beta-C\gamma)-(B\gamma-C)x}.$$

Donc l'équation (G') donnera

$$\frac{A}{B-Cx} - \frac{Ab}{(B\beta-C\gamma)-(B\gamma-C)x} = 0.$$

Or il est clair que l'on rend cette équation identique en prenant les coefficients B et C tels que l'on ait

$$B\beta-C\gamma=Bb; \quad B\gamma-C=Cb;$$

ce qui arrive en faisant $B=1$, $C=1$.

Ainsi, A , étant une constante arbitraire, l'on satisfait à l'équation (G'), en faisant

$$f'(x) = \frac{A}{1-x}.$$

Mais, afin d'augmenter autant que possible la généralité de cette fonction de x , il ne faut pas regarder A comme une quantité absolument constante. Conformément à un principe fondamental, relatif aux intégrations de ce genre, l'on doit remplacer A par une fonction arbitraire de x , assujettie à la condition de demeurer invariable par le changement de x en $\frac{\gamma-x}{\beta-\gamma x}$. Or, avec une légère attention l'on découvre, que cette condition est remplie par toute fonction de $\cos\varpi$ et $\sin\varpi$, en prenant

$$\varpi = \frac{2\pi b}{(1+b)(1-x)},$$

2π étant l'arc de 360° . Donc, en écrivant P au lieu de A , nous aurons

$$f'(x) = \frac{\Pi(\cos\varpi, \sin\varpi)}{1-x} = \frac{P}{1-x},$$

pour l'intégrale complète de l'équation (G'); la fonction désignée par Π étant arbitraire.

Passons maintenant à l'intégration de l'équation (G''). D'abord remarquons que, en y faisant $f''(x) = h\varphi(x)$ la question est réduite à intégrer l'équation

$$\varphi(x) - \frac{h}{\beta - \gamma x} \varphi\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right) = 1.$$

Pour cela, nous ferons $\varphi(x) = 1 + b\varphi'(x)$; ce qui donne

$$\varphi'(x) - \frac{1}{\beta - \gamma x} - \frac{b}{\beta - \gamma x} \varphi'\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right) = 0.$$

Actuellement, je prends

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\beta - \gamma x} + b \cdot \varphi''(x);$$

et par la substitution j'obtiens

$$\varphi''(x) = \frac{1}{k' - c'x} + \frac{b}{\beta - \gamma x} \varphi''\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right),$$

après avoir fait, pour plus de simplicité,

$$k' = \beta \cdot \beta - \gamma \cdot \gamma; \quad c' = \gamma \cdot \beta - \gamma.$$

Si l'on fait ici

$$\varphi''(x) = \frac{1}{k' - c'x} + b\varphi'''(x),$$

l'on aura de même

$$\varphi'''(x) = \frac{1}{k'' - c''x} + \frac{b}{\beta - \gamma x} \varphi''' \left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x} \right),$$

en faisant

$$k'' = \beta \cdot k' - \gamma \cdot c'; \quad c'' = \gamma \cdot k' - c'.$$

Rien n'empêche de continuer indéfiniment ces transformations successives, ce qui fournira cette suite régulière d'équations; savoir

$$\varphi(x) = 1 + b\varphi'(x),$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{k - cx} + b\varphi''(x),$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{k' - c'x} + b\varphi'''(x),$$

$$\varphi'''(x) = \frac{1}{k'' - c''x} + b\varphi^{iv}(x),$$

$$k = \beta,$$

$$k' = \beta.k - \gamma.c,$$

$$k'' = \beta.k' - \gamma.c',$$

$$k''' = \beta.k'' - \gamma.c'',$$

$$k^{iv} = \beta.k''' - \gamma.c''',$$

$$\dots\dots\dots$$

$$k^{(n)} = \beta.k^{(n-1)} - \gamma.c^{(n-1)};$$

etc.

$$\varphi^{iv}(x) = \frac{1}{k^{iv} - c^{iv}x} + b\varphi^v(x),$$

$$\varphi^v(x) = \frac{1}{k^{iv} - c^{iv}x} + b\varphi^{vi}(x);$$

etc.

$$c = \gamma,$$

$$c' = \gamma.k - c,$$

$$c'' = \gamma.k' - c',$$

$$c''' = \gamma.k'' - c'',$$

$$c^{iv} = \gamma.k''' - c''',$$

$$\dots\dots\dots$$

$$c^{(n)} = \gamma.k^{(n-1)} - c^{(n-1)};$$

etc.

et l'on aura

$$f''(x) = h \left\{ 1 + \frac{b}{k - cx} + \frac{b^2}{k' - c'x} + \frac{b^3}{k'' - c''x} + \dots + \frac{b^{n+1}}{k^{(n)} - c^{(n)}x} + \text{etc.} \right\}.$$

En éliminant $c^{(n-1)}$ de l'expression de $k^{(n)}$, l'on a

$$k^{(n)} = (\beta - 1)k^{(n-1)} + (\beta - \gamma^2)k^{(n-2)};$$

et comme $\beta - 1 = 2b$; $\beta - \gamma^2 = -b^2$, cela revient à dire, que, trois coefficients consécutifs sont liés par l'équation

$$(34) \dots\dots k^{(n)} - 2bk^{(n-1)} + b^2.k^{(n-2)} = 0.$$

L'on trouve de la même manière

$$(35) \dots\dots\dots \gamma c^{(n)} = b^2.k^{(n-1)} + k^{(n)};$$

de sorte qu'il suffit de chercher l'expression de $k^{(n)}$. D'après la théorie des séries récurrentes, l'équation (34) nous indique que l'on a ce développement, savoir

$$\frac{1+u}{1-2bu+b^2u^2} = 1 + ku + k'u^2 + k''u^3 + \dots + k^{(n)}u^{n+1} + \text{etc.};$$

mais, $1-2bu+b^2u^2 = (1-bu)^2$; partant nous avons aussi

$$\frac{1+u}{1-2bu+b^2u^2} = (1+u)(1+2bu+3b^2u^2+4b^3u^3+\text{etc.});$$

d'où l'on tire

$$k^{(n)} = (n+2)b^{n+1} + (n+1)b^n.$$

En substituant cette valeur de $k^{(n)}$ dans l'équation (35) l'on trouvera

$$\gamma c^{(n)} = (n+1)b^n(1+b)^2;$$

et par conséquent

$$c^{(n)} = (n+1)(1+b).b^n.$$

De sorte que nous avons

$$\frac{b^{n+1}}{k^{(n)} - c^{(n)}x} = \frac{b}{b + (n+1)(1+b) - (n+1)(1+b)x}.$$

La fonction $f''(x)$ est donc telle que l'on a

$$f''(x) = h + bh \sum_{\circ}^{\infty} \frac{1}{b + (n+1)(1+b) - (n+1)(1+b)x};$$

où la caractéristique $\sum_{\circ}^{\infty}$ indique, que l'on doit prendre la totalité des termes semblables formés en donnant à n toutes les valeurs entières et positives 0, 1, 2, 3, ... ∞ .

En remplaçant $n+1$ par n l'on pourra comprendre le premier terme h sous le signe $\sum_{\circ}^{\infty}$ et écrire

$$f''(x) = bh \sum_{\circ}^{\infty} \frac{1}{b + n(1+b) - n(1+b)x}.$$

On peut intégrer de la même manière l'équation (G''').

En faisant d'abord $f'''(x) = -g b \psi(x)$, l'on a

$$\psi(x) - \frac{b}{\beta - \gamma x} \psi\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right) = \frac{1}{\gamma - x}.$$

Soit,

$$\psi(x) = \frac{1}{\gamma - x} + b \psi'(x);$$

nous aurons

$$\psi'(x) = \frac{1}{H' - g'x} + \frac{b}{\beta - \gamma x} \psi'\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right),$$

après avoir fait

$$H' = \beta \cdot \gamma - \gamma; \quad g' = \gamma \cdot \gamma - 1.$$

Actuellement l'on fera

$$\psi'(x) = \frac{1}{H' - g'x} + b \psi''(x),$$

ce qui donnera

$$\psi''(x) = \frac{1}{H'' - g''x} + \frac{b}{\beta - \gamma x} \psi''\left(\frac{\gamma - x}{\beta - \gamma x}\right),$$

en posant

$$H'' = \beta \cdot H' - \gamma \cdot g'; \quad g'' = \gamma \cdot H' - g'.$$

En continuant ainsi l'on formera cette suite d'équations;

$$\psi(x) = \frac{1}{H - x} + b \psi'(x),$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{H' - g'x} + b \psi''(x),$$

$$\psi''(x) = \frac{1}{H'' - g''x} + b \psi'''(x),$$

$$\psi'''(x) = \frac{1}{H''' - g'''x} + b \psi^{(4)}(x);$$

etc. :

$$\begin{array}{l|l}
 H = \gamma, & g' = \gamma \cdot \gamma - 1, \\
 H' = \beta \cdot H - \gamma, & g'' = \gamma \cdot H' - g', \\
 H'' = \beta \cdot H' - \gamma \cdot g', & g''' = \gamma \cdot H'' - g'', \\
 H''' = \beta \cdot H'' - \gamma \cdot g'', & g^{iv} = \gamma \cdot H''' - g''', \\
 H^{iv} = \beta \cdot H''' - \gamma \cdot g''', & \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 H^{(n)} = \beta \cdot H^{(n-1)} - \gamma \cdot g^{(n-1)}, & g^{(n)} = \gamma \cdot H^{(n-1)} - g^{(n-1)}, \\
 \text{etc. ;} & \text{etc. ;}
 \end{array}$$

d'où l'on tire

$$f'''(x) = -g \cdot b \left\{ \frac{1}{H-x} + \frac{b}{H'-g'x} + \frac{b^2}{H''-g''x} \dots + \frac{b^n}{H^{(n)}-g^{(n)}x} + \text{etc.} \right\}.$$

Il est clair que les équations (34) et (35) auront encore lieu dans le cas actuel, après avoir remplacé $k^{(n)}$ par $H^{(n)}$ et $c^{(n)}$ par $g^{(n)}$. De là, et de la théorie des séries récurrentes, il est facile de conclure que l'on a

$$\frac{\gamma \cdot u}{1 - 2bu + b^2u^2} = Hu + H'u^2 + H''u^3 \dots + H^{(n)}u^{n+1} + \text{etc. ;}$$

$$H^{(n)} = (n+1)\gamma b^n ; \quad g^{(n)} = b^n \left\{ 1 + n(1+b) \right\} ;$$

et par conséquent

$$\frac{b^n}{H^{(n)} - g^{(n)}x} = \frac{1}{(n+1)(1+b) - \left\{ 1 + n(1+b) \right\} x}.$$

De sorte que l'on a

$$f'''(x) = -g b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+b) - \left\{ 1 + n(1+b) \right\} x}.$$

L'intégrale complète de l'équation (G) est donc

$$(II) \dots f(x) = \frac{P}{1-x} + b h \sum_{\infty}^{\infty} \frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x} \\ - b g \sum_{\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+b)-\{1+n(1+b)\}x}.$$

Il est maintenant facile de sommer ces deux suites infinies par des intégrales définies.

§ VIII.

En effet; la formule

$$\frac{1}{p+nq} = \int_0^1 dt . t^{(p+nq)-1},$$

donne

$$\sum_{\infty}^{\infty} \frac{1}{p+nq} = \sum_{\infty}^{\infty} \int_0^1 dt . t^{(p+nq)-1} = \int_0^1 dt \sum_{\infty}^{\infty} t^{(p+nq)-1};$$

ce qui revient à dire que l'on a

$$\sum_{\infty}^{\infty} \frac{1}{p+nq} = \int_0^1 dt . t^{p-1} (1+t^q + t^{2q} + t^{3q} + \text{etc.}),$$

ou bien

$$\sum_{\infty}^{\infty} \frac{1}{p+nq} = \int_0^1 \frac{dt . t^{p-1}}{1-t^q}.$$

Donc en faisant $p=b$, $q=(1+b)(1-x)$, cette formule donnera

$$\sum_{\infty}^{\infty} \frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x} = \int_0^1 \frac{dt . t^{b-1}}{1-t^{(1+b)(1-x)}};$$

et en y faisant, $p=(1+b)-x$: $q=(1+b)(1-x)$, la même formule donnera

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+b) - \{1+n(1+b)\}x} = \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{b-x}}{1-t^{(1+b)(1-x)}}.$$

En substituant ces valeurs dans le second membre de l'équation (II), nous aurons

$$(H') \dots f(x) = \frac{P}{1-x} + b \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{b-1} \{h - g \cdot t^{1-x}\}}{1-t^{(1+b)(1-x)}},$$

pour l'intégrale complète de l'équation (G), sous forme finie.

Indépendamment de l'intégration, les deux équations (A) et (B) démontrent *a priori*, que dans le cas du contact des deux sphères l'on doit avoir $g=h$, puisque, en y faisant $c=a+b$ et $x=a$ les deux premiers membres de ces équations deviennent identiques. Donc, en posant $g=h$, la formule (H') deviendra

$$(H'') \dots f(x) = \frac{P}{1-x} + bh \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{b-1} (1-t^{1-x})}{1-t^{(1+b)(1-x)}}.$$

Il y a une autre manière de sommer les deux suites infinies que l'on voit dans le second membre de l'équation (II) : elle est fondée sur le principe que l'on a l'équation

$$\frac{1}{p+nq} = \frac{2q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(p^2+q^2 t^2)(n^2+t^2)}.$$

En effet; par la théorie de l'intégration des fractions rationnelles, il est d'abord clair que l'on a

$$\int \frac{t^2 dt}{A+Bt^2+Ct^4} = \frac{G}{G-F} \int \frac{dt}{Ct^2+G} - \frac{F}{G-F} \int \frac{dt}{Ct^2+F},$$

en posant pour plus de simplicité

$$G = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4AC}; \quad F = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4AC}.$$

Il suit de là que

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{A+Bt^2+Ct^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}+\sqrt{F}}.$$

Donc en prenant $A+Bt^2+Ct^4=(p^2+q^2t^2)(n^2+t^2)$, l'on a

$$C=q^2; \quad G=p^2; \quad F=q^2n^2;$$

c'est-à-dire l'expression précédente de la fraction $\frac{1}{p+nq}$.

Par l'application de cette formule nous avons en conséquence

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{1}{b+n(1+b)-n(1+b)x} \\ &= \frac{2(1+b)(1-x)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{b^2+(1+b)^2(1-x)^2t^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{n^2+t^2}; \\ & \int_0^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+b)-\{1+n(1+b)\}x} \\ &= \frac{2(1+b)(1-x)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+b-x)^2+(1+b)^2(1-x)^2t^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{n^2+t^2}. \end{aligned}$$

Donc, en observant que l'on a

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{n^2+t^2} = \frac{1}{t^2} + \int_0^{\infty} \frac{1}{n^2+t^4},$$

nous aurons, après avoir fait $g=h$;

$$\begin{aligned} (H''').f(x) &= \frac{P}{1-x} + \frac{h(1-x)}{1+b-x} + \frac{2bh(1+b)(1-x)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{b^2+(1+b)^2(1-x)^2t^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{n^2+t^2} \\ &\quad - \frac{2bh(1+b)(1-x)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+b-x)^2+(1+b)^2(1-x)^2t^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{n^2+t^2}. \end{aligned}$$

Mais l'on sait que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{n^2 + t^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi t} + \frac{1}{e^{\frac{2\pi t}{t}} - 1}.$$

Donc en remarquant que la quantité

$$\frac{1}{2(1+b)(1-x)} \text{Log} \left\{ \frac{b^2 + (1+b)^2(1-x)^2 t^2}{(1+b-x)^2 + (1+b)^2(1-x)^2 t^2} \right\},$$

devient égale à zéro, lorsque l'on y fait $t = \infty$, l'on trouvera que dans le cas de $g = h$ l'on a, au lieu de l'équation (H'') ;

$$\begin{aligned} (H''') \dots f(x) &= \frac{P}{1-x} + \frac{h}{2} - \frac{bh}{2(1+b-x)} + \frac{bh}{(1+b)(1-x)} \text{Log} \left(1 + \frac{1-x}{b} \right) \\ &+ 2bh(1+b)(1-x) \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(e^{\frac{2\pi t}{t}} - 1) [b^2 + (1+b)^2(1-x)^2 t^2]} \\ &- 2bh(1+b)(1-x) \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(e^{\frac{2\pi t}{t}} - 1) [(1+b-x)^2 + (1+b)^2(1-x)^2 t^2]}. \end{aligned}$$

Cette expression de $f(x)$ s'accorde avec celle que Poisson a trouvée, par un procédé moins simple, dans la page 73 de son second Mémoire.

Si l'on veut démontrer d'une manière expéditive l'équation précédente qui fournit, sous forme finie, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{n^2 + t^2}$, il faut partir de l'équation

$$\cot \varphi = \frac{1}{\varphi} - 2\varphi \left\{ \frac{1}{\pi^2 - \varphi^2} + \frac{1}{4\pi^2 - \varphi^2} + \frac{1}{9\pi^2 - \varphi^2} + \text{etc.} \right\}$$

donnée par EULER, et remarquer qu'en y remplaçant φ par $\pi t \sqrt{-1}$, l'on a

$$\cot \pi t \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{2\pi t}{t}} - 1} \right),$$

et par conséquent

$$-1 - \frac{2}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{-1}{\pi t} - \frac{2t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + t^2}.$$

On verra plus loin que l'équation (H'') est préférable à l'équation (H') pour obtenir, sous forme finie, l'expression de la fonction $\varphi(\mu, x)$, définie dans le § V.

§ IX.

Je reprends maintenant la considération de l'équation (H'') et j'observe que le coefficient de dt se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ lorsque l'on y fait $x=1$. Mais en y remplaçant les exponentielles par leurs développemens, savoir ;

$$t^{1-x} = 1 + (1-x) \text{Log. } t + \text{etc.},$$

$$t^{(1+b)(1-x)} = 1 + (1+b)(1-x) \text{Log. } t + \text{etc.},$$

l'on voit aussitôt que le terme affecté du signe intégral devient

$$\frac{bh}{1+b} \int_0^1 dt. t^{b-1} - \frac{hb^2}{1+b} \cdot \frac{(1-x)}{2} \int_0^1 dt. t^{b-1} \text{Log. } t + \text{etc.} = \frac{h}{1+b} + \frac{h(1-x)}{2(1+b)} + \text{etc.}$$

Donc, la formule (H'') donne

$$f(1) = \frac{P}{0} + \frac{h}{1+b} :$$

et comme on sait d'avance que la valeur de $f(1)$ doit être par sa nature finie, il en résulte que pour la solution du problème de physique, dont il est ici question, l'on doit nécessairement prendre $P=0$; ce qui donne

$$f(1) = \frac{h}{1+b},$$

et réduit la formule (H'') à celle-ci ;

$$(36) \dots f(x) = bh. \int_0^1 \frac{dt. t^{b-1} (1-t^{1-x})}{1-t^{(1+b)(1-x)}}.$$

Pour tirer de cette formule la valeur du coefficient différentiel $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ qui répond à $x = 1$, j'observe qu'en développant d'abord suivant les puissances de $1 - x$, l'on a

$$f(x) = \frac{bh}{1+b} \int_0^1 dt \cdot t^{b-1} \left\{ 1 - \frac{b(1-x)}{2} \text{Log. } t + \text{etc.} \right\}.$$

De là l'on tire

$$f'(x) = \frac{hb^2}{2(1+b)} \int_0^1 dt \cdot t^{b-1} \text{Log. } t + \text{etc.} :$$

mais, en faisant $x = 1$, tous les termes qui suivent le premier dans cette suite infinie deviennent nuls ; partant l'on a

$$f'(1) = \frac{-h}{2(1+b)}.$$

Nous avons vu dans le § V, qu'en désignant par Y' l'épaisseur de la couche au point de contact, l'on a $Y' = f(1) + 2f'(1)$: donc nous avons à ce point, $Y' = 0$. C'est ainsi que l'on démontre, *a priori*, par cette théorie le fait découvert d'abord par l'expérience, que l'épaisseur de la couche électrique doit être nulle au point de contact des deux sphères. Car, il est facile de conclure de là, que le même phénomène doit avoir lieu au point de contact sur la seconde sphère dont le rayon est égal à b . En effet ; si l'on fait $a = 1$, $c = 1 + b$, $x = 1$ dans l'équation (A), l'on a $f(1) + bF(1) = h$. Donc en substituant ici pour $f(1)$ sa valeur trouvée plus haut, nous aurons

$$F(1) = \frac{h}{1+b} = f(1).$$

La même équation (A), c'est-à-dire l'équation

$$f(x) + \frac{b^2}{1+b-x} F\left(\frac{b}{1+b-x}\right) = h$$

étant différenciée par rapport à x , donne

$$f'(x) + \frac{b^2}{(1+b-x)^2} F\left(\frac{b}{1+b-x}\right) + \frac{b^3}{(1+b-x)^3} F'\left(\frac{b}{1+b-x}\right) = 0.$$

Donc, en faisant $x=1$, il viendra

$$f'(1) + F(1) + F'(1) = 0 ;$$

d'où l'on tire

$$F'(1) = \frac{-h}{2(1+b)} = f'(1).$$

Mais, en nommant Z' l'épaisseur de la couche électrique sur la sphère du rayon b au point de contact, l'on a par les formules du § V,

$$Z' = F(1) + 2F'(1) ;$$

partant $Z' = 0$.

Au reste, ces valeurs de $F(1)$ et $F'(1)$ pouvaient être établies immédiatement, sans aucun calcul, d'après la règle démontrée dans le § VI pour former la fonction $F(x)$ en ayant celle de $f'(x)$. Néanmoins la conséquence est tellement importante, qu'il n'est pas inutile de l'avoir aussi établie de cette manière directe.

En vertu de la règle que nous venons de citer, le simple changement de b en $\frac{1}{b}$ dans le second membre de l'équation (36) donne

$$(37) \dots b^2 F(x) = h \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{\frac{1}{b}-1} \{1 - t^{1-x}\}}{1 - t^{(1+\frac{1}{b})(1-x)}}.$$

L'équation (36) est susceptible de plusieurs transformations qui ont des avantages particuliers : les plus simples sont celles-ci. D'abord, par la nature des limites de la variable t l'on peut faire $t^{1+b} = t'$, et les limites de t' seront encore zéro et l'unité. En opérant ce changement et écrivant ensuite t au lieu de t' l'on aura

$$(38) \dots f(x) = \frac{bh}{1+b} \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{1}{1+b}} \left(1 - t^{\frac{1-x}{1+b}}\right)}{1 - t^{1-x}}.$$

Par la même raison, si l'on fait ici $t^{1-x} = t'$ l'on trouvera

$$(39) \dots f(x) = \frac{bh}{(1+b)(1-x)} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{1}{1+b}} - 1 \right) t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}}{1-t},$$

ce qui s'accorde avec l'expression de $f(x)$ que Poisson donne dans la page 55 de son 1^{er} Mémoire. Et, par la règle du § VI l'on aura l'expression de $bF(x)$ que l'on voit dans la même page en remplaçant b par $\frac{1}{b}$ dans le second membre de cette équation.

Cette forme de $f(x)$ est celle qui donne avec plus de simplicité le coefficient différentiel $f'(x)$. En effet, l'on a immédiatement

$$(40) \dots f'(x) = \frac{f(x)}{1-x} - \frac{b^2 h}{(1+b)^2 (1-x)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{1}{1+b}} - 1 \right) t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t}.$$

Done en faisant $x = -1$, et reprenant la formule $Y = f(-1) + 2f'(-1)$ démontrée dans le § V, l'on aura

$$(41) \dots Y = \frac{hb^2}{4(1+b)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{1}{1+b}} - 1 \right) t^{-\frac{b}{2(1+b)}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t},$$

pour expression de l'épaisseur de la couche électrique au point diamétralement opposé à celui du contact.

En faisant $x = 0$ et posant $f(0) = A$, la même équation (39) donne

$$(42) \dots A = \frac{bh}{1+b} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{1}{1+b}} - 1 \right)}{1-t},$$

pour expression de l'épaisseur constante de la couche qui recouvrirait la surface de la sphère dont le rayon est égal à l'unité, après l'avoir

séparée de la seconde sphère de manière qu'elle fût entièrement soustraite à son influence.

En nommant B et Z les quantités analogues à celles désignées par A et V , l'on aura pour la sphère du rayon b , d'après la règle du § VI;

$$(43) \dots Z = \frac{h}{4b(1+b)^2} \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{b}{1+b}} - 1 \right) t^{-\frac{1}{2(1+b)}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t};$$

$$(44) \dots B = \frac{h}{b(1+b)} \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{b}{1+b}} - 1 \right)}{1-t}.$$

Au reste, si l'on fait $a = \frac{b}{1+b}$ dans l'équation (42) et $a' = \frac{1}{1+b} = 1-a$ dans l'équation (44); l'on aura d'après la notation de **LEGENDRE**;

$$Z'(a) = -C - \int_0^1 \frac{dt (t^{a-1} - 1)}{1-t};$$

$$Z'(a') = -C - \int_0^1 \frac{dt (t^{a'-1} - 1)}{1-t};$$

où en faisant,

$$S_{(n)} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

l'on a

$$C = \text{Log. hyp.}^e 2 - \frac{1}{3 \cdot 4} S_{(3)} - \frac{1}{5 \cdot 16} S_{(5)} - \frac{1}{7 \cdot 64} S_{(7)} - \text{etc.} = 0,57721566\dots,$$

et, en général,

$$Z'(p) = \frac{d \cdot Z(p)}{dp} = \frac{d \cdot \text{Log.} \Gamma(p)}{dp}.$$

De sorte que nous avons

$$(45) \dots A = -ha \cdot \{C + Z'(a)\},$$

$$(46) \dots B = -\frac{h(1-a)}{b} \{C + Z'(1-a)\}.$$

Mais, a et $1-a$ étant des quantités plus petites que l'unité l'on a, comme l'on sait, entre les fonctions $Z'(a)$, $Z'(1-a)$ l'équation

$$(47) \dots Z'(a) - Z'(1-a) = -\pi \cdot \cot. a\pi ;$$

partant nous avons (*)

$$(48) \dots B = -\frac{h(1-a)}{b} \{ C + \pi \cdot \cot. a\pi + Z'(a) \} .$$

En éliminant $Z'(a)$, les équations (45) et (48) donnent

$$(49) \dots b^2 B - A = h \cdot \pi a \cdot \cot. \left(\frac{\pi}{1+b} \right) = -h \cdot \pi a \cdot \cot. a\pi .$$

Pour réduire en nombres la valeur A avec la Table de LEGENDRE, il faut observer qu'en vertu de l'équation générale

$$\Gamma(1+p) = p\Gamma(p) ,$$

l'on a ;

$$\text{Log.} \Gamma(1+p) = \text{Log.} p + \text{Log.} \Gamma(p) ;$$

d'où l'on tire

$$Z'(1+p) = \frac{1}{p} + Z'(p) ,$$

et par conséquent

$$(50) \dots A = h \{ 1 - Ca - a \cdot Z'(1+a) \} .$$

Cette équation subsiste, en supposant que $\text{Log.} \Gamma(p) = Z(p)$ soit calculé comme logarithme hyperbolique ; il faudra donc diviser par le module $0,43429\dots = m$ les valeurs de $Z'(p)$ déduites de la Table de LEGENDRE, qui les donne en logarithmes *tabulaires*. De sorte que nous avons pour le calcul arithmétique de A et de B :

$$(51) \dots A = h \left\{ 1 - Ca - \frac{a}{m} Z'(1+a) \right\} ;$$

$$(52) \dots b^2 B = A - h \cdot \pi a \cdot \cot. (180^\circ \cdot a) ;$$

$$\text{Log.} m = 9,6377843 ; \quad \text{Log.} \frac{1}{m} = 0,3622157 ; \quad \text{Log.} C = 9,7613381 .$$

(*) Voyez pages 45, 48 et 52 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral* de LEGENDRE.

Les valeurs de Y et Z peuvent être calculées avec la même Table de LEGENDRE. En effet, d'après l'équation

$$\frac{d^2 \text{Log.} \Gamma(p)}{dp^2} = Z''(p) = \int_0^1 \frac{dx \cdot x^{p-1} \text{Log.} \left(\frac{1}{x}\right)}{1-x},$$

nous avons d'abord

$$(53) \dots Y = \frac{h \cdot a^2}{4} \left\{ Z''\left(\frac{1}{2}a\right) - Z''\left(1 - \frac{1}{2}a\right) \right\},$$

$$(54) \dots Z = \frac{h(1-a)^2}{4b} \left\{ Z''\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a\right) - Z''\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right) \right\}.$$

Mais l'on a, en général,

$$(55) \dots Z''(p) + Z''(1-p) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi p};$$

donc l'on peut écrire

$$(56) \dots Y = \frac{h \cdot a^2}{4} \left\{ 2Z''\left(\frac{1}{2}a\right) - \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi a}{2}} \right\},$$

$$(57) \dots Z = -\frac{h(1-a)^2}{4b} \left\{ 2Z''\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right) - \frac{\pi^2}{\cos^2 \frac{\pi a}{2}} \right\}.$$

Ces deux équations donnent

$$\frac{4Y}{a^2} - \frac{4bZ}{(1-a)^2} = h \left\{ 2Z''\left(\frac{1}{2}a\right) + 2Z''\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right) - \frac{4\pi^2}{\sin^2 \pi a} \right\}.$$

Donc en observant que l'on a en général l'équation

$$(58) \dots Z''(p) + Z''\left(\frac{1}{2} + p\right) - 4Z''(2p) = 0, \quad (*)$$

il viendra

$$(59) \dots Y - b^3 Z = h \left\{ 2a^2 \cdot Z''(a) - \left(\frac{\pi a}{\sin \pi a}\right)^2 \right\}.$$

(*) Voyez page 53 du Volume cité de LEGENDRE.

Et comme

$$Z''(p) = \frac{1}{p^3} + Z''(1+p),$$

nous avons pour le calcul arithmétique de Y et Z ;

$$(60) \dots Y = h \left\{ 2 - \left(\frac{\pi a}{2 \sin \frac{\pi a}{2}} \right)^2 \right\} + h \cdot \frac{a^2}{2m} \cdot Z'' \left(1 + \frac{a}{2} \right);$$

$$(61) \dots b^3 Z = Y - h \left\{ 2 - \left(\frac{\pi a}{\sin \pi a} \right)^2 \right\} - h \cdot \frac{2a^2}{m} Z''(1+a).$$

Sur cela, il faut observer qu'après avoir réduit en décimales le nombre p , il faudra poser l'équation $p = q + (p - q)$; où q désigne les *millièmes* contenus dans p . Ensuite, si l'on fait $x = 1000(p - q)$, l'on aura

$$(62) \dots Z'(1+p) = (1000) \left\{ \begin{aligned} &\Delta \cdot Z(1+q) + \frac{(2x-1)}{2} \Delta^2 \cdot Z(1+q) \\ &+ \frac{(3x^2-6x+2)}{6} \Delta^3 \cdot Z(1+q) + \text{etc.} \end{aligned} \right\};$$

$$(63) \dots Z''(1+p) = (1000)^2 \left\{ \begin{aligned} &\Delta^2 \cdot Z(1+q) + (x-1) \Delta^3 \cdot Z(1+q) \\ &+ \frac{(6x^2-18x+1)}{12} \Delta^4 \cdot Z(1+q) + \text{etc.} \end{aligned} \right\};$$

où l'on a

$$\Delta \cdot Z(1+q) = Z(1+q+0,001) - Z(1+q),$$

$$\Delta^2 \cdot Z(1+q) = \Delta \cdot Z(1+q+0,001) - \Delta \cdot Z(1+q);$$

etc.

Pour la démonstration de ces formules, l'on peut lire les pages 81 et 82 du Volume cité de LEGENDRE. En les appliquant, il faudra avoir égard au signe qui affecte les différences Δ , Δ^2 , etc., et faire attention que les seconds membres des équations (52) et (61) doivent être calculés avec une approximation supérieure à celle de A et Y , afin que la multiplication par $\frac{1}{b^3}$ et par $\frac{1}{b^3}$ ne porte pas atteinte au degré d'approximation avec lequel l'on entend calculer les valeurs de B et de Z .

Cette remarque est propre à faire sentir la limitation à laquelle est sujette la Table de LEGENDRE, et nous avertit qu'elle doit être employée avec circonspection, surtout à l'égard de la valeur de Z .

Pour écrire les valeurs de A et de B , ainsi que celles de Y et Z , sans y faire $a=1$, l'on posera ces équations

$$(64) \dots A = \frac{h.b}{a(a+b)} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{a}{a+b}} - 1 \right)}{1-t};$$

$$(65) \dots B = \frac{h.a}{b(a+b)} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{b}{a+b}} - 1 \right)}{1-t};$$

$$(66) \dots Y = \frac{h.b^2}{4a(a+b)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{a}{a+b}} - 1 \right) t^{-\frac{b}{2(a+b)}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t};$$

$$(67) \dots Z = \frac{h.a^2}{4b(a+b)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{b}{a+b}} - 1 \right) t^{-\frac{a}{2(a+b)}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t}.$$

D'après ces formules, l'on voit aussitôt, qu'après avoir calculé les valeurs de A , B , Y , Z pour $a=1$ et pour une valeur donnée de b , l'on aura les valeurs correspondantes $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ qui doivent avoir lieu pour $a=1$ et pour une valeur de b qui serait égale à $\frac{1}{b}$, en posant les équations

$$\bar{A} = b.B; \quad \bar{B} = b.A; \quad \bar{Y} = b.Z; \quad \bar{Z} = b.Y.$$

Il est facile de démontrer, à l'aide de ces formules, que les épaisseurs Y et Z ont un rapport déterminé avec la quantité totale d'électricité répandue sur la surface des deux sphères. En effet, cette quantité totale étant désignée par E a pour expression

$$4\pi a^2.A + 4\pi b^2.B = E;$$

done en faisant $A = hA'$, $B = hB'$, nous aurons

$$(68) \dots h = \frac{E}{4\pi(A'a^2 + B'b^2)}.$$

En substituant cette valeur de h dans les équations (64), ... (67) il viendra

$$(69) \dots A = \frac{EA'}{4\pi(A'a^2 + B'b^2)};$$

$$(70) \dots B = \frac{EB'}{4\pi(A'a^2 + B'b^2)};$$

$$(71) \dots Y = \frac{E \cdot b M'}{16 \cdot \pi a^2 (a+b) \cdot D'};$$

$$(72) \dots Z = \frac{E \cdot a N'}{16 \cdot \pi b^2 (a+b) \cdot D'};$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$M' = \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{a}{a+b}} - 1 \right) t^{-\frac{b}{2(a+b)}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t};$$

$$N' = \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{b}{a+b}} - 1 \right) t^{-\frac{a}{2(a+b)}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t};$$

$$D' = \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{a}{a+b}} + t^{-\frac{b}{a+b}} - 2 \right)}{1-t}.$$

Ainsi il est clair que les valeurs de Y et Z , relatives à deux sphères données, seront proportionnelles à la quantité totale E d'électricité, et non à la quantité répandue séparément sur chacune des deux sphères.

C'est à l'aide de l'équation (68) que l'on détermine la constante h par la quantité E censée donnée.

Je vais maintenant exposer plusieurs formules nouvelles, qui seront fort utiles pour le calcul numérique des quatre quantités A , B , Y , Z , en supposant qu'il doit être fait sans l'emploi de la Table de LEGENDRE: car il y a des cas où ces quantités ne pourraient pas être calculées avec certitude, autrement que par le moyen de ces formules. De cette manière, rien ne manquera pour faciliter, sous ce rapport, la comparaison de la théorie avec l'observation.

§ X.

En remplaçant d'abord le facteur $\frac{1}{1-t}$ par son développement $1+t+t^2+t^3+\text{etc.}$, et posant, pour plus de simplicité, $k=\frac{1}{1+b}$, l'on trouve

$$A=\frac{bh}{1+b}\left\{\frac{1}{1-k}+\frac{1}{2-k}+\frac{1}{3-k}+\text{etc.}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\text{etc.}\right)\right\};$$

mais l'on a

$$\frac{1}{1-k}-1=\frac{1}{b}; \quad \frac{1}{2-k}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2(1+2b)}; \quad \frac{1}{3-k}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3(2+3b)}; \\ \text{etc.};$$

partant il est clair que l'équation (42) donne la série

$$(73) \dots A=\frac{h}{1+b}\left\{1+\frac{b}{2(1+2b)}+\frac{b}{3(2+3b)}+\frac{b}{4(3+4b)}+\text{etc.}\right\}.$$

C'est aussi ce que l'on aurait immédiatement par l'équation (H) obtenue en finissant le § VII. Car en y faisant $P=0$, $x=0$, $g=h$, l'on a

$$f(0)=bh\sum_{\infty}^{\infty}\frac{1}{b+n(1+b)}-bh\sum_{\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(1+b)},$$

ou bien

$$f(0)=\frac{bh}{1+b}\sum_{\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{n+\frac{b}{1+b}}-\frac{1}{n+1}\right\};$$

mais

$$\frac{b}{1+b}=1-\frac{1}{1+b}=1-k;$$

donc nous avons

$$A=f(0)=\frac{bh}{1+b}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(1+n)-k}-\frac{1}{1+n}\right\};$$

c'est-à-dire la série précédente.

L'on trouvera de la même manière

$$(74) \dots B=\frac{h}{1+b}\left\{1+\frac{1}{2(2+b)}+\frac{1}{3(3+2b)}+\frac{1}{4(4+3b)}+\text{etc.}\right\}.$$

Cette série démontre que la valeur de B augmente à mesure que b diminue; mais cet accroissement à une limite que l'on obtient en faisant $b=0$: alors l'on a

$$B=h\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}\right\};$$

et comme l'on sait que $\frac{\pi^2}{6}$ est la somme de cette suite infinie, nous

en concluons, que $B=h\cdot\frac{\pi^2}{6}=h(1,6449)$ est la limite vers laquelle converge l'épaisseur de la couche électrique sur la sphère du rayon b , à mesure que son rayon devient de plus en plus petit. Et il est clair, par la série (73), que $A=h$ est la limite correspondante de l'épaisseur A sur la sphère dont le rayon est égal à l'unité. Mais s'il était question de calculer, séparément, la valeur de A et celle de B , il faudrait employer l'équation (52).

Au lieu de la série (74) on pourra aussi employer celle-ci pour calculer la valeur de B ; savoir

$$(75) \dots B=\frac{h}{1+b}\left\{\begin{aligned} &\frac{\pi^2}{6}-\frac{b}{2^2(2+b)}-\frac{2b}{3^2(3+2b)}-\frac{3b}{4^2(4+3b)} \\ &-\frac{4b}{5^2(5+4b)}-\frac{5b}{6^2(6+5b)}-\text{etc.} \end{aligned}\right\};$$

on l'obtient, en ajoutant à la série la quantité *nulle*,

$$\frac{\pi^2}{6}-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\right),$$

et réduisant ensuite au même dénominateur chaque couple de deux termes correspondans.

Si, au lieu de développer le facteur $\frac{1}{1-t}$ l'on développe la quantité exponentielle $t^{-\frac{b}{1+b}}$, la formule (44) donne

$$B = \frac{h}{b(1+b)} \int_0^1 \frac{dt}{1-t} \left\{ -\frac{b}{1+b} \text{Log}.t + \frac{b^2}{2(1+b)^2} \text{Log}^2.t - \frac{b^3}{2.3(1+b)^3} \text{Log}^3.t + \text{etc.} \right\}.$$

Mais la formule

$$\int_0^1 dt . t^m \text{Log}^n . \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{1.2.3 \dots n}{(m+1)^{n+1}},$$

donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{1-t} \text{Log}^n . \left(\frac{1}{t} \right) &= \int_0^1 dt . \text{Log}^n . \left(\frac{1}{t} \right) (1+t+t^2+t^3+\text{etc.}) \\ &= (1.2.3 \dots n) \left(\frac{1}{1^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \text{etc.} \right) \\ &= (1.2.3 \dots n) S_{n+1}; \end{aligned}$$

partant, nous avons

$$(76) \dots B = \frac{h}{(1+b)^2} \left\{ S_2 + \frac{b}{1+b} S_3 + \frac{b^2}{(1+b)^2} S_4 + \frac{b^3}{(1+b)^3} S_5 + \text{etc.} \right\}.$$

Pour augmenter la convergence de cette série, nous remplacerons S_2 par $(S_2-1)+1$; S_3 par $(S_3-1)+1$; et en général S_n par $(S_n-1)+1$: alors en observant que

$$1 + \frac{b}{1+b} + \frac{b^2}{(1+b)^2} + \frac{b^3}{(1+b)^3} + \text{etc.} = \frac{1}{1 - \frac{b}{1+b}} = 1+b,$$

il viendra, en posant pour plus de simplicité, $k_n = S_n - 1$;

$$(77) \dots B = \frac{h}{1+b} + \frac{h}{(1+b)^2} \left\{ k_2 + \frac{b}{1+b} k_3 + \frac{b^2}{(1+b)^2} k_4 + \frac{b^3}{(1+b)^3} k_5 + \text{etc.} \right\},$$

où l'on a

k_n	$\text{Log. } k_n$	k_n	$\text{Log. } k_n$
k_2	9,8095153	k_8	7,6103787
k_3	9,3054756	k_9	7,3028487
k_4	8,9155224	k_{10}	6,9976387
k_5	8,5673529	k_{11}	6,6938927
k_6	8,2391257	k_{12}	6,3910869
k_7	7,9216476	k_{13}	6,0888918
		etc.	

On peut avoir par une série analogue la valeur de A , qui aura aussi la propriété de donner $A=h$, lorsque l'on y fait $b=0$. Pour cela, j'observe que la formule (42) peut être écrite ainsi;

$$(78) \dots A = \frac{hb}{1+b} \int_0^1 dt \left\{ t^{-\frac{1}{1+b}} + \frac{t^{\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} \right\} = h + \frac{hb}{1+b} \int_0^1 \frac{dt \left(t^{\frac{b}{1+b}} - 1 \right)}{1-t};$$

donc en développant d'abord la quantité exponentielle $t^{\frac{b}{1+b}}$, et intégrant ensuite comme dans le cas précédent, l'on trouvera

$$(79) \dots A = h \left\{ 1 - \frac{b^2}{(1+b)^2} S_2 + \frac{b^3}{(1+b)^3} S_3 - \frac{b^4}{(1+b)^4} S_4 + \frac{b^5}{(1+b)^5} S_5 - \text{etc.} \right\}.$$

Mais l'on a

$$1 - u^2 + u^3 - u^4 + u^5 - \text{etc.} = 2 - u - \frac{1}{1+u};$$

et par conséquent

$$1 - \frac{b^2}{(1+b)^2} + \frac{b^3}{(1+b)^3} - \frac{b^4}{(1+b)^4} + \text{etc.} = \frac{2+b}{1+b} - \frac{(1+b)}{1+2b};$$

donc la série (79) est équivalente à celle-ci;

$$A = \frac{h(2+b)}{1+b} - \frac{h(1+b)}{1+2b} - \frac{hb^2}{(1+b)^3} \left\{ k_2 - \frac{b}{1+b} k_3 + \frac{b^2}{(1+b)^2} k_4 - \text{etc.} \right\},$$

ou bien, en remplaçant $\frac{b}{1+b}$ par a , à celle-ci ;

$$A = h \left\{ 1 - \frac{a^2}{1+a} - a^2 k_2 + a^3 k_3 - a^4 k_4 + a^5 k_5 - \text{etc.} \right\}.$$

Cette série étant formée de termes dont les signes sont alternatifs offre plus d'avantage pour calculer la valeur de A . Mais il importe de remarquer, qu'elle peut être transformée dans une autre plus convergente, au moyen de l'équation

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi a}{2} \cot. a \pi = \frac{a^2}{1-a^2} + k_2 a^2 + k_4 a^4 + k_6 a^6 + \text{etc.},$$

qui dérive de l'expression de $\cot. \varphi$ employée dans le § VIII. Car il est évident, que par la combinaison de cette équation avec la précédente, l'on a

$$(80) \dots A = h \left\{ \frac{1}{2} + \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{\pi a}{2} \cot. \pi a + a^3 k_3 + a^5 k_5 + a^7 k_7 + \text{etc.} \right\}.$$

Maintenant, si l'on divise les deux équations (76) et (79) et si l'on développe la fonction ainsi obtenue suivant les puissances de $\frac{b}{1+b}$, l'on trouvera un résultat de cette forme ;

$$(81) \dots \frac{B}{A} = \frac{1}{(1+b)^2} \left\{ H_{(0)} + \frac{b}{1+b} H_{(1)} + \frac{b^2}{(1+b)^2} H_{(2)} + \text{etc.} \right\};$$

où l'on a ;

$$H_{(0)} = S_2;$$

$$H_{(1)} = S_3;$$

$$H_{(2)} = (S_2)^2 + S_4;$$

$$H_{(3)} = S_5;$$

$$H_{(4)} = S_6 + S_2(S_4 + S_5) - (S_3)^2;$$

$$H_{(5)} = S_7 - S_2(S_5 - S_6) + S_3(S_4 - S_5) + (S_2)^2(S_4 + S_5) - S_2(S_3)^2;$$

etc.

En réduisant ces coefficients en nombres à l'aide de la Table que LEGENDRE a donnée dans la page 65 du second Volume des Exercices de Calcul Intégral, l'on aura

$$H_{(0)} = 1,644934 ; \dots \dots \dots \text{Log. } H_{(0)} = 0,2161485 ;$$

$$H_{(1)} = 1,202057 ; \dots \dots \dots H_{(1)} = 0,0799251 ;$$

$$H_{(2)} = 3,788130 ; \dots \dots \dots H_{(2)} = 0,5784252 ;$$

$$H_{(3)} = 1,036928 ; \dots \dots \dots H_{(3)} = 0,0157485 ;$$

$$H_{(4)} = 3,058433 ; \dots \dots \dots H_{(4)} = 0,4854990 ;$$

$$H_{(5)} = 4,388152 ; \dots \dots \dots H_{(5)} = 0,6422770 ;$$

etc.

etc.

En prenant $b = \frac{1}{99}$, les quatre premiers termes de cette série suffisent pour donner la valeur de $\frac{B}{A}$ exacte jusqu'à la troisième chiffre décimale inclusivement, c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \left(1 - \frac{1}{100}\right)^3 \{1,644934 + 0,012021 + 0,000379 + 0,000001\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{100}\right)^3 (1,657335) = 1,62435 . \end{aligned}$$

Poisson trouve 1,6342 dans la page 63 de son premier Mémoire. Mais l'excès de ce nombre doit tenir à une erreur de calcul; car il importe d'observer que sa formule est fautive à l'égard du terme multiplié par $\frac{b^2}{(1+b)^2}$, puisque le coefficient de ce terme est

$$S_1 \cdot S_1 + S_4 = \frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^4}{90} ,$$

et non $\frac{\pi^4}{36}$ seulement.

En calculant, séparément, les valeurs de A et B par les séries (77) et (80) l'on trouve; $A = 0,9998367$; $B = 1,6240884$. Il suffit pour

cela de négliger les termes multipliés par k_5 , k_6 etc. L'on a donc $\frac{B}{A} = 1,624354$; et ce résultat est exact jusqu'à la cinquième chiffré décimale inclusivement.

Si l'on voulait continuer plus loin la série des coefficients numériques $H_{(n)}$ l'on aurait, d'après la théorie des séries récurrentes :

$$H_{(6)} = S_8 + H_{(5)}S_6 - H_{(4)}S_5 + H_{(3)}S_4 - H_{(2)}S_3 + H_{(1)}S_2 ;$$

$$H_{(7)} = S_9 - H_{(6)}S_7 + H_{(5)}S_6 - H_{(4)}S_5 + H_{(3)}S_4 - H_{(2)}S_3 + H_{(1)}S_2 ;$$

$$H_{(8)} = S_{10} + H_{(7)}S_8 - H_{(6)}S_7 + H_{(5)}S_6 - H_{(4)}S_5 + H_{(3)}S_4 - H_{(2)}S_3 + H_{(1)}S_2 ;$$

etc.

§ XI.

Pour développer de la même manière la formule (41), nous ferons pour plus de simplicité ;

$$k = \frac{2+b}{2(1+b)} , \quad k' = \frac{b}{2(1+b)} ;$$

ce qui donne

$$Y = \frac{hb^2}{4(1+b)^2} \cdot \int_0^1 dt \frac{\{t^{-k} - t^{-k'}\} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} .$$

En développant maintenant le facteur $\frac{1}{1-t}$ et intégrant ensuite l'on aura

$$Y = \frac{hb^2}{4(1+b)^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(1-k)^2} + \frac{1}{(2-k)^2} + \frac{1}{(3-k)^2} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{(1-k')^2} - \frac{1}{(2-k')^2} - \frac{1}{(3-k')^2} - \text{etc.} \end{array} \right\} ;$$

et en substituant pour k et k' leur valeur, il viendra

$$(82) \dots\dots Y = h \left\{ \begin{aligned} &1 - \left(\frac{b}{2+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{2+3b}\right)^2 - \left(\frac{b}{4+3b}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{b}{4+5b}\right)^2 - \left(\frac{b}{6+5b}\right)^2 + \left(\frac{b}{6+7b}\right)^2 - \text{etc.} \end{aligned} \right\};$$

ou bien

$$(83) \dots F = 4b^3(1+b)h \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{[b(2+b)]^2} + \frac{3}{[(2+3b)(4+3b)]^2} \\ &+ \frac{5}{[(4+5b)(6+5b)]^2} + \frac{7}{[(6+7b)(8+7b)]^2} + \text{etc.} \end{aligned} \right\}.$$

Cette série démontre, que la valeur de Y converge vers h à mesure que b diminue. Effectivement, l'on a

$$Y = \frac{hb^3}{4(1+b)^2} \cdot \int_0^1 dt \cdot t^{-k'} \left\{ \frac{t^{2k'-1}}{1-t} + t^{2k'-1} \right\} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right),$$

d'où l'on tire

$$(84) \dots\dots Y = h + \frac{hb^3}{4(1+b)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \{ t^{k'} - t^{-k'} \} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t};$$

expression qui se réduit à h lorsque $b=0$.

En développant le facteur $t^{k'} - t^{-k'}$, nous avons

$$t^{k'} - t^{-k'} = 2k' \text{Log.} t + \frac{2k'^3}{2 \cdot 3} \text{Log}^3 t + \frac{2k'^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \text{Log}^5 t + \text{etc.};$$

donc en intégrant il viendra

$$(85) \dots Y = h - \frac{hb^3}{2(1+b)^3} \left\{ \begin{aligned} &S_3 + \frac{2b^2}{2^2(1+b)^2} S_5 + \frac{3b^4}{2^4(1+b)^4} S_7 + \frac{4b^6}{2^6(1+b)^6} S_9 \\ &+ \frac{5b^8}{2^8(1+b)^8} S_{11} + \text{etc.} \end{aligned} \right\}.$$

En remplaçant S_3 par $(S_3 - 1) + 1 = k_3 + 1$; S_5 par $k_5 + 1$ etc.; et remarquant que l'équation

$$1 + 2u^2 + 3u^4 + 4u^6 + \text{etc.} = \frac{1}{(1-u^2)^2}$$

donne

$$1 + \frac{2b^2}{2^2(1+b)^2} + \frac{3b^4}{2^4(1+b)^4} + \text{etc.} = \frac{16 \cdot (1+b)^4}{[(2+3b)(2+b)]^2},$$

nous aurons

$$(86) \dots Y = h - \frac{8hb^3(1+b)}{[(2+b)(2+3b)]^2} - \frac{hb^3}{2(1+b)^3} \left\{ k_3 + \frac{2b^2}{2^2(1+b)^2} k_5 + \frac{3b^4}{2^4(1+b)^4} k_7 + \text{etc.} \right\}.$$

En divisant les deux équations (85) et (79), et développant ensuite la fraction $\frac{Y}{A}$ suivant les puissances de $\frac{b}{1+b}$, l'on aura une série de cette forme ;

$$(87) \dots \frac{Y}{A} = 1 + \frac{b^2}{(1+b)^2} G_{(2)} - \frac{b^3}{(1+b)^3} G_{(3)} + \frac{b^4}{(1+b)^4} G_{(4)} - \text{etc.},$$

où l'on a ;

$$G_{(2)} = S_2 ;$$

$$G_{(3)} = \frac{3}{2} S_3 ;$$

$$G_{(4)} = S_4 + S_2 \cdot S_2 ;$$

$$G_{(5)} = \frac{5}{4} S_5 + \frac{5}{2} S_2 \cdot S_3 ;$$

$$G_{(6)} = S_6 + 2 S_2 \cdot S_4 + S_2^3 + \frac{3}{2} S_3 \cdot S_3 ;$$

$$G_{(7)} = \frac{35}{32} S_7 + \frac{9}{4} S_2 \cdot S_5 + \frac{5}{2} S_3 \cdot S_4 + \frac{7}{2} S_3 \cdot (S_2)^2 ;$$

$$G_{(8)} = S_8 + S_6 G_{(2)} + S_4 G_{(3)} + S_4 G_{(4)} + S_3 G_{(5)} + S_2 G_{(6)} ;$$

$$G_{(9)} = \left(\frac{4}{2^7} + 1 \right) S_9 + S_7 G_{(2)} + S_6 G_{(3)} + S_5 G_{(4)} + S_4 G_{(5)} + S_3 G_{(6)} + S_2 G_{(7)} ;$$

etc. ;

$$G_{(2)} = 1,644934 ; \dots \dots \text{Log. } G_{(2)} = 0,2161485 ;$$

$$G_{(3)} = 1,803085 ; \dots \dots \dots G_{(3)} = 0,2560162 ;$$

$$G_{(4)} = 3,788130 ; \dots \dots \dots G_{(4)} = 0,5784248 ;$$

$$G_{(5)} = 6,239430 ; \dots \dots \dots G_{(5)} = 0,7951449 ;$$

$$G_{(6)} = 11,196343 ; \dots \dots \dots G_{(6)} = 1,0490762 ;$$

$$G_{(7)} = 10,33995 ; \dots \dots \dots G_{(7)} = 1,0145184 ;$$

etc.

etc.

Les trois premiers termes de cette série sont ceux qu'on voit dans la page 69 du premier Mémoire de Poisson. En prenant, comme lui, $\frac{b}{1+b} = 0,01$ l'on obtient $\frac{Y}{A} = 1,0001626$. L'on aurait le nombre 1,000166 si, par méprise, l'on ajoutait le troisième terme tandis qu'il doit être retranché.

Soit $b=1$, ce qui arrive lorsque les deux sphères en contact sont égales. Alors la série (83) donne

$$Y = 8h \left\{ \frac{1}{(1.3)^2} + \frac{3}{(5.7)^2} + \frac{5}{(9.11)^2} + \frac{7}{(13.15)^2} + \text{etc.} \right\} ,$$

et la série (82) donne

$$Y = h \left\{ 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \text{etc.} \right\} .$$

En réduisant en décimales les huit premiers termes de la première l'on trouve

$$\begin{aligned} Y = 8h \left\{ \begin{array}{l} 0,111111 + 0,002449 + 0,000510 + 0,000184 \\ + 0,000086 + 0,000045 + 0,000028 + 0,000018 \end{array} \right\} \\ = 8h(0,114431) = h(0,915428) . \end{aligned}$$

Mais l'on se tromperait, si l'on croyait que ce nombre est exact au-delà de la troisième chiffre décimale. En effet; si l'on réduit en

nombres la seconde série, qui a la propriété de donner des résultats alternativement plus petits et plus grands que le véritable suivant que l'on somme un nombre pair ou impair de termes l'on trouve :

Nombre des termes	Somme	Nombre des termes	Somme
2 ...	... 0,8888889 ...	3 ...	... 0,9288889
4 ...	... 0,9084008 ...	5 ...	... 0,9207465
6 ...	... 0,9124821 ...	7 ...	... 0,9183992
8 ...	... 0,9139548 ...	9 ...	... 0,9174150
10 ...	... 0,9146449 ...	11 ...	... 0,9169125
12 ...	... 0,9150221 ...	13 ...	... 0,9166221
14 ...	... 0,9152504 ...	15 ...	... 0,9164395
16 ...	... 0,9153989 ...	17 ...	... 0,9163172
18 ...	... 0,9155009 ...	19 ...	... 0,9162314
20 ...	... 0,9155739 ...	21 ...	... 0,9161688
22 ...	... 0,9156280 ...	23 ...	... 0,9161218
24 ...	... 0,9156691 ...	25 ...	... 0,9160856
26 ...	... 0,9157011 ...	27 ...	... 0,9160571
28 ...	... 0,9157265 ...	29 ...	... 0,9160343

Donc en prenant la moyenne des deux derniers résultats l'on aura $Y = h(0,9158814)$: et l'on pourra regarder ce nombre comme exact jusqu'à la quatrième chiffre décimale inclusivement.

Il y a une autre manière de développer la quantité Y , qui peut être utile dans quelques circonstances. En développant d'abord le fac-

teur $t^{-\frac{1}{1+b}} - 1$, et ensuite le facteur $\frac{1}{1-t}$, la formule (41) donne

$$Y = \frac{hb^2}{4(1+b)^3} \cdot \int_0^1 dt \cdot \text{Log}^2\left(\frac{1}{t}\right) \left\{ \begin{array}{l} \{ t^{-k} + t^{-k+1} + t^{-k+2} + \text{etc.} \} \\ \{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+b} \text{Log}\left(\frac{1}{t}\right) + \text{etc.} \} \end{array} \right\} ;$$

où l'on a fait pour plus de simplicité, $k = \frac{b}{2(1+b)}$.

Il suit de là que l'on a

$$Y = \frac{hb^2}{4(1+b)^3} \left\{ \begin{aligned} &2 \left[\frac{1}{(1-k)^3} + \frac{1}{(2-k)^3} + \frac{1}{(3-k)^3} + \text{etc.} \right] \\ &+ \frac{3}{1+b} \left[\frac{1}{(1-k)^4} + \frac{1}{(2-k)^4} + \frac{1}{(3-k)^4} + \text{etc.} \right] \\ &+ \frac{4}{(1+b)^2} \left[\frac{1}{(1-k)^5} + \frac{1}{(2-k)^5} + \frac{1}{(3-k)^5} + \text{etc.} \right] \\ &+ \text{etc.} ; \end{aligned} \right.$$

en substituant pour k sa valeur, et posant pour plus de simplicité

$$S_n' = \frac{1}{(2+b)^n} + \frac{1}{(4+3b)^n} + \frac{1}{(6+5b)^n} + \text{etc.} ,$$

l'on aura

$$(88) \dots Y = hb^2 \{ 2 \cdot 2 \cdot S_3' + 2^2 \cdot 3 S_4' + 2^3 \cdot 4 S_5' + 2^4 \cdot 5 S_6' + \text{etc.} \} .$$

D'après la règle du § VI, la formule (43) donnera les séries suivantes;

$$(89) \dots Z = \frac{h}{b} \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{1}{(1+2b)^2} + \frac{1}{(3+2b)^2} - \frac{1}{(3+4b)^2} + \frac{1}{(5+4b)^2} - \frac{1}{(5+6b)^2} \\ &+ \frac{1}{(7+6b)^2} - \frac{1}{(7+8b)^2} + \frac{1}{(9+8b)^2} - \frac{1}{(9+10b)^2} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} ;$$

$$(90) \dots Z = 4h(1+b) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{(1+2b)^3} + \frac{3}{[(3+2b)(3+4b)]^3} + \frac{5}{[(5+4b)(5+6b)]^3} \\ &+ \frac{7}{[(7+6b)(7+8b)]^3} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} ;$$

$$(91) \dots Z = \frac{h}{b} - \frac{h}{2b(1+b)^3} \left\{ S_3 + \frac{2 \cdot S_5}{2^2(1+b)^2} + \frac{3 \cdot S_7}{2^4(1+b)^4} + \frac{4 \cdot S_9}{2^6(1+b)^6} + \text{etc.} \right\} ;$$

$$(92) \dots Z = \frac{h}{b} - \frac{8h}{b} \cdot \frac{1+b}{[(1+2b)(3+2b)]^2} \\ - \frac{h}{2b(1+b)^3} \left\{ k_3 + \frac{2k_5}{2^2(1+b)^2} + \frac{3k_7}{2^3(1+b)^4} + \frac{4k_9}{2^6(1+b)^6} + \text{etc.} \right\};$$

$$(93) \dots Z = h \left\{ 2 \cdot 2 S_3'' + 2^2 \cdot 3 b S_4'' + 2^3 \cdot 4 b^2 S_5'' + 2^4 \cdot 5 b^3 S_6'' + \text{etc.} \right\};$$

où l'on a fait

$$S_n'' = \frac{1}{(1+2b)^n} + \frac{1}{(3+4b)^n} + \frac{1}{(5+6b)^n} + \text{etc.}$$

En faisant $b=0$ dans cette dernière série l'on a immédiatement

$$Z = 4h \left\{ 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{etc.} \right\},$$

pour la limite vers laquelle converge la valeur de Z à mesure que b diminue. Pour réduire facilement cette série en nombres, il suffit d'observer qu'elle est égale à $\left(1 - \frac{1}{8}\right) S_3$: alors l'on a d'abord

$$Z = h \cdot \frac{7}{2} S_3 = h \cdot \frac{7}{2} (1, 202057) = h (4, 207199).$$

Après ces séries, je reprends la considération de l'équation (42) pour donner des formules *finies*, propres au calcul numérique de la quantité A pour les cas où le rayon b sera donné rationnellement.

§ XII.

Supposons donc, que $b = \frac{m}{n}$ est la valeur donnée de b , sous la condition expresse que m et n soient deux nombres entiers et positifs. Alors, en faisant $t = x^{m+n}$, la formule (42) sera transformée en celle-ci; savoir

$$A = \frac{mh}{m+n} \text{Log.}(x^{m+n} - 1) + mh \int_0^1 \frac{dx \cdot x^{m-1}}{1 - x^{m+n}}.$$

Avant d'aller plus loin il faut distinguer deux cas: celui où $m+n$ serait nombre impair et celui où il serait pair.

Dans le premier l'on a

$$x^{m+n} - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + x^3 \dots + x^{m+n-1}) ;$$

$$\frac{x^{m-1}}{1 - x^{m+n}} = -\frac{1}{m+n} \cdot \frac{1}{x-1} + R ;$$

et par conséquent

$$A = \frac{mh}{m+n} \text{Log.}(m+n) + mh \int_0^1 R dx .$$

Donc, en faisant $m+n=2f+1$, nous aurons

$$(I) \dots A = \frac{mh}{2f+1} \text{Log.}(2f+1) + mh \int_0^1 \frac{dx \cdot x^{m-1}}{1 - x^{2f+1}} ,$$

pourvu que l'on ait soin de retenir seulement les facteurs réels du second degré de $1 - x^{2f+1}$.

Dans le second cas, nous avons

$$x^{m+n} - 1 = (x^2 - 1) \left(1 + x^2 + x^4 + x^6 \dots + x^{\frac{m+n}{2}-1} \right) ;$$

$$\frac{x^{m-1}}{1 - x^{m+n}} = -\frac{1}{m+n} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{(-1)^n}{m+n} \cdot \frac{1}{x+1} + R' ;$$

partant

$$A = \frac{mh}{m+n} [1 - (-1)^n] \text{Log.} 2 + \frac{mh}{m+n} \text{Log.} \left(\frac{m+n}{2} \right) + mh \int_0^1 R' dx .$$

Donc en faisant $m+n=2f$ et $m=2k+1$, l'on aura l'équation

$$(II) \dots A = \frac{h(2k+1)}{2f} \text{Log.}(4f) + h(2k+1) \int_0^1 \frac{dx \cdot x^{2k}}{1 - x^{2f}} ,$$

pourvu que l'on retienne les facteurs réels du second degré de $1 - x^{2f}$ à l'exclusion de $1 - x^2$.

Pour analyser complètement ces deux cas, qui les comprennent tous en supposant la fraction $\frac{m}{n}$ réduite à sa plus simple expression, j'observe qu'en appliquant ici la formule donnée par EULER dans la page 50 du 1^{er} Volume de son Calcul Intégral l'on a, après avoir fait pour plus de simplicité ;

$$\theta = \frac{2m\pi}{2f+1} ; \quad \theta' = \frac{(2k+1)\pi}{f} ;$$

$$(I)' \dots A = \frac{mh}{2f+1} \text{Log.}(2f+1) - \frac{2mh}{2f+1} \cdot \sum_1^f \cos i\theta \text{Log.} \left[2 \sin \frac{i\pi}{2f+1} \right] \\ + \frac{2mh}{2f+1} \cdot \sum_1^f \left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2f+1} \right) \sin i\theta ;$$

$$(II)' \dots A = \frac{(2k+1)h}{2f} \text{Log.} f - \frac{(2k+1)h}{f} \cdot \sum_1^{f-1} \cos i\theta' \text{Log.} \left[\frac{2 \sin i\pi}{2f} \right] \\ + \frac{(2k+1)h}{f} \cdot \sum_1^{f-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2f} \right) \sin i\theta' .$$

Cela posé, remarquons que l'on a ces deux formules

$$\sin \psi + \sin 2\psi + \sin 3\psi \dots + \sin i\psi = \frac{\cos \frac{\psi}{2} - \cos(1+2i)\frac{\psi}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}\psi} ;$$

$$\cos \psi + \cos 2\psi + \cos 3\psi \dots + \cos i\psi = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(1+2i)\frac{\psi}{2}}{2 \sin \frac{\psi}{2}} .$$

En différentiant par rapport à ψ les deux membres de la seconde l'on aura

$$\sin \psi + 2 \sin 2\psi + 3 \sin 3\psi \dots + i \sin i\psi = \frac{\sin i\psi}{4 \sin^2 \frac{1}{2}\psi} - \frac{\cos(1+2i)\frac{\psi}{2}}{2 \sin \frac{\psi}{2}} .$$

Il suit de là que

$$\sum_{i=1}^f \sin i\theta = \frac{\cos \frac{1}{2}\theta - \cos m\pi}{2 \sin \frac{1}{2}\theta} ;$$

$$\sum_{i=1}^f \cos i\theta = -\frac{1}{2} ;$$

$$\sum_{i=1}^{f-1} i \sin i\theta = \frac{\sin f\theta}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{f}{2} \cdot \frac{\cos m\pi}{\sin \frac{1}{2}\theta} = -\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{4}\right) \frac{\cos m\pi}{\sin \frac{1}{2}\theta} .$$

En substituant ces valeurs, la formule (I)' se réduira à celle-ci;

$$(I)'' \dots A = \frac{mh}{2f+1} \text{Log. } 2(2f+1) + \frac{m\pi h}{2(2f+1)} \cot\left(\frac{m\pi}{2f+1}\right) \\ - \frac{2mh}{2f+1} \cdot \sum_{i=1}^f \cos\left(\frac{2m\pi i}{2f+1}\right) \text{Log.} \left[\sin \frac{i\pi}{2f+1}\right] .$$

Par des réductions semblables l'on trouvera que la formule (II)' donne

$$(II)'' \dots A = \frac{(2k+1)h}{2f} \text{Log.} (4f) + \frac{(2k+1)\pi h}{4f} \cot \frac{(2k+1)\pi}{2f} \\ - \frac{(2k+1)h}{f} \cdot \sum_{i=1}^{f-1} \cos \frac{i(2k+1)\pi}{f} \text{Log.} \left[\sin \frac{i\pi}{2f}\right] .$$

Remarquons maintenant que la somme indiquée par la caractéristique

$\sum_{i=1}^{f-1}$ demeure la même en remplaçant $\sum_{i=1}^{f-1}$ par $\sum_{i=1}^f$ à cause que

$$\text{Log.} \left(\sin \frac{f\pi}{2f}\right) = \text{Log.} (1) = 0 .$$

Donc on peut réunir ces deux formules dans une seule, et écrire pour toute valeur rationnelle $\frac{m}{n}$ de b ;

$$(94) \dots A = \frac{h \cdot m}{m+n} \text{Log.}[2(m+n)] + \frac{h \cdot m \pi}{2(m+n)} \cot. \left(\frac{m \pi}{m+n} \right) \\ - \frac{2mh}{m+n} \sum_{i=1}^{(m+n)^2} \cos. \frac{2m\pi \cdot i}{m+n} \text{Log.} \left[\sin. \frac{i\pi}{m+n} \right].$$

A l'aide de cette formule et de la formule (52) qui donne

$$(95) \dots B = \frac{n^2}{m^2} A - \frac{\pi h \cdot n^2}{m(m+n)} \cot. \left(\frac{m \pi}{m+n} \right),$$

l'on pourra calculer séparément les valeurs de A et B , en se rappelant, que les logarithmes qui entrent dans l'expression de A sont hyperboliques, et que l'on doit prendre pour $\frac{1}{2}(m+n)$ le nombre entier immédiatement inférieur.

En substituant pour A sa valeur dans celle de B , l'on a

$$(96) \dots B = \frac{hn^2}{m(m+n)} \text{Log.}[2(m+n)] - \frac{\pi h \cdot n^2}{2m(m+n)} \cot. \left(\frac{m \pi}{m+n} \right) \\ - \frac{2hn^2}{m(m+n)} \sum_{i=1}^{(m+n)^2} \cos. \frac{2m\pi \cdot i}{m+n} \text{Log.} \left[\sin. \frac{i\pi}{m+n} \right].$$

Il suit de là que dans le cas fort simple de $a=b \pm 1$, l'on a

$$A=B=h \text{Log. } 2.$$

Mais, pour offrir un exemple du calcul de ces formules dans un cas un peu compliqué, nous prendrons $m=4$, $n=11$. La formule (94) donne

$$A = \frac{h \cdot 4}{15.111} \cdot \text{Log. } 30 + \frac{2\pi h}{15} \cdot \cot. 48^\circ \\ - \frac{8 \cdot h}{15.111} \left\{ \begin{array}{l} -\sin 6^\circ \cdot \text{Log. } \sin 12^\circ - \cos 12^\circ \cdot \text{Log. } \sin 24^\circ \\ + \sin 18^\circ \cdot \text{Log. } \sin 36^\circ + \cos 24^\circ \cdot \text{Log. } \sin 48^\circ \\ - \sin 30^\circ \cdot \text{Log. } \sin 60^\circ - \cos 36^\circ \cdot \text{Log. } \sin 72^\circ \\ + \sin 42^\circ \cdot \text{Log. } \sin 84^\circ \end{array} \right\};$$

où m désigne le module. Nous avons

$\text{Log. sin } 12^\circ = -0,6821211$;	$\text{Log. } 0,6821211 = 9,8338617$;
$\text{Log. sin } 24^\circ = -0,3906867$;	$\text{Log. } 0,3906867 = 9,5918287$;
$\text{Log. sin } 36^\circ = -0,2307813$;	$\text{Log. } 0,2307813 = 9,3632006$;
$\text{Log. sin } 48^\circ = -0,1289265$;	$\text{Log. } 0,1289265 = 9,1103421$;
$\text{Log. sin } 60^\circ = -0,0624694$;	$\text{Log. } 0,0624694 = 8,7956654$;
$\text{Log. sin } 72^\circ = -0,0217937$;	$\text{Log. } 0,0217937 = 8,3383309$;
$\text{Log. sin } 84^\circ = -0,0023857$;	$\text{Log. } 0,0023857 = 7,3776158$.

$$-\sin 6^\circ. \text{Log.}(\sin 12^\circ) = +0,0713011 ;$$

$$-\cos 12^\circ. \text{Log.}(\sin 24^\circ) = +0,3821490 ;$$

$$\sin 18^\circ. \text{Log.}(\sin 36^\circ) = -0,0713153 ;$$

$$\cos 24^\circ. \text{Log.}(\sin 48^\circ) = -0,0117780 ;$$

$$-\sin 30^\circ. \text{Log.}(\sin 60^\circ) = +0,0312345 ;$$

$$-\cos 36^\circ. \text{Log.}(\sin 72^\circ) = +0,0176317 ;$$

$$\sin 42^\circ. \text{Log.}(\sin 84^\circ) = -0,0015964 ;$$

$$\frac{4}{15.m} \text{Log. } 30 + \frac{2\pi}{15} \cot. 48^\circ = 0,9069859 + 0,3771600 ;$$

$$\frac{A}{h} = 1,28415 - \frac{8}{15.m} (0,3116246) = 1,28415 - 0,3826890 ;$$

$$A = h.(0,90146) .$$

La formule (67) donne

$$B = h \frac{121}{16} (0,90146 - 0,7543200) = h(1,11274) ;$$

partant l'on a

$$\frac{A}{B} = 0,810136 .$$

Poisson trouve, dans la page 50 de son second Mémoire, 0,8107 pour ce même rapport ; en observant, que, d'après notre manière de calculer, la quantité $\frac{A}{B}$ revient à celle qu'il exprime par $\frac{B}{A}$. Mais cet exemple prouve que nos formules exigent un calcul plus facile.

Cependant, si l'on demandait les quantités A et B avec un degré d'exactitude supérieur à celui des millièmes, il serait plus avantageux d'employer les formules (51), (52), (62) avec la Table de LEGENDRE. C'est ainsi qu'ont été calculées les valeurs de A' , B' , Y' , Z' que l'on voit dans la Table qui termine ce Mémoire, en observant que nous avons fait $A = h A'$, $B = h B'$, $Y = h Y'$, $Z = h Z'$. Dans la construction de cette Table l'on a choisi de préférence les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ etc. pour b ,

parceque la simplicité du rapport $\frac{a}{b}$ entre les rayons des deux sphères rendra plus fréquent l'usage de ces résultats numériques.

Pour vérifier une table des valeurs de A et de B , calculée par les formules précédentes, l'on pourra employer la relation suivante. Soient $A(b)$, $A(b')$, $A(b'')$ trois valeurs de A correspondantes à b , b' , b'' ; où l'on a: $b' = \frac{1-b}{1+3b}$; $b'' = \frac{2b}{1-b}$: d'après les équations (45) et (47) nous avons ces quatre équations (abstraction faite du facteur commun h);

$$A(b) = -a \{ C + Z'(a) \} ;$$

$$A(b') = -\left(\frac{1}{2} - a\right) \left\{ C + Z'\left(\frac{1}{2} - a\right) \right\} ;$$

$$A(b'') = -2a \{ C + Z'(2a) \} ;$$

$$Z'\left(\frac{1}{2} - a\right) - Z'\left(\frac{1}{2} + a\right) = -\pi \operatorname{tang} . \pi a ;$$

lesquelles donnent

$$\frac{A(b)}{a} + \frac{2A(b')}{1-2a} - \frac{A(b'')}{a} = \pi \operatorname{tang} \pi a - Z'(a) - Z'\left(\frac{1}{2} + a\right) + 2Z'(2a).$$

Or il est démontré, que

$$Z'(a) + Z'\left(\frac{1}{2} + a\right) - 2Z'(2a) = -2 \operatorname{Log} 2; \quad (*)$$

partant nous avons

$$(97) \dots A(b) + \frac{2b}{1-b} A(b') - A(b'') = a \{ 2 \operatorname{Log} 2 + \pi \operatorname{tang} \pi a \},$$

pour l'équation de condition à laquelle devront satisfaire trois valeurs de A que l'on aura calculées avec les rayons désignés par b, b', b'' , que nous supposons chacun plus petit que l'unité. Lorsque l'on aura $b'' > 1$; ce qui arrive si l'on prend $b > \frac{1}{3}$, il faut observer que l'on a

$$A(b'') = \frac{1}{b''} B\left(\frac{1}{b''}\right) = b'' \left(\frac{1}{b''}\right)^2 \cdot B\left(\frac{1}{b''}\right) \dots \{ \text{Voyez § IX} \},$$

où $B\left(\frac{1}{b''}\right)$ désigne la valeur de B relative à $b = \frac{1}{b''}$. Donc en ayant égard à l'équation (52) il est clair que l'on a,

$$A(b'') = b'' \left\{ A\left(\frac{1}{b''}\right) - \frac{\pi}{1+b''} \cot \frac{\pi}{1+b''} \right\}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, l'on aura

$$(98) \dots A(b) + \frac{2b}{1-b} A(b') - \frac{2b}{1-b} A\left(\frac{1}{b''}\right) = a \{ 2 \operatorname{Log} 2 + \pi \cot \pi a \},$$

pour l'équation de condition relative aux cas où l'on a $b'' > 1$.

(*) Voyez page 155 du second Volume des Exercices de Calcul Intégral de LEGENDRE.

Pour vérifier d'une manière analogue les valeurs de Y et de Z , on peut observer, que les équations (56) et (59) donnent, en général,

$$(99) \dots Y(b) - b^3 Z(b) = Y(b'') ;$$

et que, si la quantité b'' surpasse l'unité, l'on a, en vertu de l'équation $Y(b'') = \frac{1}{b''} Z\left(\frac{1}{b''}\right)$;

$$(100) \dots Y(b) - b^3 Z(b) = \frac{1-b}{2b} \cdot Z\left(\frac{1}{b}\right) .$$

Ces équations sont fort remarquables par elles mêmes, indépendamment de leur emploi pour la vérification des calculs numériques.

Avant de terminer ce § je ferai remarquer, que par le rapprochement des équations (42) et (94) l'on peut établir l'équation *finie*

$$(101) \dots \int_0^1 \frac{dt(1-t^{2-1})}{1-t} = -\frac{\pi}{2} \cot. \pi a - \text{Log.} \left(\frac{2m}{a} \right) \\ + 2 \sum_{i=1}^{(m+n):2} \cos. 2i\pi a \cdot \text{Log.} \left[\sin \left(\frac{i\pi a}{m} \right) \right] ,$$

toutes les fois que la quantité a pourra être exprimée rationnellement par le rapport $\frac{m}{m+n} = a$. Le second membre de cette équation ne constitue pas une fonction *continue* de a : mais il résulte de l'équation (80), que pour toute valeur de a plus petite que l'unité l'on aura, par une fonction continue et infinie, l'équation

$$(102) \dots \int_0^1 \frac{dt(1-t^{2-1})}{1-t} = -\frac{a^2}{1-a^2} - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2} \cot. a\pi - a^2 k_3 - a^4 k_5 - a^6 k_7 - \text{etc.}$$

Pour adapter ces deux équations au cas où l'exposant de t serait a au lieu de $a-1$, il faut observer que l'on a identiquement ;

$$(103) \dots \int_0^1 \frac{dt(1-t^a)}{1-t} = \frac{1}{a} + \int_0^1 \frac{dt(1-t^{2-1})}{1-t} ,$$

ainsi que nous l'avons déjà dit plus haut pour former l'équation (78). Il suit de là et de l'équation (45) que l'on a pour toute valeur rationnelle de $a = \frac{m}{m+n}$;

$$(104) \dots C + Z'(a) = -\frac{\pi}{2} \cdot \cot. \pi a - \text{Log.} \left(\frac{2m}{a} \right) \\ + \sum_{i=1}^{(m+n):2} \cos 2i\pi a \cdot \text{Log.} \left[\sin \left(\frac{i\pi a}{m} \right) \right] ;$$

et pour une valeur quelconque de a plus petite que l'unité ,

$$(105) \dots C + Z'(a) = -\frac{a^2}{1-a^2} - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2} \cot. a\pi - a^2 k_3 - a^4 k_5 - a^6 k_7 - \text{etc.}$$

§ XIII.

Il est maintenant facile d'évaluer la force répulsive, ou attractive, que les deux sphères électrisées en contact, peuvent exercer sur un élément superficiel électrique, qui serait placé extérieurement à leurs surfaces sur la droite qui joint les centres. En effet, conformément aux principes généraux énoncés dans les §§ II et V, cette force, que je nomme R , sera exprimée par

$$R = -\frac{dV}{dx} - \frac{dV_1}{dx_1} ;$$

pourvu que l'on prenne

$$V = \frac{4\pi}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) ; \quad V_1 = \frac{4\pi b^2}{x_1} F\left(\frac{b}{x_1}\right) .$$

De là l'on tire

$$-\frac{dV}{dx} = \frac{4\pi}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{4\pi}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) ,$$

en regardant $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ comme le coefficient différentiel de la fonction

$f\left(\frac{1}{x}\right)$, pris par rapport à $\frac{1}{x}$. Donc, en remplaçant x par $\frac{1}{x}$, et se

rappelant que $a = \frac{b}{1+b}$, les formules (39) et (40) donneront immédiatement ;

$$-\frac{dV}{dx} = \frac{4\pi h \cdot a}{(x-1)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot (t^{a-1} - 1) t^{\frac{a}{x-1}}}{1-t}$$

$$- \frac{4\pi h \cdot a^2}{(x-1)^3} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot (t^{a-1} - 1) t^{\frac{a}{x-1}} \text{Log.}\left(\frac{1}{t}\right)}{1-t}.$$

Cela posé, si l'on remarque que, en écrivant, pour un moment, $f(x, b)$ au lieu de $f(x)$, l'on a l'équation

$$b F(x) = f\left(x, \frac{1}{b}\right),$$

l'on verra aussitôt, que $V_1 = \frac{4\pi b}{x_1} f\left(\frac{b}{x_1}, \frac{1}{b}\right)$. Donc en remplaçant x par $\frac{x_1}{b}$, et b par $\frac{1}{b}$ dans cette expression de $-\frac{dV}{dx}$ l'on aura celle de $-b \frac{dV_1}{dx_1}$: c'est-à-dire que l'on a ;

$$-\frac{dV_1}{dx_1} = \frac{4\pi h \cdot a}{(x_1 - b)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt (t^{-a} - 1) t^{\frac{a}{x_1 - b}}}{1-t}$$

$$- \frac{4\pi h \cdot a^2}{(x_1 - b)^3} \cdot \int_0^1 \frac{dt (t^{-a} - 1) t^{\frac{a}{x_1 - b}} \text{Log.}\left(\frac{1}{t}\right)}{1-t}.$$

Actuellement, si l'on fait ;

$$a'' = \frac{a \cdot x}{x-1} ; \quad a''' = 1 + \frac{a}{x-1} ; \quad a^{iv} = \frac{(1-a)x_1}{x_1 - b} ; \quad a^v = 1 + \frac{a}{x_1 - b},$$

l'on pourra écrire

$$(106) \dots -\frac{dV}{dx} = \frac{4\pi h \cdot a}{(x-1)^3} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{dt(t^{3''-1}-1)}{1-t} - \int_0^1 \frac{dt(t^{3'''-1}-1)}{1-t} \right\} \\ - \frac{4\pi h \cdot a^2}{(x-1)^3} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{3''-1} \text{Log.}\left(\frac{1}{t}\right)}{1-t} - \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{3'''-1} \text{Log.}\left(\frac{1}{t}\right)}{1-t} \right\};$$

$$(107) \dots -\frac{dV_1}{dx_1} = \frac{4\pi h \cdot a}{(x_1-b)^3} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{dt(t^{3^{iv}-1}-1)}{1-t} - \int_0^1 \frac{dt(t^{3^v-1}-1)}{1-t} \right\} \\ - \frac{4\pi h \cdot a^2}{(x_1-b)^3} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{3^{iv}-1} \text{Log.}\left(\frac{1}{t}\right)}{1-t} - \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{3^v-1} \text{Log.}\left(\frac{1}{t}\right)}{1-t} \right\}.$$

En écrivant ces intégrales, conformément à la notation de LEGENDRE, définie dans le § IX, l'on aura cette expression de la force R ; savoir

$$(108) \dots R = \frac{4\pi h \cdot a}{(x-1)^3} \left\{ Z'(a''') - Z'(a'') \right\} + \frac{4\pi h \cdot a^2}{(x-1)^3} \left\{ Z''(a''') - Z''(a'') \right\} \\ + \frac{4\pi h \cdot a}{(x_1-b)^3} \left\{ Z'(a^v) - Z'(a^{iv}) \right\} + \frac{4\pi h \cdot a^2}{(x_1-b)^3} \left\{ Z''(a^v) - Z''(a^{iv}) \right\}.$$

Pour calculer les quantités $Z'(p)$ et $Z''(p)$ l'on pourra employer la Table de LEGENDRE, ou bien faire usage des séries;

$$(109) \dots \begin{cases} Z'(p) = (1-C) - \frac{1}{p} - \frac{1}{1+p} + pk_2 - p^2k_3 + p^3k_4 - p^4k_5 + \text{etc.} , \\ Z'(p) = (1-C) - \frac{1}{2p} - \frac{1}{1-p^2} - \frac{\pi}{2} \cot \pi p - p^2k_3 - p^4k_5 - p^6k_7 - \text{etc.} \end{cases}$$

$$(110) \dots \begin{cases} Z''(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} + k_2 - 2pk_3 + 3p^2k_4 - 4p^3k_5 + \text{etc.} , \\ Z''(p) = \frac{1}{2p^2} - \frac{2p}{(1-p^2)^2} + \frac{\pi^2}{2 \sin^2 \pi p} - 2pk_3 - 4p^3k_5 - 6p^5k_7 - \text{etc.} \end{cases}$$

Et si l'on veut déduire les valeurs de $Z'(p)$ de celles de A' , il faudra se rappeler que d'après les équations (45) et (51), nous avons

$$Z'(p) = -C - \frac{A'}{p} ; \quad Z'(1+p) = \frac{1}{p} - C - \frac{A'}{-p} .$$

Cherchons maintenant ce que devient la force répulsive R , relativement à deux sphères de même rayon, sur un point éloigné de leur surface d'une quantité donnée x' . Ici, nous avons

$$a=b=1 ; \quad a=\frac{1}{2} ; \quad x=3+x' ; \quad x_1=-1-x' ;$$

et par conséquent ;

$$a'' = \frac{3+x'}{4+2x'} ; \quad a''' = 1 + \frac{1}{4+2x'} ;$$

$$a^{iv} = \frac{1+x'}{4+2x'} ; \quad a^v = 1 - \frac{1}{4+2x'} ;$$

$$R = \frac{2\pi h}{(2+x')^3} \left\{ Z'(a''') - Z'(a'') + Z'(a^v) - Z'(a^{iv}) \right\} \\ + \frac{\pi h}{(2+x')^3} \left\{ Z''(a''') - Z''(a'') - Z''(a^v) + Z''(a^{iv}) \right\} .$$

Mais l'équation (47) donne

$$Z'(a'') = Z'(a^{iv}) - \pi \cot. \pi a'' = -\frac{1}{a^{iv}} - \pi \cot. \pi a'' + Z'(1+a^{iv}) ;$$

$$Z'(a^v) = Z'(a'''-1) + \pi \cot. \pi (a'''-1) = -\frac{1}{a'''-1} + \pi \cot. \pi (a'''-1) + Z'(a''') ;$$

et l'équation (55) donne

$$Z''(a'') = \frac{\pi^2}{\sin^2. \pi a''} - Z''(a^{iv}) = \frac{\pi^2}{\sin^2. \pi a''} - \frac{1}{a^{iv^2}} - Z''(1+a^{iv}) ;$$

$$Z''(a^v) = \frac{\pi^2}{\sin^2. \pi (a'''-1)} - Z''(a'''-1) = \frac{\pi^2}{\sin^2. \pi (a'''-1)} - \frac{1}{(a'''-1)^2} - Z''(a''') .$$

Donc, en substituant ces valeurs, il viendra

$$\begin{aligned}
 (111) \dots R = & \frac{4\pi h}{(2+x')^3} \left\{ Z'(a''') - Z'(1+a'') \right\} + \frac{2\pi h}{(2+x')^3} \left\{ Z''(a''') + Z''(1+a'') \right\} \\
 & + \frac{4\pi h}{(2+x')^3} \left\{ \frac{1}{a'''} - \frac{1}{2a'''-2} + \frac{\pi}{2} \cot. \pi a'' + \frac{\pi}{2} \cot. \pi (a'''-1) \right\} \\
 & + \frac{\pi h}{(2+x')^3} \left\{ \frac{2}{a''^3} + \frac{1}{(a'''-1)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2. \pi a''} - \frac{\pi^2}{\sin^2. \pi (a'''-1)} \right\} .
 \end{aligned}$$

Actuellement, si l'on fait

$$b''' = \frac{a''' - 1}{2 - a'''} ; \quad b'' = \frac{a''}{1 - a''} ,$$

et si l'on nomme A''' , A'' les valeurs correspondantes de la quantité A' définie plus haut, l'on aura, d'après l'équation (50) ;

$$A''' = 1 - C(a''' - 1) - (a''' - 1) Z'(a''') ;$$

$$A'' = 1 - C a'' - a'' Z'(1 + a'') ;$$

et par conséquent

$$Z'(a''') - Z'(1 + a'') = \frac{A''}{a''} - \frac{A'''}{a''' - 1} + \frac{1}{a''' - 1} - \frac{1}{a''} .$$

En substituant cette valeur, et observant que $\cot. \pi a'' = -\cot. \pi a'''$ et $\frac{\pi}{2} = \pi a'' + \pi (a''' - 1)$, l'on verra, que la valeur précédente de R peut être écrite ainsi; savoir

$$\begin{aligned}
 (112) \dots R = & \frac{8\pi h}{2+x'} \left\{ \frac{A''}{1+x'} - A''' \right\} + \frac{2\pi h}{(2+x')^3} \left\{ Z''(a''') + Z''(1+a'') \right\} \\
 & + \frac{8\pi h}{2+x'} \left\{ 1 + \frac{1}{(1+x')^2} \right\} + \frac{4\pi^3 h}{(2+x')^3} \cot. 2\pi (a''' - 1) \\
 & - \frac{4\pi^3 h}{(2+x')^3} \cdot \frac{1}{\sin^2. 2\pi (a''' - 1)} .
 \end{aligned}$$

Dans le cas fort simple de $x' = 1$ l'on a ;

$$a'' = \frac{2}{3} ; \quad a''' = 1 + \frac{1}{6} ; \quad a'''' = \frac{1}{3} ; \quad b''' = \frac{1}{5} ; \quad b'''' = \frac{1}{2} .$$

Mais la formule (94) donne

$$A''' = \frac{1}{6} \text{Log. } 12 + \frac{\pi}{12} \cot. \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos. \frac{\pi}{3} \text{Log.} \left(\sin. \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{3} \cos. \frac{2\pi}{3} \text{Log.} \left(\sin. \frac{\pi}{3} \right) ;$$

$$A'''' = \frac{1}{3} \text{Log. } 6 + \frac{\pi}{6} \cot. \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \cos. \frac{2\pi}{3} \text{Log.} \left(\sin. \frac{\pi}{3} \right) ;$$

donc en réduisant, l'on a

$$R = \frac{4\pi h}{18} \left\{ 15 - 4 \text{Log. } 2 - \frac{8}{9} \pi^2 + \frac{1}{3} Z'' \left(1 + \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{3} Z'' \left(1 + \frac{1}{3} \right) \right\} .$$

Cela posé, si l'on remarque que les équations (55) et (58) donnent

$$Z'' \left(\frac{2}{3} \right) + Z'' \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi^2 ; \quad Z'' \left(\frac{1}{6} \right) + Z'' \left(\frac{2}{3} \right) - 4 Z'' \left(\frac{1}{3} \right) = 0 ,$$

l'on tirera de là ;

$$Z'' \left(\frac{1}{6} \right) = 5 Z'' \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3} \pi^2 ,$$

ou bien

$$36 + Z'' \left(1 + \frac{1}{6} \right) = -\frac{4}{3} \pi^2 + 45 + 5 Z'' \left(1 + \frac{1}{3} \right) ;$$

ce qui donne

$$Z'' \left(1 + \frac{1}{6} \right) = 9 - \frac{4}{3} \pi^2 + 5 Z'' \left(1 + \frac{1}{3} \right) .$$

Donc, en substituant cette valeur, il viendra

$$(113) \dots R = \frac{4\pi h}{18} \left\{ 18 - 4 \text{Log. } 2 - \frac{4}{3} \pi^2 + 2 Z'' \left(1 + \frac{1}{3} \right) \right\} .$$

En nommant R' la force répulsive qui a lieu sur la surface d'une des deux sphères au point opposé au point de contact, l'on a, d'après la formule (60) ,

$$(114) \dots R' = 4\pi h Y = 4\pi h \cdot \left\{ 2 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{8} Z'' \left(1 + \frac{1}{4} \right) \right\},$$

ou bien

$$R' = \frac{4\pi h}{18} \left\{ 36 - \frac{9}{4} \pi^2 + \frac{9}{4} Z'' \left(1 + \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

Or nous avons ;

$$4. \text{ Log. } 2 = 3,772589 ; \quad \frac{4\pi^2}{3} = 13,159275 ; \quad \frac{9\pi^2}{4} = 22,20660 ;$$

$$Z'' \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{0,475805}{m} ; \quad Z'' \left(1 + \frac{1}{4} \right) = \frac{0,519992}{m} ;$$

partant

$$R = \frac{4\pi h}{18} \left\{ 18 - 3,772589 - 13,159275 + 2,19116 \right\} = 4\pi h (0,23663).$$

$$R' = \frac{4\pi h}{18} \left\{ 36 - 22,20660 + 2,69385 \right\} = 4\pi h (0,915958).$$

Il est remarquable que la valeur de R soit à-peu-près égale au quart de R' , comme si toute la masse de la couche électrique était concentrée dans le centre de la sphère qui est le plus rapproché du point repoussé.

Soit, $x' = \frac{1}{2}$; l'on aura ,

$$a''' = 1 + \frac{1}{5} ; \quad a^{iv} = \frac{3}{10} ; \quad b''' = \frac{1}{4} ; \quad b^{iv} = \frac{3}{7} ;$$

$$R = \frac{16\pi h}{5} \cdot \left\{ \frac{2}{3} A''' - A''' \right\} + \frac{16\pi h}{125} \left\{ Z'' \left(1 + \frac{1}{5} \right) + Z'' \left(1 + \frac{3}{10} \right) \right\} \\ + \frac{208}{45} \pi h + \frac{16\pi^2 h}{25} \cot. 72^\circ - \frac{32\pi^3 h}{125 \sin^2 72^\circ}.$$

Mais nous avons

$$A''' = 0,942365 ; \quad A^{iv} = 0,877593 ;$$

$$Z'' \left(1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{0,550417}{m} = 1,26738 ;$$

$$Z'' \left(1 + \frac{3}{10} \right) = \frac{0,492600}{m} = 1,13428 ;$$

partant

$$R = -\frac{16 \cdot \pi h}{5}(0,357303) + \frac{16 \cdot \pi h}{125}(2,40166) + \frac{208}{45} \cdot \pi h \\ + \frac{16 \cdot \pi h}{25}(1,02077) - \frac{32 \cdot \pi h}{125}(10,91155) ;$$

$$R = \frac{4 \cdot \pi h}{45}(39,13709) - \frac{16 \cdot \pi h}{125}(14,31759) ;$$

$$R = 4 \cdot \pi h(0,869713 - 0,458163) = 4 \cdot \pi h(0,411550) .$$

Ce résultat diffère fort peu de celui de $\frac{4}{9} R' = 4 \cdot \pi h(0,407092)$, que l'on aurait immédiatement par le rapport inverse du carré de la distance.

Soit $x' = \frac{1}{3}$; l'on aura

$$a''' = 1 + \frac{3}{14} ; \quad a'' = \frac{2}{7} ; \quad b''' = \frac{3}{11} ; \quad b'' = \frac{2}{5} ;$$

$$R = 4 \cdot \pi h \left\{ \frac{6}{7} \left(\frac{3}{4} A'' - A''' \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{7} \right)^3 \left[Z'' \left(1 + \frac{3}{14} \right) + Z'' \left(1 + \frac{2}{7} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{75}{56} + \left(\frac{3}{7} \right)^2 \pi \cdot \cot. (77^\circ . 8' . 34'') - \left(\frac{3}{7} \right)^3 \cdot \left(\frac{\pi}{\sin^2 . 77^\circ . 8' . 34''} \right)^2 \right\} ;$$

$$A''' = 0,93441 ; \quad A'' = 0,88809 ;$$

$$Z'' \left(1 + \frac{3}{14} \right) = \frac{0,541392}{m} ; \quad Z'' \left(1 + \frac{2}{7} \right) = \frac{0,456298}{m} ;$$

$$R = 4 \cdot \pi h \{ -0,23001 + 0,090417 + 1,339285 + 0,131701 - 0,817381 \} ;$$

$$R = 4 \cdot \pi h(0,514012) .$$

Ce résultat diffère fort peu de $\frac{9}{16} \cdot R' = 4 \cdot \pi h(0,515181)$.

Soit $x' = 2$, l'on aura

$$a''' = 1 + \frac{1}{8} ; \quad a'' = \frac{3}{8} ; \quad b''' = \frac{1}{7} ; \quad b'' = \frac{3}{5} ;$$

$$R = 4\pi h \left\{ \frac{1}{6} A'' - \frac{1}{2} A''' + \frac{5}{9} + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{128} \left[Z'' \left(1 + \frac{1}{8} \right) + Z'' \left(1 + \frac{3}{8} \right) \right] \right\};$$

$$A''' = 0,97641; \quad A'' = 0,81629;$$

$$Z'' \left(1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{0,602818}{m}; \quad Z'' \left(1 + \frac{3}{8} \right) = \frac{0,456298}{m};$$

$$R = 4\pi h \{ -0,352157 + 0,555555 - 0,112075 + 0,019053 \};$$

$$R = 4\pi h (0,110377).$$

Ce résultat diffère fort peu de $\frac{1}{9} R' = 4\pi h (0,101773)$.

Voici maintenant quelques exemples de ces calculs relatifs à deux sphères dont le rayon est différent.

Soit $b = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{3}{2}$; $x_1 = 3$, l'on aura

$$a = \frac{1}{3}; \quad a'' = \frac{1}{5}; \quad a''' = 1 - \frac{2}{15}; \quad a'' = \frac{4}{5}; \quad a' = 1 + \frac{2}{15}.$$

D'après cela la formule (108) donne

$$R = \frac{4\pi h \cdot 4}{3 \cdot 25} \left\{ Z' \left(1 - \frac{2}{15} \right) - Z' \left(\frac{1}{5} \right) \right\} - \frac{4\pi h \cdot 8}{9 \cdot 125} \left\{ Z'' \left(1 - \frac{2}{15} \right) - Z'' \left(\frac{1}{5} \right) \right\} \\ + \frac{4\pi h \cdot 4}{3 \cdot 25} \left\{ Z' \left(1 + \frac{2}{15} \right) - Z' \left(\frac{4}{5} \right) \right\} + \frac{4\pi h \cdot 8}{9 \cdot 125} \left\{ Z'' \left(1 + \frac{2}{15} \right) - Z'' \left(\frac{4}{5} \right) \right\};$$

et comme l'on a par les formules (47) et (55);

$$Z' \left(1 - \frac{2}{15} \right) = Z' \left(\frac{2}{15} \right) + \pi \cot. \frac{2\pi}{15}; \quad Z' \left(\frac{4}{5} \right) = Z' \left(\frac{1}{5} \right) + \pi \cot. \frac{\pi}{5};$$

$$Z'' \left(1 - \frac{2}{15} \right) = \frac{\pi^2}{\sin^2. \frac{2\pi}{15}} - Z'' \left(\frac{2}{15} \right); \quad Z'' \left(\frac{4}{5} \right) = \frac{\pi^2}{\sin^2. \frac{\pi}{5}} - Z'' \left(\frac{1}{5} \right);$$

il viendra

$$R = \frac{4\pi h.4}{3.25} \left\{ Z' \left(1 + \frac{2}{15} \right) + Z' \left(\frac{2}{15} \right) - 2 Z' \left(\frac{1}{5} \right) + \pi \cot. 24^\circ - \pi \cot. 36^\circ \right\} \\ + \frac{4\pi h.8}{9.125} \left\{ Z'' \left(1 + \frac{2}{15} \right) + Z'' \left(\frac{2}{15} \right) + 2 Z'' \left(\frac{1}{5} \right) - \frac{\pi^2}{\sin^2. 24^\circ} - \frac{\pi^2}{\sin^2. 36^\circ} \right\} ,$$

ou bien ,

$$R = \frac{4\pi h.4}{3.25} \left\{ 2 Z' \left(1 + \frac{2}{15} \right) - 2 Z' \left(1 + \frac{1}{5} \right) + \frac{5}{2} + \pi \cot. 24^\circ - \pi \cot. 36^\circ \right\} \\ + \frac{4\pi h.8}{9.125} \left\{ 2 Z'' \left(1 + \frac{2}{15} \right) + 2 Z'' \left(1 + \frac{1}{5} \right) + \frac{425}{4} - \frac{\pi^2}{\sin^2. 24^\circ} - \frac{\pi^2}{\sin^2. 36^\circ} \right\} .$$

Mais nous avons

$$Z' \left(1 + \frac{1}{5} \right) = 5 - C - 5 A' \left(\frac{1}{4} \right) ; \quad Z' \left(1 + \frac{2}{15} \right) = \frac{15}{2} - C - \frac{15}{2} A' \left(\frac{2}{13} \right) ;$$

partant ,

$$R = \frac{4\pi h.4}{3.25} \left\{ 10. A' \left(\frac{1}{4} \right) - 15. A' \left(\frac{2}{13} \right) + \frac{15}{2} + \pi \cot. 24^\circ - \pi \cot. 36^\circ \right\} \\ + \frac{4\pi h.8}{9.125} \left\{ 2 Z'' \left(1 + \frac{2}{15} \right) + 2 Z'' \left(1 + \frac{1}{5} \right) + \frac{425}{4} - \frac{\pi^2}{\sin^2. 24^\circ} - \frac{\pi^2}{\sin^2. 36^\circ} \right\} .$$

En prenant dans la Table posée à la fin du Mémoire les valeurs numériques;

$$A' \left(\frac{1}{4} \right) = 0,94236 ; \quad A' \left(\frac{2}{13} \right) = 0,973406 ;$$

$$Z'' \left(1 + \frac{2}{15} \right) = \frac{0,596671}{m} ; \quad Z'' \left(1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{0,550417}{m} ,$$

On trouvera

$$R = \frac{4\pi h.4}{3.25} (5,03838) + \frac{4\pi h.8}{9.125} (23,30714) = 4\pi h (0,434454) .$$

A la surface de la sphère où $x = -1$, l'on a

$$R' = 4\pi h. Y' = 4\pi h. (0,97662) .$$

Ainsi il est clair que l'on a à fort peu-près $R = \frac{4}{9}. R'$.

Soit $b = \frac{1}{2}$; $x = -2$; $x_1 = \frac{7}{2}$; l'on aura

$$a = \frac{1}{3}; \quad a'' = \frac{2}{9}; \quad a''' = 1 - \frac{1}{9}; \quad a^{iv} = \frac{7}{9}; \quad a^v = 1 + \frac{1}{9}.$$

D'après cela la formule (108) donne

$$R = \frac{4\pi \cdot h}{3^3} \left\{ Z' \left(1 - \frac{1}{9} \right) + Z' \left(1 + \frac{1}{9} \right) - Z' \left(\frac{2}{9} \right) - Z' \left(\frac{7}{9} \right) \right\} \\ - \frac{4\pi \cdot h}{3^5} \left\{ Z'' \left(1 - \frac{1}{9} \right) - Z'' \left(1 + \frac{1}{9} \right) - Z'' \left(\frac{2}{9} \right) + Z'' \left(\frac{7}{9} \right) \right\};$$

et comme l'on a par les formules (47) et (55);

$$Z' \left(1 - \frac{1}{9} \right) - Z' \left(\frac{7}{9} \right) = Z' \left(\frac{1}{9} \right) - Z' \left(\frac{2}{9} \right) + \pi \cot. \frac{\pi}{9} - \pi \cot. \frac{2\pi}{9};$$

$$Z'' \left(1 - \frac{1}{9} \right) + Z'' \left(\frac{7}{9} \right) = -Z'' \left(\frac{1}{9} \right) - Z'' \left(\frac{2}{9} \right) + \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi}{9}} + \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{9}};$$

il viendra

$$R = \frac{4\pi \cdot h}{3^3} \left\{ Z' \left(1 + \frac{1}{9} \right) + Z' \left(\frac{1}{9} \right) - 2 Z' \left(\frac{2}{9} \right) + \pi \cot. \frac{\pi}{9} - \pi \cot. \frac{2\pi}{9} \right\} \\ + \frac{4\pi \cdot h}{3^5} \left\{ Z'' \left(1 + \frac{1}{9} \right) + Z'' \left(\frac{1}{9} \right) + 2 Z'' \left(\frac{2}{9} \right) - \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi}{9}} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{9}} \right\};$$

ou bien,

$$R = \frac{4\pi \cdot h}{3^3} \left\{ 2 Z' \left(1 + \frac{1}{9} \right) - 2 Z' \left(1 + \frac{2}{9} \right) + \pi \cot. \frac{\pi}{9} - \pi \cot. \frac{2\pi}{9} \right\} \\ + \frac{4\pi \cdot h}{3^5} \left\{ 2 Z'' \left(1 + \frac{1}{9} \right) + 2 Z'' \left(1 + \frac{2}{9} \right) + \frac{243}{2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi}{9}} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi}{9}} \right\}.$$

Mais nous avons

SERIE II. TOM. VII.

v

$$Z'\left(1+\frac{1}{9}\right)=9-C-\frac{1}{9}A'\left(\frac{1}{8}\right); \quad Z'\left(1+\frac{2}{9}\right)=\frac{9}{2}-C-\frac{9}{2}A'\left(\frac{2}{7}\right);$$

partant,

$$R=\frac{4\pi.h}{3^3}\left\{9.A'\left(\frac{2}{7}\right)-18.A'\left(\frac{1}{8}\right)+9+\pi\cot.20^\circ-\pi\cot.40^\circ\right\} \\ +\frac{4\pi.h}{3^5}\left\{2Z''\left(1+\frac{1}{9}\right)+2Z''\left(1+\frac{2}{9}\right)+\frac{243}{2}-\frac{\pi^2}{\sin^2.20^\circ}-\frac{\pi^2}{\sin^2.40^\circ}\right\}.$$

En prenant dans la Table posée à la fin du Mémoire ces valeurs numériques;

$$A'\left(\frac{2}{7}\right)=0,92978; \quad A'\left(\frac{1}{8}\right)=0,98111;$$

$$Z''\left(1+\frac{1}{9}\right)=\frac{0,613609}{m}; \quad Z''\left(1+\frac{2}{9}\right)=\frac{0,53649}{m},$$

l'on trouvera

$$R=\frac{4\pi.h}{3^3}(4,59548)+\frac{4\pi.h}{3^5}(18,5375)=4\pi.h(0,246488);$$

c'est-à-dire $R=\frac{1}{4}.R'$ à-peu-près.

Soit $b=\frac{1}{2}$; $x=\frac{5}{2}$; $x_1=-1$; l'on aura

$$a=\frac{1}{3}; \quad a''=\frac{5}{9}; \quad a'''=1+\frac{2}{9}; \quad a^v=\frac{4}{9}; \quad a^v=1-\frac{2}{9}.$$

La formule (108) donne

$$R=\frac{4\pi.h.4}{3^3}\left\{Z'\left(1+\frac{2}{9}\right)+Z'\left(1-\frac{2}{9}\right)-Z'\left(\frac{4}{9}\right)-Z'\left(\frac{5}{9}\right)\right\} \\ +\frac{4\pi.h.8}{3^5}\left\{Z''\left(1+\frac{2}{9}\right)-Z''\left(1-\frac{2}{9}\right)+Z''\left(\frac{4}{9}\right)-Z''\left(\frac{5}{9}\right)\right\}.$$

De là l'on tire aisément;

$$R = \frac{4\pi h \cdot 4}{3^3} \left\{ 2Z' \left(1 + \frac{2}{9} \right) - 2Z' \left(1 + \frac{4}{9} \right) + \pi \cot. \frac{2\pi}{9} - \pi \cot. \frac{4\pi}{9} \right\} \\ + \frac{4\pi h \cdot 8}{3^5} \left\{ 2Z'' \left(1 + \frac{2}{9} \right) + 2Z'' \left(1 + \frac{4}{9} \right) + \frac{243}{8} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{9}} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{4\pi}{9}} \right\};$$

ou bien

$$R = \frac{4\pi h \cdot 4}{3^3} \left\{ \frac{9}{2} \cdot A' \left(\frac{4}{5} \right) - 9A' \left(\frac{2}{7} \right) + \frac{9}{2} + \pi \cot. 40^\circ - \pi \cot. 80^\circ \right\} \\ + \frac{4\pi h \cdot 8}{3^5} \left\{ 2Z'' \left(1 + \frac{2}{9} \right) + 2Z'' \left(1 + \frac{4}{9} \right) + \frac{243}{8} - \frac{\pi^2}{\sin^2 40^\circ} - \frac{\pi^2}{\sin^2 80^\circ} \right\}.$$

En prenant

$$A' \left(\frac{4}{5} \right) = 0,75116; \quad Z'' \left(1 + \frac{4}{9} \right) = \frac{0,426963}{m};$$

l'on trouvera

$$R = \frac{4\pi h \cdot 4}{3^3} (2,70225) + \frac{4\pi h \cdot 8}{3^5} (7,73459) = 4\pi h \cdot (0,65497).$$

Cette force répulsive surpasse celle que nous avons trouvée précédemment, $4\pi h(0,434456)$, pour un point également éloigné de la plus grande sphère, comme on aurait pu le prévoir par d'autres considérations.

A la surface de la sphère du rayon $\frac{1}{2}$, où $x_1 = -\frac{1}{2}$, l'on a

$$R'' = 4\pi h Z' = 4\pi h(1,56260).$$

Ainsi, dans ce cas, le rapport $\frac{R}{R''}$ s'éloigne considérablement de $\frac{1}{4}$.

C'est de quoi l'on peut avoir facilement une autre preuve par le calcul de l'exemple suivant.

Soit $b = \frac{1}{2}$; $x = 3$; $x_1 = -\frac{3}{2}$; l'on aura

$$a = \frac{1}{3}; \quad a'' = \frac{1}{2}; \quad a''' = 1 + \frac{1}{6}; \quad a^{iv} = \frac{1}{2}; \quad a^v = 1 - \frac{1}{6}.$$

La formule (108) donne

$$R = \frac{4\pi \cdot h}{3 \cdot 4} \left\{ Z' \left(1 + \frac{1}{6} \right) + Z' \left(1 - \frac{1}{6} \right) - 2 Z' \left(\frac{1}{2} \right) \right\} \\ + \frac{4\pi \cdot h}{9 \cdot 8} \left\{ Z'' \left(1 + \frac{1}{6} \right) - Z'' \left(1 - \frac{1}{6} \right) \right\} .$$

Et comme la formule (104) donne $Z' \left(\frac{1}{2} \right) = -C - 2 \cdot \text{Log. } 2$; et que d'après les équations (47) et (55) l'on a

$$Z' \left(1 - \frac{1}{6} \right) = Z' \left(\frac{1}{6} \right) + \pi \cot. \frac{\pi}{6} = Z' \left(1 + \frac{1}{6} \right) - 6 + \pi \cot. \frac{\pi}{6} ,$$

$$Z'' \left(1 - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} - Z'' \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} - 36 - Z'' \left(1 + \frac{1}{6} \right) ,$$

il viendra

$$R = \frac{4\pi \cdot h}{6} \left\{ Z' \left(1 + \frac{1}{6} \right) + C + 2 \text{Log. } 2 - 3 + \frac{\pi \sqrt{3}}{2} \right\} \\ + \frac{4\pi \cdot h}{36} \left\{ Z'' \left(1 + \frac{1}{6} \right) + 18 - 2\pi^2 \right\} .$$

Mais nous avons

$$Z' \left(1 + \frac{1}{6} \right) + C = 6 - 6 A' \left(\frac{1}{5} \right) ;$$

partant

$$R = 4\pi \cdot h \left\{ 1 + \frac{1}{3} \text{Log. } 2 + \frac{\pi \sqrt{3}}{12} - \frac{\pi^2}{18} - A' \left(\frac{1}{5} \right) + \frac{1}{36} \cdot Z'' \left(1 + \frac{1}{6} \right) \right\} .$$

Si l'on observe maintenant, que la formule (94) donne

$$A' \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{3} \text{Log. } 2 + \frac{1}{4} \text{Log. } 3 + \frac{\pi \sqrt{3}}{12} ,$$

l'on en conclura que

$$R = 4\pi \cdot h \left\{ 1 - \frac{1}{4} \text{Log. } 3 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{1}{36} Z'' \left(1 + \frac{1}{6} \right) \right\} .$$

En prenant

$$Z'' \left(1 + \frac{1}{6} \right) = \frac{0,572621}{m} ,$$

cette formule donnera

$$R = 4\pi \cdot h (0,213661) .$$

De là nous concluons, que l'ensemble de ces résultats numériques n'entraîne pas à la conséquence, que les forces répulsives, calculées par la formule (108), puissent être, en général, considérées comme exactement décroissantes en raison inverse du carré de la distance au centre de la sphère qui est le plus rapproché du point repoussé. Car, même dans le cas particulier des deux sphères d'égal rayon, il suffit de faire $x'=5$ dans la formule (112) pour se persuader, que le résultat, $R=4.\pi h(0,007811)$, diffère sensiblement de $\frac{R'}{36}=4.\pi h(0,025443)$; c'est-à-dire de celui fourni par la raison inverse du carré de la distance. J'ai voulu ajouter cette remarque afin d'écarter les illusions et empêcher d'ériger en principe ce qui, dans le fond, n'était qu'une pure approximation dans quelques cas particuliers, née d'une compensation singulière entre les parties positives et négatives qui concourent à la formation du résultat définitif.

§ XIV.

Parmi les différentes expressions de $f(x)$, sous forme finie, celle donnée par la formule (39) paraît la plus facilement développable suivant les puissances entières et positives de x . En désignant par $G_{(m)}.x^m$ un terme quelconque de ce développement, il faudrait, conformément à la règle générale démontrée dans le § V, remplacer ce terme par $G_{(m)}.P_m.x^m$ pour avoir le terme correspondant dans le développement de la fonction $\varphi(\mu, x)$. Nous allons démontrer, que, dans un tel développement, les coefficients $G_{(1)}, G_{(2)}, G_{(3)}$, etc. seront exprimés par des suites infinies, lesquelles sont susceptibles d'être sommées algébriquement. Mais, pour cela, la formule (39) doit être développée d'une manière spéciale, avant d'appliquer à chaque terme la règle du § V. Par la forme de la série ainsi obtenue l'on jugera sous quelles conditions elle peut être convergente. Cela posé, j'observe d'abord que la formule (39), en y appliquant la notation de LEGENDRE, revient à dire que

$$(115) \dots f(x) = \frac{h.a}{1-x} \left\{ Z' \left(1-a + \frac{a}{1-x} \right) - Z' \left(\frac{a}{1-x} \right) \right\}.$$

Donc en développant ces deux fonctions par la première des deux séries (109) l'on aura

$$\begin{aligned}
 f(x) = h \left\{ 1 - \frac{a}{1 - (1-a)x} + \frac{a}{1+a-x} - \frac{a}{2 - (2-a)x} \right\} \\
 + \frac{h \cdot a k_2}{1-x} \left\{ \left(1-a + \frac{a}{1-x} \right) - \frac{a}{1-x} \right\} - \frac{h \cdot a k_3}{1-x} \left\{ \left(1-a + \frac{a}{1-x} \right)^2 - \frac{a^2}{(1-x)^2} \right\} \\
 + \frac{h \cdot a k_4}{1-x} \left\{ \left(1-a + \frac{a}{1-x} \right)^3 - \frac{a^3}{(1-x)^3} \right\} - \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on développe ces binômes l'on trouvera aisément qu'en faisant

$$(116) \dots \Pi(1-a) = k_2(1-a) - k_3(1-a)^2 + k_4(1-a)^3 - k_5(1-a)^4 + \text{etc.};$$

$$\begin{aligned}
 A_{(0)} &= \Pi(1-a); & A_{(1)} &= \frac{d \cdot \Pi(1-a)}{d(1-a)} - k_2; \\
 A_{(2)} &= \frac{d^2 \cdot \Pi(1-a)}{[d(1-a)]^2} + 2k_3; & A_{(3)} &= \frac{d^3 \cdot \Pi(1-a)}{[d(1-a)]^3} - 2 \cdot 3 \cdot k_4; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$A_{(i)} = \frac{d^i \cdot \Pi(1-a)}{[d(1-a)]^i} + (-1)^i \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \dots i) k_{i+1},$$

l'on a,

$$\begin{aligned}
 (117) \dots f(x) = h \left\{ 1 - \frac{a}{1 - (1-a)x} + \frac{a}{1+a-x} - \frac{a}{2 - (2-a)x} \right\} \\
 + h \left\{ \frac{a A_{(0)}}{1-x} + \frac{a^2 A_{(1)}}{(1-x)^2} + \frac{a^3 A_{(2)}}{(1-x)^3} + \frac{a^4 A_{(3)}}{(1-x)^4} + \text{etc.} \right\}.
 \end{aligned}$$

Une fraction quelconque de la forme $\frac{1}{p-qx}$ étant développée suivant les puissances entières et positives de x donne, en multipliant chacun de ses termes par 1, P_1 , P_2 , P_3 etc., respectivement, la série

$$\frac{1}{p} \left\{ 1 + \frac{q}{p} P_1 x + \frac{q^2}{p^2} P_2 x^2 + \dots + \frac{q^m}{p^m} P_m x^m + \text{etc.} \right\},$$

laquelle naît, comme l'on sait, du développement de la fonction

$$P = (p^2 - 2pq\mu \cdot x + q^2 x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi cette transformation est immédiatement applicable aux cinq premiers termes de $f(x)$, lorsque l'on veut former la fonction désignée par $\varphi(\mu, x)$. De sorte que, il faudra remplacer $\frac{1}{1-x}$ par

$$X = 1 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \text{etc.} = (1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

tandis qu'il faudra remplacer $\frac{1}{(1-x)^2}$, $\frac{1}{(1-x)^3}$, etc. par

$$X^{(2)} = 1 + 2P_1 x + 3P_2 x^2 + 4P_3 x^3 + \text{etc.};$$

$$X^{(3)} = 1 + 3P_1 x + 6P_2 x^2 + 10P_3 x^3 + \text{etc.};$$

.....

$$X^{(n)} = 1 + nP_1 x + \frac{n(n+1)}{2} P_2 x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} P_3 x^3 + \text{etc.}$$

Il suit de là qu'en posant, pour plus de simplicité;

$$Q = \{1 - 2(1-a)\mu \cdot x + (1-a)^2 x^2\}^{-\frac{1}{2}};$$

$$Q' = \{(1+a)^2 - 2(1+a)\mu \cdot x + x^2\}^{-\frac{1}{2}};$$

$$Q'' = \{4 - 4(2-a)\mu \cdot x + (2-a)^2 x^2\}^{-\frac{1}{2}};$$

nous avons

$$(118) \dots \varphi(\mu, x) = h \cdot \{1 - Qa + Q'a - Q''a\}$$

$$+ h \cdot \{A_{(0)} a \cdot X + A_{(1)} a^2 X^{(2)} + A_{(2)} a^3 X^{(3)} + \text{etc.}\}.$$

Les séries $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, $X^{(4)}$ etc. sont facilement sommables par les coefficients différentiels de X pris par rapport à x : car, avec une légère attention, l'on reconnaît, que

$$X^{(2)} = X + x \frac{dX}{dx} ;$$

$$X^{(3)} = X + 2 \cdot x \frac{dX}{dx} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} ;$$

$$X^{(4)} = X + 3 \cdot x \frac{dX}{dx} + 3 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 X}{dx^3} ;$$

$$X^{(5)} = X + 4 \cdot x \frac{dX}{dx} + 6 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + 4 \frac{x^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 X}{dx^3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4 X}{dx^4} ;$$

etc.

La loi des coefficients numériques de $X^{(n)}$ est évidemment la même que celle du binôme $(1 + 1)^{n-1}$.

Or nous savons, d'après la formule (29), qu'il faut faire $x = 1$ dans le second membre de l'équation

$$y = 2x \frac{d \cdot \varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x) ,$$

pour avoir l'épaisseur de la couche électrique à la surface de la sphère du rayon égal à l'unité; partant nous avons

$$(119) \dots y = h - h \cdot a \left(Q + 2x \frac{dQ}{dx} \right) + h \cdot a \left(Q' + 2x \frac{dQ'}{dx} \right) - h \cdot a \left(Q'' + 2x \frac{dQ''}{dx} \right) \\ + h \left\{ \begin{aligned} & A_{(0)} a \left(X + 2x \frac{dX}{dx} \right) + A_{(1)} a^2 \left(X^{(2)} + 2x \frac{dX^{(2)}}{dx} \right) \\ & + A_{(2)} a^3 \left(X^{(3)} + 2x \frac{dX^{(3)}}{dx} \right) + \text{etc.} \end{aligned} \right\} ;$$

pourvu que ces fonctions de x et de μ soient réduites à des fonctions de μ seulement; c'est-à-dire à leur valeur particulière qui répond à $x = 1$. En faisant $x = 1$, le radical désigné plus haut par P donne

$$(120) \dots P + 2x \frac{dP}{dx} = \frac{p^2 - q^2}{(p^2 - 2pq \cdot \mu + q^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

donc l'on a

$$X + 2x \frac{dX}{dx} = 0 ;$$

$$Q + 2x \frac{dQ}{dx} = \frac{1 - (1-a)^2}{\{1 - 2(1-a)\mu + (1-a)^2\}^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$Q' + 2x \frac{dQ'}{dx} = \frac{(1+a)^2 - 1}{\{(1+a)^2 - 2(1+a)\mu + 1\}^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$Q'' + 2x \frac{dQ''}{dx} = \frac{4 - (2-a)^2}{\{4 - 4(2-a)\mu + (2-a)^2\}^{\frac{3}{2}}} .$$

Et comme nous avons,

$$X^{(2)} + 2x \frac{dX^{(2)}}{dx} = X + 5x \frac{dX}{dx} + 2x^2 \frac{d^2X}{dx^2} ;$$

$$X^{(3)} + 2x \frac{dX^{(3)}}{dx} = X + 8x \frac{dX}{dx} + \frac{13}{2}x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + x^3 \frac{d^3X}{dx^3} ;$$

$$X^{(4)} + 2x \frac{dX^{(4)}}{dx} = X + 11x \frac{dX}{dx} + \frac{27}{2}x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{25}{6}x^3 \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{x^4}{3} \frac{d^4X}{dx^4} ;$$

$$X^{(5)} + 2x \frac{dX^{(5)}}{dx} = X + 14x \frac{dX}{dx} + 23x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{32}{3}x^3 \frac{d^3X}{dx^3}$$

$$+ \frac{41}{24}x^4 \frac{d^4X}{dx^4} + \frac{x^5}{12} \frac{d^5X}{dx^5} ;$$

$$X^{(6)} + 2x \frac{dX^{(6)}}{dx} = X + 17x \frac{dX}{dx} + 35x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{65}{3}x^3 \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{125}{24}x^4 \frac{d^4X}{dx^4}$$

$$+ \frac{61}{120}x^5 \frac{d^5X}{dx^5} + \frac{x^6}{60} \frac{d^6X}{dx^6} ;$$

$$X^{(7)} + 2x \frac{dX^{(7)}}{dx} = X + 20x \frac{dX}{dx} + \frac{99}{2}x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{115}{3}x^3 \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{295}{24}x^4 \frac{d^4X}{dx^4}$$

$$+ \frac{9}{5}x^5 \frac{d^5X}{dx^5} + \frac{17}{144}x^6 \frac{d^6X}{dx^6} + \frac{1}{360}x^7 \frac{d^7X}{dx^7} ;$$

etc. ;

il viendra , en faisant $x=1$;

$$X^{(2)} + 2x \frac{dX^{(2)}}{dx} = 3 \frac{d\bar{X}}{dx} + 2 \frac{d^2\bar{X}}{dx^2} ;$$

$$X^{(3)} + 3x \frac{dX^{(3)}}{dx} = 6 \frac{d\bar{X}}{dx} + \frac{13}{2} \cdot \frac{d^2\bar{X}}{dx^2} + \frac{d^3\bar{X}}{dx^3} ;$$

$$X^{(4)} + 4x \frac{dX^{(4)}}{dx} = 9 \frac{d\bar{X}}{dx} + \frac{27}{2} \cdot \frac{d^2\bar{X}}{dx^2} + \frac{25}{6} \cdot \frac{d^3\bar{X}}{dx^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{d^4\bar{X}}{dx^4} ;$$

$$X^{(5)} + 5x \frac{dX^{(5)}}{dx} = 12 \frac{d\bar{X}}{dx} + 23 \frac{d^2\bar{X}}{dx^2} + \frac{32}{3} \cdot \frac{d^3\bar{X}}{dx^3} + \frac{41}{24} \cdot \frac{d^4\bar{X}}{dx^4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{d^5\bar{X}}{dx^5} ;$$

$$X^{(6)} + 6x \frac{dX^{(6)}}{dx} = 15 \frac{d\bar{X}}{dx} + 35 \frac{d^2\bar{X}}{dx^2} + \frac{65}{3} \cdot \frac{d^3\bar{X}}{dx^3} + \frac{125}{24} \cdot \frac{d^4\bar{X}}{dx^4} \\ + \frac{61}{120} \cdot \frac{d^5\bar{X}}{dx^5} + \frac{1}{60} \cdot \frac{d^6\bar{X}}{dx^6} ;$$

$$X^{(7)} + 7x \frac{dX^{(7)}}{dx} = 18 \frac{d\bar{X}}{dx} + \frac{99}{2} \cdot \frac{d^2\bar{X}}{dx^2} + \frac{115}{3} \cdot \frac{d^3\bar{X}}{dx^3} + \frac{295}{24} \cdot \frac{d^4\bar{X}}{dx^4} + \frac{9}{5} \cdot \frac{d^5\bar{X}}{dx^5} \\ + \frac{17}{144} \cdot \frac{d^6\bar{X}}{dx^6} + \frac{1}{360} \cdot \frac{d^7\bar{X}}{dx^7} ;$$

etc. ;

où $\frac{d\bar{X}}{dx}$, $\frac{d^2\bar{X}}{dx^2}$ etc. désignent les valeurs que prennent ces coefficients différentiels après avoir fait $x=1$.

D'après une formule connue de LAGRANGE (*), la loi de ces coefficients est telle que l'on a ;

(*) Voyez page 216 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1772.

$$\frac{d\bar{X}}{dx} = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\mu}};$$

$$\frac{d^2\bar{X}}{dx^2} = \frac{1.3}{2^{\frac{5}{2}}\sqrt{1-\mu}}\left(1 - \frac{3.1}{3} \cdot \frac{1}{1-\mu}\right);$$

$$\frac{d^3\bar{X}}{dx^3} = -\frac{1.3.5}{2^{\frac{7}{2}}\sqrt{1-\mu}}\left(1 - \frac{3.2}{5} \cdot \frac{1}{1-\mu}\right);$$

$$\frac{d^4\bar{X}}{dx^4} = \frac{1.3.5.7}{2^{\frac{9}{2}}\sqrt{1-\mu}}\left(1 - \frac{4.3}{7} \cdot \frac{1}{1-\mu} + \frac{4.3.2.1}{1.2(7.5)} \cdot \frac{1}{(1-\mu)^2}\right);$$

$$\frac{d^5\bar{X}}{dx^5} = -\frac{1.3.5.7.9}{2^{\frac{11}{2}}\sqrt{1-\mu}}\left(1 - \frac{5.4}{9} \cdot \frac{1}{1-\mu} + \frac{5.4.3.2}{1.2(9.7)} \cdot \frac{1}{(1-\mu)^2}\right);$$

$$\frac{d^6\bar{X}}{dx^6} = \frac{1.3.5.7.9.11}{2^{\frac{13}{2}}\sqrt{1-\mu}}\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{6.5}{11} \cdot \frac{1}{1-\mu} + \frac{6.5.4.3}{1.2(11.9)} \cdot \frac{1}{(1-\mu)^2} \\ &- \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3(11.9.7)} \cdot \frac{1}{(1-\mu)^3} \end{aligned}\right\};$$

$$\frac{d^7\bar{X}}{dx^7} = -\frac{1.3.5.7.9.11.13}{2^{\frac{15}{2}}\sqrt{1-\mu}}\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{7.6}{13} \cdot \frac{1}{1-\mu} + \frac{7.6.5.4}{1.2(13.11)} \cdot \frac{1}{(1-\mu)^2} \\ &- \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3(13.11.9)} \cdot \frac{1}{(1-\mu)^3} \end{aligned}\right\};$$

etc. ;

De sorte que nous avons

$$X^{(2)} + 2x \frac{dX^{(2)}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2} \cdot (1-\mu)^{\frac{3}{2}}};$$

$$X^{(3)} + 3x \frac{dX^{(3)}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2} \cdot (1-\mu)^{\frac{3}{2}}};$$

$$X^{(1)} + 2x \frac{dX^{(1)}}{dx} = -\frac{3}{2^{\frac{5}{2}}(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{1-\mu} \right);$$

$$X^{(2)} + 2x \frac{dX^{(2)}}{dx} = -\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} \left(5 - \frac{6}{1-\mu} \right);$$

$$X^{(3)} + 2x \frac{dX^{(3)}}{dx} = -\frac{5}{2^{\frac{5}{2}}(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{35}{32} - \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{(1-\mu)} + \frac{3}{8(1-\mu)^2} \right);$$

$$X^{(4)} + 2x \frac{dX^{(4)}}{dx} = -\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{189}{32} - \frac{105}{8(1-\mu)} + \frac{45}{8(1-\mu)^2} \right);$$

etc.

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente de y nous aurons ;

$$\begin{aligned} (121) \dots y = & h - \frac{ha^2(2-a)}{\{1-2(1-a)\mu+(1-a)^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{ha^2(2+a)}{\{(1+a)^2-2(1+a)\mu+1\}^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{ha^2(4-a)}{\{4-4(2-a)\mu+(2-a)^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{ha^2\{A_{(1)}+aA_{(2)}\}}{\sqrt{2} \cdot (1-\mu)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{ha^4}{2^{\frac{5}{2}}(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{1-\mu} \right) A_{(3)} + \left(5 - \frac{6}{1-\mu} \right) a A_{(4)} \\ & + \left(\frac{175}{32} - \frac{75}{8(1-\mu)} + \frac{15}{8(1-\mu)^2} \right) a^2 A_{(5)} \\ & + \left(\frac{189}{32} - \frac{105}{8(1-\mu)} + \frac{45}{8(1-\mu)^2} \right) a^3 A_{(6)} \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\}; \end{aligned}$$

où les coefficients $A_{(1)}$, $A_{(2)}$ etc. pourront être calculés par les séries suivantes; savoir

$$A_{(1)} = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot i k_{i+1} (1-a)^{i-1};$$

$$A_{(2)} = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+2} \cdot i(i+1) k_{i+2} (1-a)^{i-1};$$

$$A_{(3)} = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+3} \cdot i(i+1)(i+2) k_{i+3} (1-a)^{i-1} ;$$

$$A_{(4)} = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+4} \cdot i(i+1)(i+2)(i+3) k_{i+4} (1-a)^{i-1} ;$$

etc.

La série que nous venons de trouver est (comme cela est déclaré par sa forme) d'autant moins propre au calcul numérique de l'épaisseur y de la couche électrique qu'il s'agit d'un point plus rapproché du point de contact, puisqu'elle est ordonnée suivant les puissances négatives et fractionnaires de $1-\mu=1-\cos\theta$. Mais la théorie de la transcendante par laquelle $f(x)$ est exprimée à l'aide de l'équation (115), offre un moyen de parer à cet inconvénient, en nous fournissant un autre développement de la fonction $Z'(p)$ ordonné suivant les puissances négatives de p . En effet; ayant posé $Z(p)=\text{Log}.\Gamma(p)$ dans le § IX, nous avons la série (*)

$$(122) \dots Z(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right) \text{Log} p - p + \frac{1}{2} \text{Log} (2\pi) + \frac{A'}{1.2.p} - \frac{B'}{3.4.p^3} + \frac{C'}{5.6.p^5} - \text{etc.},$$

où A' , B' , C' etc. désignent les nombres *Bernouilliens*, laquelle étant différenciée par rapport à p , donne

$$(123) \dots Z'(p) = \text{Log} p - \frac{1}{2p} - \frac{A'}{2p^2} + \frac{B'}{4p^4} - \frac{C'}{6p^6} + \frac{D'}{8p^8} - \text{etc.}$$

Donc, en appliquant cette formule au second membre de l'équation (115), l'on obtiendra

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{h.a}{1-x} \text{Log} \left(1 + \frac{1-x}{b} \right) - \frac{h.a}{2(1-x)} \left\{ \left(1-a + \frac{a}{1-x} \right)^{-1} - \left(\frac{1-x}{a} \right) \right\} \\ & - \frac{h.a A'}{2(1-x)} \left\{ \left(1-a + \frac{a}{1-x} \right)^{-3} - \left(\frac{1-x}{a} \right)^3 \right\} \\ & + \frac{h.a B'}{4(1-x)} \left\{ \left(1-a + \frac{a}{1-x} \right)^{-5} - \left(\frac{1-x}{a} \right)^5 \right\} \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

(*) Voyez page 294 du premier Volume des Exercices de Calcul Intégral de LEGENDRE.

Mais,

$$\frac{b}{1-x} \text{Log.} \left\{ 1 + \frac{1-x}{b} \right\} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{(1-x)t}{b}} ;$$

$$\left(1 - a + \frac{a}{1-x} \right)^{-m} = (1+b)^m \left\{ 1 - \frac{b}{1+b-x} \right\}^m ;$$

partant l'on peut écrire

$$\begin{aligned} (124) \dots f(x) &= \frac{hb}{1+b} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{b+t(1-x)} + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \frac{b}{1+b-x} \right\} \\ &\quad - \frac{hb(1+b)A'}{2} (1-x) \left\{ \frac{1}{(1+b-x)^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \\ &\quad + \frac{hb(1+b)^3 B'}{4} (1-x)^3 \left\{ \frac{1}{(1+b-x)^4} - \frac{1}{b^4} \right\} \\ &\quad - \frac{hb(1+b)^5 C'}{6} (1-x)^5 \left\{ \frac{1}{(1+b-x)^6} - \frac{1}{b^6} \right\} \\ &\quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on fait $x = \frac{x}{1+b}$, l'on a, pour toute valeur impaire de l'exposant n ;

$$(1-x)^n = - \{ b - (1+b)(1-x_1) \}^n ,$$

et par conséquent ,

$$\frac{(1-x)^n}{(1-x_1)^{n+1}} = - \frac{b^n}{(1-x_1)^{n+1}} + \frac{nb^{n-1}(1+b)}{(1-x_1)^n} - \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{b^{n-2}(1+b)^2}{(1-x_1)^{n-1}} + \text{etc.}$$

Il suit de là, que nous avons

$$\begin{aligned}
 (125) \dots f(x) = & \frac{hb}{1+b} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{(b+t)-tx} + \frac{h}{2} \left\{ 1 - \frac{b}{1+b} \cdot \frac{1}{1-x_1} \right\} \\
 & + \frac{hbA'}{2(1+b)} \left\{ \frac{b}{(1-x_1)^2} - \frac{(1+b)}{1-x_1} + \left(\frac{1+b}{b} \right)^2 (1-x) \right\} \\
 & - \frac{hbB'}{4(1+b)} \left\{ \frac{b^3}{(1-x_1)^3} - \frac{3b^2(1+b)}{(1-x_1)^3} + \frac{3b(1+b)^2}{(1-x_1)^3} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(1+b)^3}{1-x_1} + \left(\frac{1+b}{b} \right)^4 (1-x)^3 \right\} \\
 & + \frac{hbC'}{6(1+b)} \left\{ \frac{b^5}{(1-x_1)^5} - \frac{5b^4(1+b)}{(1-x_1)^5} + \frac{10b^3(1+b)^2}{(1-x_1)^5} - \frac{10b^2(1+b)^3}{(1-x_1)^5} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{5b(1+b)^4}{(1-x_1)^5} - \frac{(1+b)^5}{1-x_1} + \left(\frac{1+b}{b} \right)^6 (1-x)^5 \right\} \\
 & - \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on applique aux différens termes de cette série la règle enseignée pour dériver $\varphi(\mu, x)$ de $f(x)$ l'on verra aussitôt, que, en posant

$$T = (b+t)^2 - 2(b+t)t\mu x + t^2 x^2 ;$$

$$X_1 = (1 - 2\mu x_1 + x_1^2)^{-\frac{1}{2}},$$

l'on a ;

$$\begin{aligned}
 (126) \dots \varphi(\mu, x) = & \frac{h}{2} - \frac{hb}{2(1+b)} X_1 + \frac{hb}{1+b} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{T}} \\
 & + \frac{hbA'}{2(1+b)} \left\{ bX_1^{(2)} - (1+b)X_1 + \left(\frac{1+b}{b} \right)^2 (1-P_1x) \right\} \\
 & - \frac{hbB'}{4(1+b)} \left\{ \begin{aligned} & b^3X_1^{(4)} - 3b^2(1+b)X_1^{(3)} + 3b(1+b)^2X_1^{(2)} - (1+b)^3X_1 \\ & + \left(\frac{1+b}{b} \right)^4 (1-3P_1x + 3P_2x^2 - P_3x^3) \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{hbC'}{6(1+b)} \left\{ \begin{aligned} & b^5X_1^{(6)} - 5b^4(1+b)X_1^{(5)} + 10b^3(1+b)^2X_1^{(4)} \\ & - 10b^2(1+b)^3X_1^{(3)} + 5b(1+b)^4X_1^{(2)} - (1+b)^5X_1 \\ & + \left(\frac{1+b}{b} \right)^6 \left\{ 1 - 5P_1x + 10P_2x^2 - 10P_3x^3 \right. \\ & \quad \left. + 5P_4x^4 - P_5x^5 \right\} \end{aligned} \right\} \\
 & - \text{etc. ;}
 \end{aligned}$$

où les fonctions $X_1^{(2)}$, $X_1^{(3)}$ etc. se déduisent de celles désignées plus haut par $X^{(2)}$, $X^{(4)}$, etc. en y remplaçant x par x_1 . Pour tirer de là l'épaisseur γ , conformément à l'équation

$$\gamma = 2x \frac{d\varphi(\mu, x)}{dx} + \varphi(\mu, x),$$

il faut observer que l'on a

$$2x \frac{dX_1^{(m)}}{dx} = 2x \frac{dX_1^{(m)}}{dx_1} \cdot \frac{1}{1+b} = 2x_1 \frac{dX_1^{(m)}}{dx_1},$$

et qu'en conséquence, si l'on fait

$$U^{(m)} = X_1^{(m)} + 2x_1 \frac{dX_1^{(m)}}{dx_1},$$

il suffira de remplacer $X_1^{(m)}$ par $U^{(m)}$. Il est d'ailleurs clair que le polynome

$$1 - nP_1x + \frac{n(n-1)}{2}P_2x^2 - \text{etc.}$$

doit être remplacé par le polynome

$$Q^{(n)} = 1 - 3nP_1x + 5\frac{n(n-1)}{2}P_2x^2 - 7\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}P_3x^3 + \text{etc.}$$

Le terme affecté du signe intégral introduit dans γ le terme

$$\frac{hb}{1+b} \int_0^1 \frac{dt \{ (b+t)^2 - t^2 x^2 \}}{T\sqrt{T}} :$$

et comme l'on doit y faire $x=1$, il devient égal à

$$\frac{hb}{1+b} \int_0^1 \frac{dt \{ b^2 + 2bt \}}{[b^2 + 2bt(1-\mu) + 2(1-\mu)t^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc en appliquant ici la formule

$$\int_0^1 \frac{dt \{ A^2 + 2At \}}{\{ A^2 + Bt + Ct^2 \}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2A}{(4C.A^2 - B^2)} \left\{ 4A - B + \frac{A(B + 2C) - 2(B + 2A^2)}{\sqrt{A^2 + B + C}} \right\},$$

l'on trouvera que le terme affecté du signe intégral donne dans γ cette fonction de μ ; savoir

$$\frac{hb}{(1+b)(1-\mu)} \left\{ 1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2(1+b)(1-\mu)}} \right\}$$

$$= \frac{2hb}{\sqrt{b^2 + 2(1+b)(1-\mu)} \{ b + \sqrt{b^2 + 2(1+b)(1-\mu)} \}}.$$

En réunissant ces parties l'on aura ;

$$(127) \dots \gamma = \frac{h}{2} - \frac{hb}{2(1+b)} \bar{U}^{(1)} + \frac{2hb}{\sqrt{b^2 + 2(1+b)(1-\mu)} \{ b + \sqrt{b^2 + 2(1+b)(1-\mu)} \}}$$

$$+ \frac{hbA'}{2(1+b)} \left\{ b \bar{U}^{(2)} - (1+b) \bar{U}^{(1)} - \left(\frac{1+b}{b} \right)^2 \{ 2 - 3(1-\mu) \} \right\}$$

$$- \frac{hbB'}{4(1+b)} \left\{ \begin{aligned} &b^3 \bar{U}^{(3)} - 3b^2(1+b) \bar{U}^{(2)} + 3b(1+b)^2 \bar{U}^{(1)} \\ &- (1+b)^3 \bar{U}^{(1)} + \left(\frac{1+b}{b} \right)^4 \bar{Q}^{(3)} \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{hbC'}{6(1+b)} \left\{ \begin{aligned} &b^5 \bar{U}^{(5)} - 5b^4(1+b) \bar{U}^{(4)} + 10b^3(1+b)^2 \bar{U}^{(3)} - 10b^2(1+b)^3 \bar{U}^{(2)} \\ &+ 5b(1+b)^4 \bar{U}^{(1)} - (1+b)^5 \bar{U}^{(1)} + \left(\frac{1+b}{b} \right)^6 \bar{Q}^{(5)} \end{aligned} \right\}$$

— etc. ;

où $\bar{Q}^{(3)}$, $\bar{Q}^{(5)}$ etc. désignent les valeurs respectives de $\bar{Q}^{(3)}$, $\bar{Q}^{(5)}$ etc. après avoir fait $x=1$; et $\bar{U}^{(1)}$, $\bar{U}^{(2)}$, etc. les valeurs respectives de $U^{(1)}$,

$U^{(2)}$ etc. après avoir fait $x_1 = \frac{1}{1+b}$.

Pour former les expressions des coefficients $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ etc., il faut d'abord observer, que, l'application de la formule de LAGRANGE citée plus haut donne, en posant pour plus de simplicité ;

$$R = \frac{1 - 2\mu x_1 + x_1^2}{2(x_1 - \mu)^2} ;$$

$$\frac{dX_1}{dx_1} = -(x_1 - \mu)X_1^3 ;$$

$$\frac{d^2X_1}{dx_1^2} = 1.3(x_1 - \mu)^2X_1^5 \left\{ 1 - \frac{2.1}{3}R \right\} ;$$

$$\frac{d^3X_1}{dx_1^3} = -1.3.5(x_1 - \mu)^3X_1^7 \left\{ 1 - \frac{3.2}{5}R \right\} ;$$

$$\frac{d^4X_1}{dx_1^4} = 1.3.5.7(x_1 - \mu)^4X_1^9 \left\{ 1 - \frac{4.3}{7}R + \frac{4.3.2.1}{1.2(7.5)}R^2 \right\} ;$$

$$\frac{d^5X_1}{dx_1^5} = -1.3.5.7.9(x_1 - \mu)^5X_1^{11} \left\{ 1 - \frac{5.4}{9}R + \frac{5.4.3.2}{1.2(9.7)}R^2 \right\} ;$$

$$\frac{d^6X_1}{dx_1^6} = 1.3.5.7.9.11(x_1 - \mu)^6X_1^{13} \left\{ 1 - \frac{6.5}{11}R + \frac{6.5.4.3}{1.2(11.9)}R^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3(11.9.7)}R^3 \right\} ;$$

$$\frac{d^7X_1}{dx_1^7} = -1.3.5.7.9.11.13(x_1 - \mu)^7X_1^{15} \left\{ 1 - \frac{7.6}{13}R + \frac{7.6.5.4}{1.2(13.11)}R^2 - \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3(13.11.9)}R^3 \right\} ;$$

etc. ;

donc en substituant ces coefficients différentiels dans les formules précédentes, l'on aura

$$U^{(1)} = (1 - x_1^2)X_1^3 ;$$

$$U^{(2)} = X_1 - 5x_1(x_1 - \mu)X_1^3 + 2x_1^2(x_1 - \mu)^2X_1^5(3 - 2R) ;$$

$$U^{(3)} = X_1 - 8x_1(x_1 - \mu)X_1^3 + \frac{13}{2}x_1^2(x_1 - \mu)^2X_1^5(3 - 2R) \\ - 3x_1^3(x_1 - \mu)^3X_1^7(5 - 3.2R) ;$$

$$U^{(4)} = X_1 - 11x_1(x_1 - \mu)X_1^3 + \frac{27}{2}x_1^2(x_1 - \mu)^2X_1^5(3 - 2R) \\ - \frac{25}{2}x_1^3(x_1 - \mu)^3X_1^7(5 - 3.2R) + x_1^4(x_1 - \mu)^4X_1^9\{5.7 - 5.4.3R + 4.3R^2\};$$

$$U^{(5)} = X_1 - 14x_1(x_1 - \mu)X_1^3 + 23x_1^2(x_1 - \mu)^2X_1^5(3 - 2R) \\ - 32x_1^3(x_1 - \mu)^3X_1^7(5 - 3.2R) + \frac{41}{8}x_1^4(x_1 - \mu)^4X_1^9(5.7 - 5.4.3R + 4.3R^2) \\ - \frac{5}{4}x_1^5(x_1 - \mu)^5X_1^{11}(7.9 - 5.4.7R + 5.4.3R^2);$$

$$U^{(6)} = X_1 - 17x_1(x_1 - \mu)X_1^3 + 35x_1^2(x_1 - \mu)^2X_1^5(3 - 2R) \\ - 65x_1^3(x_1 - \mu)^3X_1^7(5 - 3.2R) + \frac{125}{8}x_1^4(x_1 - \mu)^4X_1^9(5.7 - 5.4.3R + 4.3R^2) \\ - \frac{61}{8}x_1^5(x_1 - \mu)^5X_1^{11}(7.9 - 5.4.7R + 5.4.3R^2) \\ + \frac{1}{4}x_1^6(x_1 - \mu)^6X_1^{13}(7.9.11 - 6.5.7.9R + 6.5.2.3.7R^2 - 6.5.4R^3);$$

etc.;

d'où l'on tire en remplaçant R par sa valeur, et réduisant,

$$U^{(1)} = X_1^3(1 - x_1^2);$$

$$U^{(2)} = X_1^5\left\{(1 - 5x_1^2) + \mu x_1(1 + 3x_1^2)\right\};$$

$$U^{(3)} = X_1^7\left\{\left(1 - \frac{23}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_1^4\right) + \mu x_1(2 + 14x_1^2) - \mu^2 x_1^2\left(\frac{1}{2} + \frac{15}{2}x_1^2\right)\right\};$$

$$U^{(4)} = X_1^9\left\{\left(1 - \frac{41}{2}x_1^2 + \frac{27}{2}x_1^4\right) + \mu x_1\left(3 + \frac{75}{2}x_1^2 - \frac{21}{2}x_1^4\right) \right. \\ \left. - \mu^2 x_1^2\left(\frac{3}{2} + \frac{81}{2}x_1^2\right) + \mu^3 x_1^3\left(\frac{1}{2} + \frac{35}{2}x_1^2\right)\right\};$$

$$U^{(5)} = X_1^{11}\left\{\left(1 - 32x_1^2 + \frac{339}{8}x_1^4 - \frac{27}{8}x_1^6\right) + \mu x_1(4 + 78x_1^2 - 66x_1^4) \right. \\ \left. - \mu^2 x_1^2\left(3 + \frac{507}{4}x_1^2 - \frac{135}{4}x_1^4\right) + \mu^3 x_1^3(2 + 110x_1^2) \right. \\ \left. - \mu^4 x_1^4\left(\frac{5}{8} + \frac{315}{8}x_1^2\right)\right\};$$

$$U^{(4)} = X_i^{13} \left\{ \begin{aligned} & \left(1 - 46x_i^2 + \frac{815}{8}x_i^4 - \frac{195}{8}x_i^6 \right) \\ & + \mu x_i \left(5 + 140x_i^2 - \frac{1905}{8}x_i^4 + \frac{165}{8}x_i^6 \right) \\ & + \mu^2 x_i^3 \left(-5 - \frac{1215}{4}x_i^2 + \frac{975}{4}x_i^4 \right) \\ & + \mu^3 x_i^5 \left(5 + \frac{1585}{4}x_i^2 - \frac{385}{4}x_i^4 \right) \\ & + \mu^4 x_i^7 \left(-\frac{25}{8} - \frac{2275}{8}x_i^2 \right) + \mu^5 x_i^9 \left(\frac{7}{8} + \frac{693}{8}x_i^2 \right) \end{aligned} \right\} ;$$

etc. ;

ou bien ,

$$U^{(1)} = -X_i^3 (x_i + 1)(x_i - 1) ;$$

$$U^{(2)} = -X_i^5 \left\{ (1 + 3x_i)(x_i - 1)^2 - x_i(1 + 3x_i^2)(1 - \mu) \right\} ;$$

$$U^{(3)} = -X_i^7 \left\{ \begin{aligned} & (1 + 5x_i)(x_i - 1)^3 + x_i(2 + 14x_i^2)(1 - \mu) \\ & - x_i^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{15}{2}x_i^2 \right) (1 - \mu^2) \end{aligned} \right\} ;$$

$$U^{(4)} = -X_i^9 \left\{ \begin{aligned} & (1 + 7x_i)(x_i - 1)^4 - x_i \left(3 + \frac{75}{2}x_i^2 - \frac{21}{2}x_i^4 \right) (1 - \mu) \\ & + x_i^3 \left(\frac{3}{2} + \frac{81}{2}x_i^2 \right) (1 - \mu^2) - x_i^5 \left(\frac{1}{2} + \frac{35}{2}x_i^2 \right) (1 - \mu^3) \end{aligned} \right\} ;$$

$$U^{(5)} = -X_i^{11} \left\{ \begin{aligned} & (1 + 9x_i)(x_i - 1)^5 + (4x_i + 78x_i^3 - 66x_i^5)(1 - \mu) \\ & - \left(3x_i^3 + \frac{507}{4}x_i^5 - \frac{135}{4}x_i^7 \right) (1 - \mu^2) \\ & + (2x_i^5 + 110x_i^7)(1 - \mu^3) - \left(\frac{5}{8}x_i^9 + \frac{315}{8}x_i^{11} \right) (1 - \mu^4) \end{aligned} \right\} ;$$

$$U^{(4)} = X_i^{13} \left\{ \begin{aligned} & (1+11x_i)(x_i-1)^6 - x_i \left(5+140x_i^2 - \frac{1905}{8}x_i^4 + \frac{165}{8}x_i^6 \right) (1-\mu) \\ & + x_i^3 \left(5 + \frac{1215}{4}x_i^2 - \frac{975}{4}x_i^4 \right) (1-\mu^2) \\ & - x_i^5 \left(5 + \frac{1585}{4}x_i^2 - \frac{385}{4}x_i^4 \right) (1-\mu^3) \\ & + x_i^7 \left(\frac{25}{8} + \frac{2275}{8}x_i^2 \right) (1-\mu^4) - x_i^9 \left(\frac{7}{8} + \frac{693}{8}x_i^2 \right) (1-\mu^5) \end{aligned} \right\};$$

etc.

Cela posé si l'on substitue pour x_i sa valeur $\frac{1}{1+b}$, et si l'on fait pour plus de simplicité,

$$U = \left\{ 1 + \frac{2(1+b)}{b^2} (1-\mu) \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

l'on aura

$$\bar{U}^{(1)} = U^3 \frac{(1+b)}{b^3} (2+b)b;$$

$$\bar{U}^{(2)} = U^5 \frac{(1+b)^2}{b^5} \left\{ (4+b)b^2 - (4+2b+b^2)(1-\mu) \right\};$$

$$\bar{U}^{(3)} = U^7 \frac{(1+b)^3}{b^7} \left\{ \begin{aligned} & (6+b)b^3 - 2(1+b)[7+(1+b)^2](1-\mu) \\ & + \frac{1}{2}[15+(1+b)^2](1-\mu^2) \end{aligned} \right\};$$

$$\bar{U}^{(4)} = U^9 \frac{(1+b)^4}{b^9} \left\{ \begin{aligned} & (8+b)b^4 + \left[\frac{21}{2} - \frac{75}{2}(1+b)^2 - 3(1+b)^4 \right] (1-\mu) \\ & + \frac{1}{2}(1+b)[81+3(1+b)^2](1-\mu^2) \\ & - \frac{1}{2}[35+(1+b)^2](1-\mu^3) \end{aligned} \right\};$$

$$\bar{U}^{(5)} = U^{(5)} \frac{(1+b)^5}{b^{15}} \left\{ \begin{aligned} & (10+b)b^5 + (1+b)[66-78(1+b)^2-4(1+b)^4](1-\mu) \\ & - \left[\frac{135}{4} - \frac{507}{4}(1+b)^2 - 3(1+b)^4 \right] (1-\mu^2) \\ & - (1+b)[110+2(1+b)^2](1-\mu^3) \\ & + \left[\frac{315}{8} + \frac{5}{8}(1+b)^2 \right] (1-\mu^4) \end{aligned} \right\};$$

$$\bar{U}^{(6)} = U^{(6)} \frac{(1+b)^6}{b^{18}} \left\{ \begin{aligned} & (12+b)b^6 - \left\{ \frac{165}{8} - \frac{1905}{8}(1+b)^2 + 140(1+b)^4 + 5(1+b)^6 \right\} (1-\mu) \\ & + \left\{ -\frac{975}{4} + \frac{1215}{4}(1+b)^2 + 5(1+b)^4 \right\} (1+b)(1-\mu^2) \\ & - \left\{ -\frac{385}{4} + \frac{1585}{4}(1+b)^2 + 5(1+b)^4 \right\} (1-\mu^3) \\ & + \left\{ \frac{2275}{8} + \frac{25}{8}(1+b)^2 \right\} (1+b)(1-\mu^4) \\ & - \left\{ \frac{693}{8} + \frac{7}{8}(1+b)^2 \right\} (1-\mu^5) \end{aligned} \right\};$$

etc.

Relativement aux quantités $\bar{Q}^{(3)}$, $\bar{Q}^{(5)}$ etc., il importe de remarquer que l'expression de $\bar{Q}^{(n)}$ peut être écrite ainsi; savoir

$$(128) \dots \bar{Q}^{(n)} = -3n(P_1-1) + 5 \frac{n(n-1)}{2} (P_2-1) - 7 \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} (P_3-1) + \text{etc.};$$

et cela, à cause que le polynome

$$1 - 3n + 5 \frac{n(n-1)}{2} - 7 \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

devient égale à zéro pour toute valeur entière de n plus grande que l'unité. Comme les coefficients P_1 , P_2 etc. deviennent chacun égal à l'unité en y faisant $\mu=1$, il est clair que l'on a

$$P_1 - 1 = -(1 - \mu) ;$$

$$P_2 - 1 = -\frac{3}{2}(1 - \mu^2) ;$$

$$P_3 - 1 = \frac{3}{2}(1 - \mu) - \frac{5}{2}(1 - \mu^3) ;$$

$$P_4 - 1 = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} {}^2(1 - \mu^2) - \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} (1 - \mu^4) ;$$

$$P_5 - 1 = -\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} (1 - \mu) + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} {}^2(1 - \mu^3) - \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 4} (1 - \mu^5) ;$$

etc.

La forme des fonctions $\bar{U}^{(1)}$, $\bar{U}^{(2)}$, $\bar{U}^{(3)}$ etc.; $\bar{Q}^{(3)}$, $\bar{Q}^{(5)}$ etc. est maintenant telle qu'il est facile de vérifier, que la première ligne de la valeur de γ donnée par la série (127), ainsi que chacun de ses termes, respectivement multiplié par A' , B' , C' etc., devient nul en y faisant $\mu=1$, comme cela doit être. Cette série cesserait d'être convergente en s'éloignant du point de contact; mais elle est avantageuse pour calculer l'épaisseur de la couche électrique aux environs de ce point. D'après cette propriété et la propriété analogue de la série (121) il faut regarder les séries (121) et (127), comme propres au calcul de l'épaisseur électrique vers les extrémités opposées de la couche; et cet avantage suffit pour rendre raison des détails dans lesquels nous sommes entrés pour établir ces formules tout-à-fait nouvelles avec toute la clarté possible.

A l'égard des points intermédiaires il y a une troisième série qui s'obtient immédiatement à l'aide de la formule primitive (H) trouvée dans le § VII. En faisant $P=0$, et $g=h$, cette série donne

$$(129) \dots f(x) = hb \sum_{\circ}^{\infty} \frac{1}{p-qx} - hb \sum_{\circ}^{\infty} \frac{1}{p'-q'x} ,$$

après avoir fait

$$\left. \begin{array}{l} p = b + n(1+b) ; \\ q = n(1+b) ; \end{array} \right| \begin{array}{l} p' = (n+1)(1+b) ; \\ q' = 1 + n(1+b) . \end{array}$$

Donc, en appliquant à chacun de ces termes la règle démontrée dans le § V, nous aurons la série que Poisson trouve dans la page 74 de son 1^{er} Mémoire; c'est-à-dire

$$(130) \dots \varphi(\mu, x) = hb \left\{ (R_0 - R'_0) + (R_1 - R'_1) + (R_2 - R'_2) + \text{etc.} \right\},$$

où l'on a

$$R_n = \left\{ p^2 - 2pq\mu \cdot x + q^2x^2 \right\}^{-\frac{1}{2}};$$

$$R'_n = \left\{ p'^2 - 2p'q'\mu \cdot x + q'^2x^2 \right\}^{-\frac{1}{2}};$$

Il suit de là, et des formules (29) et (120), que l'on a

$$(131) \dots \gamma = hb \sum_{\infty}^{\infty} \frac{p^2 - q^2}{(p^2 - 2pq \cdot \cos \theta + q^2)^{\frac{3}{2}}} - hb \sum_{\infty}^{\infty} \frac{p'^2 - q'^2}{(p'^2 - 2p'q' \cdot \cos \theta + q'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En remplaçant b par $\frac{1}{b}$, θ par θ_1 ; et γ par bz cette formule donne

$$(132) \dots z = \frac{h}{b} \sum_{\infty}^{\infty} \frac{q'^2 - q^2}{(q'^2 - 2q'q \cdot \cos \theta_1 + q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{h}{b} \sum_{\infty}^{\infty} \frac{p'^2 - p^2}{(p'^2 - 2p'p \cdot \cos \theta_1 + p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

pour expression de l'épaisseur z de la couche qui recouvre la sphère du rayon b .

En faisant le même changement dans les formules (121) et (127) l'on aura les valeurs correspondantes de z ; mais nous nous dispensons d'écrire ces formules parceque leur formation est tout-à-fait évidente.

Pour faciliter le calcul arithmétique de la formule (131) nous ferons

$$\frac{p}{q} = \text{tang.}(45^\circ + \Pi); \quad \frac{p'}{q'} = \text{tang.}(45^\circ + \Pi'); \quad ;$$

$$\cos \zeta = \cos \theta \cdot \cos 2\Pi; \quad \cos \zeta' = \cos \theta \cdot \cos 2\Pi'; \quad ;$$

$$\text{tang. } \Pi = \frac{b}{b + 2n(1+b)}; \quad \text{tang. } \Pi' = \frac{b}{b + 2[1+n(1+b)]}; \quad ;$$

ce qui donne

$$\gamma = \frac{hb}{2\sqrt{2}} \sum_{\infty}^{\infty} \frac{\cos(45^\circ + \Pi) \cdot \sin 2\Pi}{q \cdot \sin^3 \frac{1}{2}\zeta} - \frac{hb}{2\sqrt{2}} \sum_{\infty}^{\infty} \frac{\cos(45^\circ + \Pi') \cdot \sin 2\Pi'}{q' \cdot \sin^3 \frac{1}{2}\zeta'}.$$

Et comme l'équation $\text{tang. } \Pi = \frac{b}{b+2q}$ donne $q = \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos(45^\circ + \Pi)}{\sin \Pi}$ il est clair que l'on a

$$(133) \dots x = h \cdot \frac{\infty}{0} \cdot \frac{\cos \Pi \cdot \sin^3 \Pi}{\sin^3 \frac{1}{2} \zeta} - h \cdot \frac{\infty}{0} \cdot \frac{\cos \Pi' \cdot \sin^3 \Pi'}{\sin^3 \frac{1}{2} \zeta'}.$$

Maintenant j'observe, que les deux angles Π et Π' étant liés par l'équation

$$(134) \dots \text{tang.}(90^\circ - \Pi') = \frac{2}{b} + \text{tang.}(90^\circ - \Pi),$$

l'on pourrait développer l'angle Π' par la série connue (*);

$$(135) \dots \Pi' = \Pi - \psi' + \sin \psi' \cdot \cos(2\Pi - \psi') - \frac{1}{2} \sin^3 \psi' \cdot \sin(4\Pi - 2\psi') \\ - \frac{1}{3} \sin^3 \psi' \cdot \cos(6\Pi - 3\psi') + \frac{1}{4} \sin^4 \psi' \cdot \sin(8\Pi - 4\psi') \\ + \frac{1}{5} \sin^5 \psi' \cdot \cos(10\Pi - 5\psi') - \frac{1}{6} \sin^6 \psi' \cdot \sin(12\Pi - 6\psi') \\ + \text{etc.};$$

où l'angle ψ' est déterminé par l'équation $\text{tang. } \psi' = \frac{1}{b}$.

Mais, en général, il conviendra de faire $\text{tang. } \psi'' = \frac{b}{2}$, et de calculer l'angle Π' d'après l'équation

$$\text{tang. } \Pi' = \frac{\sin \Pi \cdot \sin \psi''}{\sin(\Pi + \psi'')}.$$

Lorsque b sera un nombre entier, si l'on fait

$$T_n = \frac{b(b+2n)}{\{(b+n)^2 - 2n(b+n) \cos \theta + n^2\}^{\frac{3}{2}}}, \\ n' = n(1+b);$$

(*) Voyez page 241 du second Volume des Exercices de Calcul Intégral de LEGENDRE.

il est clair que l'on a

$$T_n = \frac{p^3 - q^3}{(p^3 - 2pq \cos \theta + q^3)^{\frac{3}{2}}}; \quad T_{n+1} = \frac{p'^3 - q'^3}{(p'^3 - 2p'q' \cos \theta + q'^3)^{\frac{3}{2}}};$$

et par conséquent

$$(136) \dots y = bh \left\{ \sum_0^{\infty} T_n - \sum_0^{\infty} T_{n+1} \right\};$$

donc en faisant

$$\text{tang. } \Lambda = \frac{b}{b + 2n}; \quad \cos \psi = \cos \theta \cdot \cos 2\Lambda;$$

$$U_n = \frac{\cos \Lambda \cdot \sin^3 \Lambda}{\sin^3 \frac{1}{2} \psi};$$

l'on aura $T_n = \frac{1}{b} \cdot U_n$; et

$$(137) \dots y = h - h \left\{ 1 + \sum_0^{\infty} U_{n+1} - \sum_0^{\infty} U_n \right\}.$$

Si l'on veut savoir *a priori* combien de termes de cette série l'on doit calculer pour avoir y avec un degré donné d'approximation, l'on

fera $T_n = \frac{1}{10^\lambda}$; ce qui fournit l'équation

$$\left((b+n)^3 - 2n(b+n) \cos \theta + n^3 \right)^{\frac{3}{2}} = b^3 (b+2n)^3 10^{2\lambda},$$

ou bien

$$\left\{ n(b+n) + \left(\frac{b}{2 \sin \frac{1}{2} \theta} \right)^2 \right\}^3 = \frac{b^3 (b+2n)^3 \cdot 10^{2\lambda}}{2^6 \sin^6 \frac{1}{2} \theta}.$$

En prenant le logarithme tabulaire des deux membres de cette équation, nous aurons

$$(138) \dots \left\{ \begin{aligned} & 3 \text{Log.} \left\{ n(b+n) + \left(\frac{b}{2 \sin. \frac{1}{2} \theta} \right)^2 \right\} - 2 \text{Log.}(b+2n) \\ & = 2\lambda + 2 \text{Log.} b - 6 \cdot \text{Log.} 2 - 6 \cdot \text{Log.} \sin. \frac{1}{2} \theta \end{aligned} \right\}.$$

De là il sera facile de tirer la valeur de n à une unité près.

Soit, par exemple, $\theta = 30^\circ$; $b = 1$; $\lambda = 3$; nous aurons

$$3 \text{Log.} \{ n(1+n) + 3, 73205 \} - 2 \text{Log.}(1+2n) = 4, 19382 + 3, 52202 = 7, 71584.$$

En prenant $n = 119$ le premier membre de cette équation devient 7, 70773, et en prenant $n = 120$ il devient 7, 72220. Ainsi il faudra calculer 120 termes pour avoir la valeur de y à un millième près.

En faisant $\theta = 60^\circ$; $b = 1$; $\lambda = 3$, l'on a l'équation

$$3 \text{Log.} \{ n(1+n) + 1 \} - 2 \text{Log.}(1+2n) = 6 ;$$

où il suffit de faire $n = 44$, puisque son premier membre devient 6, 00187.

En faisant $\theta = 90^\circ$; $b = 1$; $\lambda = 3$; l'on a l'équation

$$3 \text{Log.} \{ n(n+1) + 0, 5 \} - 2 \text{Log.}(1+2n) = 5, 09691 ,$$

où en posant $n = 26$ le premier membre devient 5, 09139.

En faisant $\theta = 180^\circ$; $b = 1$; $\lambda = 3$; l'on a l'équation

$$3 \text{Log.} \{ n(1+n) + 0, 25 \} - 2 \text{Log.}(1+2n) = 4, 19382 ;$$

où en posant $n = 15$ le premier membre devient 4, 1592 et en y faisant $n = 16$ il devient 4, 2669.

En posant $\theta = 60^\circ$; $b = 2$, $\lambda = 3$, l'on a l'équation

$$3 \text{Log.} \{ n(2+n) + 4 \} - 2 \text{Log.}(1+n) = 6 + 4 \text{Log.} 2 = 7, 20412 .$$

En prenant $n = 48$, le premier membre devient 6, 7625, et en faisant $n = 49$ il devient 7, 79744.

Comme le nombre n ainsi trouvé représente un multiple de $1+b$, il faudra le diviser par $1+b$ et doubler ensuite le quotient pour avoir le nombre total des termes de la forme U_n , qu'il faudra calculer.

Si l'on demandait le nombre des termes relatif au second membre de la formule (131), il faudrait tirer la valeur de n de l'équation

$$\frac{p^2 - q^2}{(p^2 - 2pq \cos \theta + q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{10\lambda},$$

laquelle étant traitée d'une manière tout-à-fait analogue à la précédente deviendra équivalente à celle-ci; savoir

$$(139) \left\{ \begin{aligned} & 3 \text{Log} \left\{ (1+b)n[b+n(1+b)] + \left(\frac{b}{2 \sin \frac{1}{2}\theta} \right)^2 \right\} - 2 \text{Log} \{ b + 2n(1+b) \} \right\} \\ & = 2\lambda + 2 \text{Log} . b - 6 \text{Log} . 2 - 6 \text{Log} . \sin \frac{1}{2}\theta . \end{aligned} \right.$$

Les formules (121), (127), (133), et (137) que nous avons démontrées dans ce §, offrent, par les séries, une solution complète du problème concernant la loi de l'épaisseur de la couche électrique qui recouvre les deux sphères en contact. Cette solution deviendra beaucoup plus intéressante en la rapprochant de celle, sous forme finie, que nous allons exposer dans le § suivant.

En terminant ce § il ne sera pas inutile de faire observer, que la série (131) présente un inconvénient analogue à celui de la série (121); c'est-à-dire que l'on obtient $y = -\infty$ pour $\theta = 0$. Car, alors l'on a

$$y = \frac{h}{b} \cdot \sum_{\infty}^{\infty} (p+q) - (p'+q') = -\frac{2h}{b} \cdot \sum_{\infty}^{\infty} 1 = -\frac{2h}{b} (1+1+\text{etc.}) = -\infty.$$

§ XV.

Je vais maintenant exposer le calcul par lequel on tire de la formule (H''), trouvée dans le § VIII, l'expression de $\varphi(\mu, x)$ ainsi que celle de l'épaisseur de la couche électrique sous forme finie. D'après le principe démontré dans le § V, relativement à la transformation de

toute fraction de la forme $\frac{1}{p-qx}$, il faudra d'abord, après avoir fait

$P=0$, remplacer le premier terme $\frac{h}{2} - \frac{hb}{2} \cdot \frac{1}{1+b-x}$, par

$$\frac{h}{2} - \frac{bh}{2\sqrt{(1+b)^2 - 2(1+b)\mu x + x^2}}.$$

Pour pouvoir appliquer immédiatement le même principe au second terme, j'observe que l'on a

$$\frac{1}{1-x} \text{Log.} \left(1 + \frac{1-x}{b}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{b+t} \left(1 - \frac{xt}{b+t}\right)^{-1};$$

donc, en développant le binôme $\left(1 - \frac{xt}{b+t}\right)^{-1}$ suivant les puissances entières et positives de x , et multipliant ensuite chaque terme par 1, P_1 , P_2 , P_3 etc., respectivement, l'on verra que le terme

$$\frac{bh}{(1+b)(1+x)} \text{Log.} \left(1 + \frac{1-x}{b}\right)$$

introduit dans $\varphi(\mu, x)$ l'intégrale définie

$$\begin{aligned} & \frac{hb}{1+b} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(b+t)^2 - 2t(b+t)\mu x + t^2 x^2}} \\ &= \frac{hb}{1+b} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{b^2 + 2b(1-\mu x)t + (1-2\mu x + x^2)t^2}}. \end{aligned}$$

En appliquant au troisième et au quatrième terme de $f(x)$ la formule

$$\frac{2u}{a^2+u^2} = \frac{\sqrt{-1}}{a+u\sqrt{-1}} - \frac{\sqrt{-1}}{a-u\sqrt{-1}},$$

l'on aura

$$\frac{2(1+b)(1-x)t}{b^2+(1+b)^2(1-x)^2t^2} = \frac{\sqrt{-1}}{b+(1+b)(1-x)t\sqrt{-1}} - \frac{\sqrt{-1}}{b-(1+b)(1-x)t\sqrt{-1}};$$

$$\frac{2(1+b)(1-x)t}{(1+b-x)^2 + (1+b)^2(1-x)^2 t^2}$$

$$= \frac{V_{-1}}{(1+b-x) + (1+b)(1-x)tV_{-1}} - \frac{V_{-1}}{(1+b-x) - (1+b)(1-x)tV_{-1}}$$

Donc, le troisième terme de $f(x)$ introduira dans $\varphi(\mu, x)$ l'intégrale

$$hbV_{-1} \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t} - 1)} \left\{ \frac{1}{V_{P+Q}V_{-1}} - \frac{1}{V_{P-Q}V_{-1}} \right\};$$

et le quatrième terme introduira l'intégrale

$$-hbV_{-1} \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t} - 1)} \left\{ \frac{1}{V_{P'+Q'}V_{-1}} - \frac{1}{V_{P'-Q'}V_{-1}} \right\};$$

où l'on a fait pour plus de simplicité;

$$P = b^2 - (1+b)^2(1-2\mu x + x^2)t^2;$$

$$Q = 2b(1+b)(1-\mu x)t;$$

$$P' = (1+b)(1+b-2\mu x) + x^2 - (1+b)^2(1-2\mu x + x^2)t^2;$$

$$Q' = 2(1+b) \left\{ 1 - 2\mu x + x^2 + b(1-\mu x) \right\} t.$$

La somme de ces quatre parties donne

$$(140) \dots \varphi(\mu, x) = \frac{1}{2}h - \frac{hb}{2\sqrt{b^2 + 2b(1-\mu x) + 1 - 2\mu x + x^2}}$$

$$+ \frac{hb}{1+b} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{b^2 + 2b(1-\mu x)t + (1-2\mu x + x^2)t^2}}$$

$$+ hbV_{-1} \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t} - 1)} \left\{ \frac{1}{V_{P+Q}V_{-1}} - \frac{1}{V_{P-Q}V_{-1}} \right\}$$

$$- hbV_{-1} \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t} - 1)} \left\{ \frac{1}{V_{P'+Q'}V_{-1}} - \frac{1}{V_{P'-Q'}V_{-1}} \right\}.$$

Maintenant, si l'on veut faire disparaître les imaginaires, il suffira d'appliquer ici la formule

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{A+B\sqrt{-1}}} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{A-B\sqrt{-1}}} = \frac{B\sqrt{-1}}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A+\sqrt{A^2+B^2}}} ;$$

mais, la forme affectée du symbole imaginaire est préférable pour obtenir l'expression de l'épaisseur y de la couche, laquelle doit être déterminée d'après l'équation (29); c'est-à-dire, d'après l'équation

$$y = \varphi(\mu, x) + 2x \frac{d\varphi(\mu, x)}{dx} ,$$

où l'on doit faire $x=1$ après la différentiation. Nous allons exposer le calcul qui fournit cette formule.

Après avoir fait $x=1$, l'on trouve

$$P = b^2 - 2(1+b)^2(1-\mu)t^2 ;$$

$$Q = 2b(1+b)(1-\mu)t ;$$

$$P' = b^2 + 2(1+b)(1-\mu) \{ 1 - (1+b)t^2 \} ;$$

$$Q' = 2(1+b)(2+b)(1-\mu)t ;$$

$$\frac{dP}{dx} = -2(1+b)^2(1-\mu)t^2 ;$$

$$\frac{dQ}{dx} = -2b(1+b)\mu t ;$$

$$\frac{dP'}{dx} = 2(1-\mu-b\mu) - 2(1+b)^2(1-\mu)t^2 ;$$

$$\frac{dQ'}{dx} = 2(1+b)(2-2\mu-b\mu)t .$$

Il suit de là que, en posant ,

$$M = (1+b)^2(1-\mu)t^2 ;$$

$$N = (1+b)b\mu t ;$$

$$M' = -(1-\mu-b\mu) + (1+b)^2(1-\mu)t^2 ;$$

$$N' = -(1+b)(2-2\mu-b\mu)t ;$$

l'on a

$$\frac{d.(P+Q\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{M+N\sqrt{-1}}{(P+Q\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$\frac{d.(P-Q\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{M-N\sqrt{-1}}{(P-Q\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$\frac{d.(P'+Q'\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{M'+N'\sqrt{-1}}{(P'+Q'\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$\frac{d.(P'-Q'\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{M'-N'\sqrt{-1}}{(P'-Q'\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} .$$

Nous trouvons de même

$$\frac{d.}{dx} \left\{ b^2 + 2b(1-\mu x) + 1 - 2\mu x + x^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1+b)\mu - 1}{\{b^2 + 2b(1-\mu) + 2(1-\mu)\}^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$\frac{d.}{dx} \left\{ b^2 + 2b(1-\mu x)t + (1-2\mu x + x^2)t^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{b\mu t - (1-\mu)t^2}{\{b^2 + 2b(1-\mu)t + 2(1-\mu)t^2\}^{\frac{3}{2}}} ;$$

Cela posé l'on trouve sans difficulté que, en faisant pour plus de simplicité

$$P + 2M = R ; \quad Q + 2N = S ,$$

$$P' + 2M' = R' ; \quad Q' + 2N' = S' ;$$

l'on a ,

$$\begin{aligned}
 (141) \dots J = & \frac{1}{2}h - \frac{hb^3(2+b)}{2\{b^2+2(1+b)(1-\mu)\}^{\frac{3}{2}}} \\
 & + \frac{hb}{1+b} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{b^2+2b(1-\mu)t+2(1-\mu)t^2}} \\
 & + \frac{2hb}{1+b} \int_0^1 \frac{tdt\{b\mu-(1-\mu)t\}}{\{b^2+2b(1-\mu)t+2(1-\mu)t^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
 & + hb\sqrt{-1} \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t}-1)} \left\{ \frac{(R+S\sqrt{-1})}{(P+Q\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} - \frac{(R-S\sqrt{-1})}{(P-Q\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
 & - hb\sqrt{-1} \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t}-1)} \left\{ \frac{(R'+S'\sqrt{-1})}{(P'+Q'\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} - \frac{(R'-S'\sqrt{-1})}{(P'-Q'\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} \right\}.
 \end{aligned}$$

En appliquant ici les deux formules

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x dx}{(A+Bx+Cx^2)^{\frac{3}{2}}} &= -\frac{2(2A+Bx)}{(4AC-B^2)\sqrt{A+Bx+Cx^2}}; \\
 \int \frac{x^2 dx}{(A+Bx+Cx^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2AB-(4AC-2B^2)x}{C(4AC-B^2)\sqrt{A+Bx+Cx^2}} \\
 &+ \frac{1}{C} \int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}};
 \end{aligned}$$

l'on obtient, après les réductions qui se présentent;

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{b^2+2b(1-\mu)t+2(1-\mu)t^2}} + \int_0^1 \frac{2tdt\{b\mu-(1-\mu)t\}}{\{b^2+2b(1-\mu)t+2(1-\mu)t^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{1}{1-\mu} - \frac{b}{1-\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+2(1+b)(1-\mu)}}.
 \end{aligned}$$

Donc en substituant ces valeurs, et observant que l'on a

$$R = b^2 ; \quad R' = b(2+b) ,$$

$$S = 2b(1+b)t ; \quad S' = 2b(1+b)t ,$$

l'on aura

$$(142) \dots y = \frac{1}{2}h + \frac{hb}{(1+b)(1-\mu)} - \frac{hb^2\left(1 + \frac{1}{2}b\right)}{\{b^2 + 2(1+b)(1-\mu)\}^{\frac{3}{2}}} \\ - \frac{hb^2}{(1+b)(1-\mu)\sqrt{b^2 + 2(1+b)(1-\mu)}} \\ + hb^2 \int_0^\infty \frac{\Pi dt}{e^{2\pi t} - 1} + hb^2 \int_0^\infty \frac{\Pi' dt}{e^{2\pi t} - 1} ;$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$\Pi = \sqrt{-1} \left\{ \frac{[b + 2(1+b)t\sqrt{-1}]}{(P + Q\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} - \frac{[b - 2(1+b)t\sqrt{-1}]}{(P - Q\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} \right\} ; \\ \Pi' = -\sqrt{-1} \left\{ \frac{[b + 2 + 2(1+b)t\sqrt{-1}]}{(P' + Q'\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} - \frac{[b + 2 - 2(1+b)t\sqrt{-1}]}{(P' - Q'\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}} \right\} .$$

Cette valeur de y peut être écrite ainsi ;

$$(143) \dots y = \frac{h}{2} - \frac{hb}{2(1+b)} \bar{U}^{(v)} + \frac{2hb}{\sqrt{b^2 + 2(1+b)(1-\mu)} \{b + \sqrt{b^2 + 2(1+b)(1-\mu)}\}} \\ + hb^2 \int_0^\infty \frac{dt(\Pi + \Pi')}{e^{2\pi t} - 1} ;$$

où $\bar{U}^{(v)} = U^2 \frac{(1+b)}{b^3} (2+b)b$, comme dans le § précédent.

Relativement au quatrième terme, il faut observer, qu'en faisant $\mu = 1$ l'on a

$$P = b^2 ; \quad Q = 0 ; \quad P' = b^2 ; \quad Q' = 0 ;$$

et par conséquent ;

$$\Pi = \sqrt{-1} \left\{ \frac{[b + 2(1+b)t\sqrt{-1}]}{b\sqrt{b}} - \frac{[b - 2(1+b)t\sqrt{-1}]}{b\sqrt{b}} \right\} ;$$

$$\Pi' = -\sqrt{-1} \left\{ \frac{[b + 2 + 2(1+b)t\sqrt{-1}]}{b\sqrt{b}} - \frac{[b + 2 - 2(1+b)t\sqrt{-1}]}{b\sqrt{b}} \right\} ;$$

$$\Pi + \Pi' = \sqrt{-1} \{ 4(1+b)t\sqrt{-1} - 4(1+b)t\sqrt{-1} \} = 0 .$$

De sorte que cette expression finie de l'épaisseur de la couche électrique a la propriété de devenir nulle au point de contact. Et comme la partie algébrique est précisément la même que celle que l'on voit dans le second membre de l'équation (127), il faut en conclure que la série ordonnée suivant les nombres *Bernoulliens* A' , B' , C' etc. représente le développement de l'intégrale définie

$$hb^2 \int_0^\infty \frac{dt(\Pi + \Pi')}{e^{2\pi t} - 1} ;$$

ce qui est un fait tout-à-fait digne d'être remarqué.

Maintenant, pour faire disparaître les quantités imaginaires, je fais

$$P = U \cos \varphi ; \quad Q = U \sin \varphi ;$$

$$P' = U' \cos \varphi' ; \quad Q' = U' \sin \varphi' ;$$

$$b = T \cos \psi ; \quad 2(1+b)t = T \sin \psi ;$$

$$b + 2 = T' \cos \psi' ; \quad 2(1+b)t = T' \sin \psi' ;$$

ce qui donne

$$\Pi = \frac{2T \sin\left(\frac{3}{2}\varphi - \psi\right)}{U^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{U^{\frac{3}{2}}} \left\{ b \sin \frac{3}{2}\varphi - 2t(1+b) \cos \frac{3}{2}\varphi \right\} ;$$

$$\Pi' = -\frac{2T' \sin\left(\frac{3}{2}\varphi' - \psi'\right)}{U'^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{U'^{\frac{3}{2}}} \left\{ (b+2) \sin \frac{3}{2}\varphi' - 2t(1+b) \cos \frac{3}{2}\varphi' \right\} .$$

En appliquant à ces fonctions les formules

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{P}{U} ;$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{U}} ;$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{U}} ;$$

$$\sin \frac{3}{2} \varphi = \sin \frac{1}{2} \varphi \left(4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1 \right) = \frac{Q}{V^2} \cdot \frac{(2P+U)}{U^{\frac{3}{2}} \sqrt{U+P}} ;$$

$$\cos \frac{3}{2} \varphi = \cos \frac{1}{2} \varphi \left(4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 3 \right) = \frac{Q}{V^2} \cdot \frac{(2P-U)}{U^{\frac{3}{2}} \sqrt{U-P}} ;$$

l'on trouvera ,

$$II = \frac{2V_2 \cdot PQ}{U^3} \left\{ \frac{b}{\sqrt{U+P}} - \frac{2t(1+b)}{\sqrt{U-P}} \right\} + \frac{QV_2}{U^2} \left\{ \frac{b}{\sqrt{U+P}} + \frac{2t(1+b)}{\sqrt{U-P}} \right\} ;$$

$$II' = -\frac{2V_2 \cdot P'Q'}{U'^3} \left\{ \frac{b+2}{\sqrt{U'+P'}} - \frac{2t(1+b)}{\sqrt{U'-P'}} \right\} - \frac{Q'V_2}{U'^2} \left\{ \frac{b+2}{\sqrt{U'+P'}} + \frac{2t(1+b)}{\sqrt{U'-P'}} \right\} .$$

Pour réduire ultérieurement ces formules, j'observe que l'on a

$$P = b^2 - 4(1+b)^2 t^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta ;$$

$$Q = 4b(1+b)t \sin^2 \frac{1}{2} \theta ;$$

$$P' = b^2 + 4(1+b) \left\{ 1 - (1+b)t^2 \right\} \sin^2 \frac{1}{2} \theta ;$$

$$Q' = 4(1+b)(2+b)t \sin^2 \frac{1}{2} \theta ;$$

d'où l'on tire

$$P^2 + Q^2 = U^2 = b^4 - 8b^2(1+b)^2 t^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \cdot \cos \theta + 16(1+b)^4 t^4 \sin^4 \frac{1}{2} \theta .$$

Donc, en faisant ,

$$A = \frac{b^2}{4(1+b)^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \theta} ; \quad R = \sqrt{t^4 - 2At^2 \cdot \cos \theta + A^2} ;$$

$$T = \sqrt{R - t^2 + A} ; \quad T' = \sqrt{R + t^2 - A} ;$$

nous aurons ; $U = \frac{b^2 R}{A} ;$

$$P = b^2 - \frac{b^2 t^2}{A} ; \quad Q = \frac{b^3 t}{(1+b)A} ; \quad PQ = \frac{b^5 t(A - t^2)}{(1+b)A^2} ;$$

$$\frac{PQ}{\sqrt{U+P}} = \frac{b^4 t(A - t^2)}{(1+b)A^{\frac{3}{2}}T} ; \quad \frac{PQ}{\sqrt{U-P}} = \frac{b^4 t(A - t^2)}{(1+b)A^{\frac{3}{2}}T'} ;$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{2\sqrt{2} \cdot A^{\frac{3}{2}} t(A - t^2)}{b^2(1+b)R^3} \left\{ \frac{b}{T} - \frac{2t(1+b)}{T'} \right\} \\ & + \frac{\sqrt{2} \cdot A^{\frac{3}{2}} t}{b^2(1+b)R^3} \left\{ \frac{b}{T} + \frac{2t(1+b)}{T'} \right\} . \end{aligned}$$

Pour exprimer d'une manière analogue la valeur de Π' , remarquons que l'on a ;

$$P' = b' + \frac{b^2}{A(1+b)} - \frac{b^2 t^2}{A} ; \quad Q' = \frac{(2+b)b^2 t}{(1+b)A} .$$

Donc en posant

$$B = (2+b) + (2+b)(1+b)A ; \quad C = (2+b)(1+b) ,$$

nous aurons

$$P'Q' = \frac{b^4 t \cdot (B - Ct^2)}{(1+b)^2 A^2} ;$$

et en faisant

$$A' = A - \frac{1}{1+b} + \frac{b^2}{2(1+b)^2} ;$$

$$B' = A + \frac{1}{1+b} ;$$

$$R' = \sqrt{t^4 - 2A't^2 + B'^2} ;$$

il viendra

$$U' = \sqrt{P'^2 + Q'^2} = \frac{b^3 R'}{A}.$$

Il suit de là que si l'on fait

$$T'' = \sqrt{(R' - t^2)(1+b) + 1 + A(1+b)};$$

$$T''' = \sqrt{(R' + t^2)(1+b) - 1 - A(1+b)};$$

l'on aura

$$\frac{P'Q'}{\sqrt{U'+P'}} = \frac{b^3 t(B - Ct^2)}{(1+b)^{\frac{3}{2}} A^{\frac{3}{2}} T''}; \quad \frac{P'Q'}{\sqrt{U'-P'}} = \frac{b^3 t(B - Ct^2)}{(1+b)^{\frac{3}{2}} A^{\frac{3}{2}} T''};$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \Pi' = & -\frac{2\sqrt{2}A^{\frac{3}{2}}t(B - Ct^2)}{b^3(1+b)^{\frac{3}{2}}R'^3} \left\{ \frac{b+2}{T''} - \frac{2t(1+b)}{T'''} \right\} \\ & - \frac{\sqrt{2}A^{\frac{3}{2}}t(2+b)}{b^3\sqrt{1+b}R'^3} \left\{ \frac{b+2}{T'''} + \frac{2t(1+b)}{T''} \right\}. \end{aligned}$$

De sorte que nous avons;

$$\begin{aligned} (144) \dots h b^3 \int_0^\infty \frac{dt(\Pi + \Pi')}{e^{2\pi t} - 1} = \\ \frac{h\sqrt{2}A^{\frac{3}{2}}}{1+b} \int_0^\infty \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} \left\{ \frac{2(A - t^2)}{R'^3} \left[\frac{b}{T'} - \frac{2t(1+b)}{T''} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{R'^3} \left[\frac{b}{T'} + \frac{2t(1+b)}{T''} \right] \right\} \\ - \frac{h\sqrt{2}A^{\frac{3}{2}}}{b(1+b)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} \left\{ \frac{2(B - Ct^2)}{R'^3} \left[\frac{b+2}{T'''} - \frac{2t(1+b)}{T''} \right] \right. \\ \left. + \frac{(1+b)(2+b)}{R'^3} \left[\frac{b+2}{T'''} + \frac{2t(1+b)}{T''} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant exposer la transformation qui peut faciliter le calcul de ces deux intégrales. Soit

$$R = \sqrt{t^2 - 2At \cos \theta + A^2} = t + Au :$$

les limites de la nouvelle variable u , correspondantes à $t=0$ et $t=\infty$, seront $u=1$, $u=-\cos \theta$. Il suit de là que, en posant

$$Y = u^2 + 2u \cos \theta + 1 ,$$

nous aurons

$$t = \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1-u^2}{u+\cos \theta} \right) ; \quad dt = -\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(u+\cos \theta)^{-\frac{1}{2}} \cdot Y du}{\sqrt{1-u^2}} ;$$

$$R = \frac{A}{2} \cdot \frac{Y}{u+\cos \theta} ; \quad T^2 = R - t^2 + A = A(1+u) ;$$

$$T^3 = R^2 + t^2 - A = \frac{A(1-\cos \theta) \cdot (1-u)}{u+\cos \theta} .$$

Il suit de là que l'on a

$$\frac{dt}{T^3 R^3} = -\frac{2\sqrt{2}}{A^3} \cdot \frac{(u+\cos \theta)^{\frac{3}{2}} du}{Y^2(1+u)\sqrt{1-u}} ;$$

$$\frac{t dt}{T^3 R^3} = -\frac{2}{A^3 \sqrt{1-\cos \theta}} \cdot \frac{(u+\cos \theta)^{\frac{3}{2}} du}{Y^2 \sqrt{1-u}} ;$$

$$\frac{t^2 dt}{T^3 R^3} = -\frac{\sqrt{2}}{A^3} \cdot \frac{\sqrt{1-u} \cdot (u+\cos \theta)^{\frac{1}{2}} du}{Y^2} ;$$

$$\frac{t^3 dt}{T^3 R^3} = -\frac{(1+u)\sqrt{1-u} \cdot (u+\cos \theta)^{\frac{1}{2}} du}{A^3 \sqrt{1-\cos \theta} \cdot Y^2} ;$$

$$\frac{dt}{T^2 R^2} = -\frac{\sqrt{2}}{A^2} \cdot \frac{(u+\cos \theta)^{\frac{1}{2}} du}{Y(1+u)\sqrt{1-u}} ;$$

$$\frac{t dt}{T^2 R^2} = -\frac{(u+\cos \theta)^{\frac{1}{2}} du}{A^2 \sqrt{1-\cos \theta} \cdot Y \cdot \sqrt{1-u}} .$$

Maintenant si l'on fait

$$E = \frac{2\pi t}{e^{2\pi t} - 1} ,$$

l'on pourra regarder E comme une fonction de u , et l'on aura entre les limites $u = 1$; $u = -\cos \theta$;

$$\begin{aligned}
 (145) \dots h b^3 \int_0^\infty \frac{dt \cdot \Pi}{e^{2\pi t} - 1} = \\
 - \frac{4h}{\pi(1+b)} \cdot \int E \cdot \left\{ \frac{b}{(1+u)\sqrt{A}} - \frac{(1+b)}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right\} \frac{(u + \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \cdot du}{Y^2 \sqrt{1-u}} \\
 + \frac{2h}{\pi(1+b)} \cdot \int E \cdot \left\{ b\sqrt{A} - \frac{(1+b)A}{\sin \frac{1}{2}\theta} (1+u) \right\} \frac{(u + \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-u} \cdot du}{Y^2} \\
 - \frac{h}{\pi(1+b)} \cdot \int E \cdot \left\{ \frac{b}{(1+u)\sqrt{A}} + \frac{1+b}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right\} \frac{(u + \cos \theta)^{\frac{1}{2}} du}{Y \sqrt{1-u}} .
 \end{aligned}$$

Pour transformer de la même manière la fonction Π' , nous ferons

$$R' = \sqrt{t^2 - 2A't^2 + B'^2} = t^2 + B'z .$$

Les limites de la variable z correspondantes à $t=0$ et $t=\infty$ seront $z=1$ et $z=-\frac{A'}{B'}$. Il suit de là que

$$t^2 = \frac{1}{2} B'^2 \cdot \frac{1-z^2}{B'z + A'} ; \quad t dt = -\frac{1}{4} B' \cdot \frac{dz (B'^2 z^2 + 2A'B'z + B'^2)}{(B'z + A')^2} ;$$

$$R' = \frac{B'^2 z^2 + 2A'B'z + B'^2}{2(B'z + A')} ;$$

$$T''' = 1 + (1+b)(A+B'z) = B'(1+b)(1+z) .$$

Relativement à T''' l'on obtient d'abord

$$T''' = \frac{(1+b)B'^2 - A A'(1+b) - A' + B'z \{ A'(1+b) - A(1+b) - 1 \}}{B'z + A'} .$$

Mais en faisant

$$H = (1+b)(B' - A') = \frac{4(1+b) - b^2}{2(1+b)},$$

l'on a

$$(1+b)B'^2 - AA'(1+b) - A' = (1+b)B'(B' - A') = HB';$$

$$A'(1+b) - A(1+b) - 1 = -(1+b)(B' - A') = -H;$$

partant

$$T''' = \frac{HB'(1-z)}{B'z + A'} = \frac{H(1-z)}{z + \frac{A'}{B'}}.$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que l'on a

$$\frac{A'}{B'} = \frac{1 + A(1+b) - \left[2 - \frac{b^2}{2(1+b)}\right]}{1 + A(1+b)};$$

et en substituant pour A sa valeur, il viendra

$$\frac{A'}{B'} = 1 - \frac{\left\{4(1+b) - b^2\right\} 2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta}{b^2 + 4(1+b) \sin^2 \frac{1}{2} \theta}.$$

Donc, en supposant que b soit le rayon de la plus petite des deux sphères, l'on pourra toujours établir l'équation

$$(146) \dots \sin \frac{1}{2} \varpi = \frac{\sqrt{4(1+b) - b^2} \sin \frac{1}{2} \theta}{\sqrt{b^2 + 4(1+b) \sin^2 \frac{1}{2} \theta}};$$

ce qui donnera

$$(147) \dots \frac{A'}{B'} = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varpi = \cos \varpi;$$

$$(148) \dots \cos \frac{1}{2} \varpi = \frac{b \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \frac{1}{2} \theta}}{\sqrt{b^2 + 4(1+b) \sin^2 \frac{1}{2} \theta}};$$

$$(149) \dots \tan \frac{1}{4} \varpi = \frac{\sqrt{4(1+b) - b^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta}}{\sqrt{b^2 + 4(1+b) \sin^2 \frac{1}{2} \theta + b} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{1}{2} \theta}}.$$

Pour faciliter le calcul numérique de l'angle ϖ , l'on fera

$$\cos \varepsilon = \frac{b}{2\sqrt{1+b}}, \quad \tan \beta = \frac{\cos \varepsilon}{\sin \frac{1}{2} \theta},$$

ce qui donnera

$$(150) \dots \sin \frac{1}{2} \varpi = \sin \varepsilon \cos \beta.$$

Maintenant si l'on fait

$$Y' = z^2 + 2z \cos \varpi + 1,$$

l'on aura

$$\rho = \frac{B'}{2} \cdot \frac{(1-z^2)}{z + \cos \varpi}; \quad R' = \frac{B'}{2} \cdot \frac{Y'}{z + \cos \varpi};$$

$$dt = - \frac{\sqrt{B'}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(z + \cos \varpi)^{-\frac{3}{2}} Y' dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

$$T''' = B'(1+b)(1+z); \quad T''' = \frac{H(1-z)}{z + \cos \varpi};$$

d'où l'on tire;

$$\frac{dt}{T''' R^{\frac{1}{3}}} = - \frac{2\sqrt{2}}{B'^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+b}} \cdot \frac{(z + \cos \varpi)^{\frac{3}{2}} dz}{Y'^2 (1+z) \sqrt{1-z^2}};$$

$$\frac{t dt}{T''' R^{\frac{1}{3}}} = - \frac{dz (z + \cos \varpi)^{\frac{3}{2}}}{2 B'^{\frac{1}{3}} \sqrt{H} \cdot Y'^2 \sqrt{1-z^2}};$$

$$\frac{t^2 dt}{T''' R^{\frac{1}{3}}} = - \frac{\sqrt{2}}{B'^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+b}} \cdot \frac{dz \cdot \sqrt{1-z^2} (z + \cos \varpi)^{\frac{5}{2}}}{Y'^2};$$

$$\frac{t^3 dt}{T''' R^{\frac{1}{3}}} = - \frac{(1+z) \sqrt{1-z^2} (z + \cos \varpi)^{\frac{7}{2}} dz}{4 \sqrt{H} \cdot B' \cdot Y'^2};$$

$$\frac{dt}{T'' R'^2} = - \frac{V_2}{B'^2 \sqrt{1+b}} \cdot \frac{dz(z+\cos\varpi)^{\frac{1}{2}}}{Y'(1+z)\sqrt{1-z}} ;$$

$$\frac{t dt}{T''' R'^2} = - \frac{dz(z+\cos\varpi)^{\frac{1}{2}}}{4 B' \sqrt{H} \cdot Y' \sqrt{1-z}} .$$

Cela posé si l'on fait

$$E' = \frac{2\pi t}{e^{2\pi t} - 1} ,$$

l'on pourra regarder E' comme une fonction de z , et l'on aura, entre les limites $z=1$; $z=-\cos\varpi$;

$$(151) \dots h b^3 \int_0^\infty \frac{dt \cdot \Pi'}{e^{2\pi t} - 1} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{2hA^{\frac{3}{2}} \cdot C}{\pi b(1+b)B'} \int E' \left\{ \frac{2(b+2)}{B' \sqrt{1+b}(1+z)} - \frac{(1+b)}{V_2 H} \right\} \frac{(z+\cos\varpi)^{\frac{3}{2}} dz}{Y'^2 \sqrt{1-z}} \\ & - \frac{hA^{\frac{3}{2}} \cdot C}{\pi b(1+b)B'} \int E' \left\{ \frac{2(b+2)}{B' \sqrt{1+b}} - \frac{(1+b)(1+z)}{V_2 H} \right\} \frac{(z+\cos\varpi)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-z} \cdot dz}{Y'^2} \\ & + \frac{hA^{\frac{3}{2}} \cdot C}{2\pi b(1+b)B'} \int E' \left\{ \frac{2(b+2)}{B' \sqrt{1+b}(1+z)} + \frac{(1+b)}{V_2 H} \right\} \frac{(z+\cos\varpi)^{\frac{1}{2}} dz}{Y' \sqrt{1-z}} . \end{aligned}$$

L'équation (144) peut donc être remplacée par les équations (145) et (151) où l'impossibilité d'une intégration sous forme finie tient à la présence des facteurs désignés par E et E' . C'est ce qui deviendra plus manifeste, en faisant $u=1-2\cos.\frac{1}{2}\theta.v^2$ dans le second membre de l'équation (145), et $z=1-2\cos.\frac{1}{2}\varpi.w^2$ dans le second membre de l'équation (151). Alors l'on trouvera que, entre les limites

$$v=0, \quad v=\sqrt{\cos.\frac{1}{2}\theta},$$

l'on a l'équation

$$\begin{aligned} (152) \dots\dots h b^3 \int_0^\infty \frac{dt. \Pi}{e^{2\pi t} - 1} = \\ - \frac{4h}{\pi \sin.\theta} \cdot \int \frac{V\left(\cos.\frac{1}{2}\theta - v^2\right)^{\frac{5}{2}} dv}{\left(1 - \cos.\frac{1}{2}\theta \cdot v^2\right)\left(v^4 - 2 \cos.\frac{1}{2}\theta \cdot v^2 + 1\right)^2} \\ + \frac{2hb^2 \cot.\frac{1}{2}\theta}{\pi(1+b)^2 \sin^2.\theta} \cdot \int \frac{V\left(\cos.\frac{1}{2}\theta - v^2\right)^{\frac{3}{2}} v^3 dv}{\left(v^4 - 2 \cos.\frac{1}{2}\theta \cdot v^2 + 1\right)^2} \\ + \frac{2h}{\pi \sin.\theta} \cdot \int \frac{V\left(1 + \sin^2.\frac{1}{2}\theta - \cos.\frac{1}{2}\theta \cdot v^2\right)\left(\cos.\frac{1}{2}\theta - v^2\right)^{\frac{1}{2}} dv}{\left(1 - \cos.\frac{1}{2}\theta \cdot v^2\right)\left(v^4 - 2 \cos.\frac{1}{2}\theta \cdot v^2 + 1\right)}; \end{aligned}$$

où, V , désigne ce que devient la fonction E , après y avoir fait

$$(153) \dots\dots 2\pi t = \frac{\pi b}{(1+b) \sin.\frac{1}{2}\theta} v \cdot \sqrt{\frac{1 - v^2 \cos.\frac{1}{2}\theta}{\cos.\frac{1}{2}\theta - v^2}};$$

et que, entre les limites

$$w=0, \quad w=\sqrt{\cos.\frac{1}{2}\varpi},$$

l'on a l'équation

$$\begin{aligned}
 (154) \dots h b^2 \int_0^\infty \frac{dt \cdot \Pi'}{e^{2\pi t} - 1} = \\
 - \frac{hG}{2\pi} \cdot \int \frac{W \left\{ (\alpha + \alpha' w^2) \cos. \frac{1}{2} \varpi - \alpha' \right\} \left(\cos. \frac{1}{2} \varpi - w^2 \right)^{\frac{3}{2}} dw}{\left(1 - \cos. \frac{1}{2} \varpi \cdot w^2 \right) \left(w^4 - 2 \cos. \frac{1}{2} \varpi \cdot w^2 + 1 \right)^2} \\
 + \frac{hG}{2\pi} \cdot \int \frac{W \left\{ (\alpha + \alpha' w^2) \cos. \frac{1}{2} \varpi - \alpha' \right\} \left(\cos. \frac{1}{2} \varpi - w^2 \right)^{\frac{1}{2}} w^2 dw}{\left(w^4 - 2 \cos. \frac{1}{2} \varpi \cdot w^2 + 1 \right)^2} \\
 - \frac{hG \cos. \frac{1}{2} \varpi}{4\pi} \cdot \int \frac{W \left\{ (\alpha - \alpha' w^2) \cos. \frac{1}{2} \varpi + \alpha' \right\} \left(\cos. \frac{1}{2} \varpi - w^2 \right)^{\frac{1}{2}} dw}{\left(1 - \cos. \frac{1}{2} \varpi \cdot w^2 \right) \left(w^4 - 2 \cos. \frac{1}{2} \varpi \cdot w^2 + 1 \right)} ;
 \end{aligned}$$

où W désigne ce que devient la fonction E' , après y avoir fait

$$(155) \dots 2\pi t = \frac{\pi b \cdot \sqrt{1 + \sin^2. \frac{1}{2} \theta}}{(1+b) \sin. \frac{1}{2} \theta \cdot \cos. \frac{1}{2} \varpi} w \cdot \sqrt{\frac{1 - w^2 \cos. \frac{1}{2} \varpi}{\cos. \frac{1}{2} \varpi - w^2}} ;$$

et ,

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{(2+b) \sqrt{1+b}}{b \left(1 + \sin^2. \frac{1}{2} \theta \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{4(1+b) - b^2}} ; \\
 \alpha &= 4(b+2) \sin. \frac{1}{2} \varpi ; \quad \alpha' = \frac{b \cdot \sqrt{1 + \sin^2. \frac{1}{2} \theta}}{\sin. \frac{1}{2} \theta} .
 \end{aligned}$$

En remplaçant maintenant l'équation (144) par les équations (152) et (154), l'on aura l'expression de l'épaisseur de la couche électrique sous une forme assez simple pour pouvoir y appliquer avec facilité les formules propres à l'évaluation des intégrales par les quadratures.

§ XVI.

Nous avons trouvé dans le § XIV, par des procédés tout-à-fait distincts, trois séries différentes pour exprimer l'épaisseur de la couche électrique qui recouvre la surface des deux sphères. Chacune de ces séries a des propriétés particulières qui déterminent le choix que l'on doit faire, lorsqu'il s'agit de calculer cette épaisseur relativement à un point donné. Mais la série (121), considérée sous un point de vue purement analytique, met en évidence une propriété remarquable de la fonction de μ désignée par γ . Elle consiste en cela, que, en regardant γ comme une fonction du binôme $1-\mu$, il doit être impossible de la développer suivant les puissances entières et positives de ce même binôme, puisque nous la voyons effectivement développée par les puissances négatives et fractionnaires de $1-\mu$. Ainsi, quelles que soient les transformations que l'on pourrait faire subir à la fonction γ , l'on tombera, en dernière analyse, sur un résultat complètement illusoire, si l'on entreprend de la développer par une série de la forme

$$\gamma = M(1-\mu) + M'(1-\mu)^2 + M''(1-\mu)^3 + \text{etc.}$$

C'est ce qui arriverait, par exemple, si l'on voulait appliquer cette idée à la série (131), dont chaque terme est de la forme

$$\left\{ \alpha + \beta(1-\mu) \right\}^{-\frac{3}{2}}.$$

Poisson, qui ignorait l'existence de la propriété que je viens de définir ainsi que celle des deux séries (121) et (127), a supposé tacitement la possibilité d'un tel développement; ce qui l'a entraîné à la fausse conséquence que j'ai signalée dans le préambule de ce Mémoire. Mais je dois exposer ici les principaux points du calcul qui démontrent d'une manière incontestable que l'on tombe sur des expressions des coefficients M , M' , M'' etc. telles que, après les réductions, l'on a

$$M=0, \quad M'=0, \quad M''=0; \quad \text{indéfiniment.}$$

Pour cela je reprends l'équation (130) et je remarque qu'un terme quelconque X de $f(x)$ étant de la forme

$$X = \frac{1}{p - qx},$$

il introduit dans $\varphi(\mu, x)$ un terme qui peut être écrit ainsi ;

$$R_n = X \left\{ 1 + 2pqx(1 - \mu)X^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

En développant ce binôme nous aurons

$$\begin{aligned} R_n = X - pq \cdot x(1 - \mu)X^3 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} p^2 q^2 x^2 (1 - \mu)^2 X^5 \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^3 q^3 x^3 (1 - \mu)^3 X^7 + \text{etc.} \end{aligned}$$

En prenant les coefficients différentiels de X par rapport à x l'on obtient ;

$$\frac{dX}{dx} = qX^2 ; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = 2q^2 X^3 ; \quad \frac{d^3 X}{dx^3} = 2 \cdot 3 \cdot q^3 X^4 ;$$

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot q^4 X^5 ; \quad \frac{d^5 X}{dx^5} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot q^5 X^6 ; \quad \text{etc.}$$

et comme l'équation $p - qx = \frac{1}{X}$, donne

$$\frac{p}{q} = x + \frac{1}{qX} = x + \frac{X'}{X^2},$$

en posant $X' = \frac{dX}{dx}$, il est clair que l'on a

$$p^m q^m X^{2m+1} = \left(x + \frac{X'}{X^2} \right)^m q^{2m} X^{2m+1} ;$$

mais nous avons

$$\frac{d^{2m} X}{dx^{2m}} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots 2m \cdot q^{2m} X^{2m+1},$$

partant ,

$$p^m q^m X^{2m+1} = \frac{\left(x + \frac{X'}{X^2} \right)^m \cdot \frac{d^{2m} X}{dx^{2m}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m}.$$

Il suit de là que le terme général de R_n sera

$$\frac{1.3.5.7 \dots 2m-1}{(1.2.3 \dots m)(1.2.3 \dots 2m)} (1-\mu)^m x^m \left(x + \frac{X}{X'}\right)^m \cdot \frac{d^{2m} X}{dx^{2m}}$$

$$= \frac{(1-\mu)^m}{2^m (1.2.3 \dots m)^2} x^m \left(x + \frac{X}{X'}\right)^m \cdot \frac{d^{2m} X}{dx^{2m}}.$$

En développant le binôme, un terme quelconque du produit

$$\left(x + \frac{X}{X'}\right)^m \cdot \frac{d^{2m} X}{dx^{2m}}$$

sera exprimé par

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-i+1)}{1.2.3 \dots i} x^{m-i} \left(\frac{X}{X'}\right)^i \cdot \frac{d^{2m} X}{dx^{2m}}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-i+1)}{1.2.3 \dots i} (1.2.3 \dots 2m) \cdot q^{2m-i} \cdot X^{2m-i+1} \cdot x^{m-i},$$

ou bien par

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-i+1)}{1.2.3 \dots i} \cdot \frac{(1.2.3 \dots 2m)}{1.2.3 \dots 2m-i} x^{m-i} \cdot \frac{d^{2m-i} X}{dx^{2m-i}}$$

$$= \frac{2m(2m-1)(2m-2) \dots (2m-i+1)}{1.2.3 \dots i} \cdot \frac{d^{2m-i} X}{dx^{2m-i}} \cdot \frac{d^i x^m}{dx^i},$$

en observant que l'on a la formule générale

$$\frac{d^\lambda X}{dx^\lambda} = 1.2.3 \dots \lambda \cdot q^\lambda \cdot X^{\lambda+1}.$$

Il suit de là que, pour avoir la totalité des termes donnés par le produit

$$\left(x + \frac{X}{X'}\right)^m \cdot \frac{d^{2m} X}{dx^{2m}},$$

il faudra faire $i=0, 1, 2, 3 \dots m$ dans la formule précédente, et prendre ensuite leur somme. Or, en appliquant ici l'équation symbolique

$$\frac{d^n (uv)}{dx^n} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)^n,$$

L'on reconnaîtra immédiatement, que cette somme est égale à

$$\frac{d^{2m}(x^m X)}{dx^{2m}}.$$

De sorte que nous avons cette série assez remarquable ;

$$(156) \dots R_n = X - \frac{x(1-\mu)}{2} \cdot \frac{d^2(xX)}{dx^2} + \frac{x^2(1-\mu)^2}{2^2(1.2)^2} \cdot \frac{d^4(x^2X)}{dx^4} \\ - \frac{x^3(1-\mu)^3}{2^3(1.2.3)^2} \cdot \frac{d^6(x^3X)}{dx^6} + \frac{x^4(1-\mu)^4}{2^4(1.2.3.4)^2} \cdot \frac{d^8(x^4X)}{dx^8} - \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on applique cette formule à tous les termes de la série que l'on voit dans le second membre de l'équation (130) l'on comprendra que, pour avoir la somme $bh \cdot \sum_0^\infty (R_n - R'_n)$ ainsi formée, il suffira de remplacer X par $f(x)$ dans l'équation précédente ; ce qui revient à dire que nous avons cette équation ; savoir

$$(157) \dots \varphi(\mu, x) = f(x) - \frac{x(1-\mu)}{2} \cdot \frac{d^2\{xf(x)\}}{dx^2} + \frac{x^2(1-\mu)^2}{2^2(1.2)^2} \cdot \frac{d^4\{x^2f(x)\}}{dx^4} \\ - \frac{x^3(1-\mu)^3}{2^3(1.2.3)^2} \cdot \frac{d^6\{x^3f(x)\}}{dx^6} + \text{etc.}$$

En différenciant cette équation par rapport à x et multipliant ensuite par $2x$, l'on obtient

$$2x \frac{d\varphi(\mu, x)}{dx} = 2x \frac{d f(x)}{dx} - \frac{2x(1-\mu)}{2} \left\{ \frac{d^2 \cdot x f(x)}{dx^2} + x \frac{d^3 \cdot x f(x)}{dx^3} \right\} \\ + \frac{2x^2(1-\mu)^2}{2^2(1.2)^2} \left\{ 2 \frac{d^4 \cdot x^2 f(x)}{dx^4} + x \frac{d^5 \cdot x^2 f(x)}{dx^5} \right\} \\ - \frac{2x^3(1-\mu)^3}{2^3(1.2.3)^2} \left\{ 3 \frac{d^6 \cdot x^3 f(x)}{dx^6} + x \frac{d^7 \cdot x^3 f(x)}{dx^7} \right\} \\ + \frac{2x^4(1-\mu)^4}{2^4(1.2.3.4)^2} \left\{ 4 \frac{d^8 \cdot x^4 f(x)}{dx^8} + x \frac{d^9 \cdot x^4 f(x)}{dx^9} \right\} \\ - \text{etc.}$$

Donc, l'épaisseur y de la couche électrique devant être déterminée par l'équation (29), l'on aura, en observant que $\frac{1-\mu}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} \theta$;

$$\begin{aligned}
 (158) \dots y = & f(x) + 2x \frac{d f(x)}{dx} - x \sin^2 \frac{1}{2} \theta \left\{ 3 \frac{d^2 x f(x)}{dx^2} + 2x \frac{d^3 x f(x)}{dx^3} \right\} \\
 & + \frac{x^3 \sin^4 \frac{1}{2} \theta}{(1.2)^2} \left\{ 5 \frac{d^4 x^3 f(x)}{dx^4} + 2x \frac{d^5 x^3 f(x)}{dx^5} \right\} \\
 & - \frac{x^3 \sin^6 \frac{1}{2} \theta}{(1.2.3)^2} \left\{ 7 \frac{d^6 x^3 f(x)}{dx^6} + 2x \frac{d^7 x^3 f(x)}{dx^7} \right\} \\
 & + \frac{x^4 \sin^8 \frac{1}{2} \theta}{(1.2.3.4)^2} \left\{ 9 \frac{d^8 x^4 f(x)}{dx^8} + 2x \frac{d^9 x^4 f(x)}{dx^9} \right\} \\
 & - \text{etc.} ;
 \end{aligned}$$

où l'on doit faire $x=1$ après avoir exécutées les différentiations indiquées. Cette circonstance offre le moyen de calculer les différens termes de cette série de la manière que je vais exposer.

D'après l'équation (38) trouvée dans le § IX, si l'on fait pour plus de simplicité $k = \frac{1}{1+b}$, nous avons, en général ;

$$x^m f(x) = \frac{hb}{1+b} \cdot \int_0^1 dt \cdot t^{-k} x^m \left\{ \frac{1-t^{k(1-x)}}{1-t^{1-x}} \right\} ;$$

et en remplaçant x^m par

$$\left\{ 1 - (1-x) \right\}^m = (1-u)^m ,$$

nous aurons

$$x^m f(x) = \frac{hb}{1+b} \cdot \int_0^1 dt \cdot t^{-k} (1-u)^m \left(\frac{1-t^{ku}}{1-t^u} \right) .$$

Supposons le second membre de cette équation développé suivant les

puissances entières et positives de u , et soit

$$x^m f(x) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 \dots + A_{2m} u^{2m} + A_{2m+1} u^{2m+1} + \text{etc.}$$

De là l'on tire, après avoir fait $x=1$, c'est-à-dire $u=0$;

$$\frac{d^{2m} \cdot x^m f(x)}{dx^{2m}} = (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m) A_{2m} ;$$

$$\frac{d^{2m+1} \cdot x^m f(x)}{dx^{2m+1}} = -(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m+1) A_{2m+1} ;$$

et par conséquent

$$(2m+1) \frac{d^{2m} \cdot x^m f(x)}{dx^{2m}} + 2 \frac{d^{2m+1} \cdot x^m f(x)}{dx^{2m+1}} = (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m+1) \{A_{2m} - 2A_{2m+1}\}.$$

Il a été démontré dans le § IX que l'on a $f(1) + 2f'(1) = 0$; donc l'équation (158) donne

$$\begin{aligned} (159) \dots \gamma = & -(1 \cdot 2 \cdot 3) \sin^2 \cdot \frac{1}{2} \theta \cdot (A_2' - 2A_3') \\ & + \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}{(1 \cdot 2)^2} \sin^4 \cdot \frac{1}{2} \theta (A_4'' - 2A_5'') \\ & - \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7)}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} \sin^6 \cdot \frac{1}{2} \theta (A_6''' - 2A_7''') \\ & + \text{etc.} ; \end{aligned}$$

où les coefficients A_2' , A_3' ; A_4'' , A_5'' ; A_6''' , A_7''' ; etc. répondent respectivement à $m=1$; 2 ; 3 ; etc.

Pour former ces coefficients, j'observe que, d'après le théorème de MACLAURIN, nous avons, en exécutant les différentiations indiquées et faisant ensuite $u=0$;

$$A_{2m} = \frac{hb}{(1+b)(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m)} \cdot \int_0^1 dt \cdot t^{-k} \cdot \frac{d^{2m}}{du^{2m}} \left\{ (1-u)^m \cdot \frac{(t^{ku}-1)}{t^u-1} \right\} ;$$

$$A_{2m+1} = \frac{hb}{(1+b)(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m+1)} \cdot \int_0^1 dt \cdot t^{-k} \cdot \frac{d^{2m+1}}{du^{2m+1}} \left\{ (1-u)^m \cdot \frac{(t^{ku}-1)}{t^u-1} \right\} .$$

Donc en posant, pour plus de simplicité ;

$$\rho = \frac{t^{ku} - 1}{k u \text{Log}.t} ; \quad q = \frac{u \text{Log}.t}{t^u - 1} ,$$

nous tirons de là l'équation

$$(1.2.3 \dots 2m+1)(A_{2m} - 2A_{2m+1}) = h b k^3 \left\{ \begin{aligned} & (2m+1) \int_0^1 dt. t^{-k} \cdot \frac{d^{2m}}{du^{2m}} \{ (1-u)^m p q \} \\ & - 2 \int_0^1 dt. t^{-k} \cdot \frac{d^{2m+1}}{du^{2m+1}} \{ (1-u)^m p q \} \end{aligned} \right\}.$$

De sorte que l'équation (159) est équivalente à celle-ci ;

$$\begin{aligned} (160) \dots \dots \frac{J}{h b k^2} = \\ - \sin^2 \frac{1}{2} \theta \left\{ 3 \int_0^1 dt. t^{-k} \cdot \frac{d^2}{du^2} [(1-u) p q] - 2 \int_0^1 dt. t^{-k} \cdot \frac{d^3}{du^3} [(1-u) p q] \right\} \\ + \frac{\sin^4 \frac{1}{2} \theta}{(1.2)^2} \left\{ 5 \int_0^1 dt. t^{-k} \cdot \frac{d^4}{du^4} [(1-u)^2 p q] - 2 \int_0^1 dt. t^{-k} \cdot \frac{d^5}{du^5} [(1-u)^2 p q] \right\} \\ - \frac{\sin^6 \frac{1}{2} \theta}{(1.2.3)^2} \left\{ 7 \int_0^1 dt. t^{-k} \cdot \frac{d^6}{du^6} [(1-u)^3 p q] - 2 \int_0^1 dt. t^{-k} \cdot \frac{d^7}{du^7} [(1-u)^3 p q] \right\} \\ + \text{etc.} \end{aligned}$$

Les deux fonctions de u désignées par p et q étant développées suivant les puissances de u , l'on a

$$p = 1 + \frac{u(k \text{Log}.t)}{2} + \frac{u^2(k \text{Log}.t)^2}{2.3} + \frac{u^3(k \text{Log}.t)^3}{2.3.4} + \text{etc.} ;$$

$$q = 1 - \frac{1}{2} u \text{Log}.t + u^2 A_{(2)} (\text{Log}.t)^2 + u^3 A_{(3)} (\text{Log}.t)^3 + \text{etc.} ;$$

où la loi des coefficients $A_{(2)}$, $A_{(4)}$, $A_{(6)}$ etc. est connue, et liée avec celle des nombres *Bernoulliens*, de manière qu'en désignant ces derniers par $B_{(1)}$, $B_{(3)}$, $B_{(5)}$, etc. l'on a

$$B_{(2i-1)} = (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2i) A_{(2i)} \quad (*)$$

Toutefois, il faudra se rappeler, que les nombres *Bernoulliens* doivent être pris avec le signe alternativement positif et négatif afin que cette équation soit vraie. De sorte que l'on a ;

$$\begin{aligned} B_{(1)} &= \frac{1}{6} ; & B_{(3)} &= -\frac{1}{30} ; & B_{(5)} &= \frac{1}{42} ; & B_{(7)} &= -\frac{1}{30} ; \\ B_{(9)} &= \frac{5}{66} ; & B_{(11)} &= -\frac{691}{2730} ; & B_{(13)} &= \frac{7}{6} ; & B_{(15)} &= -\frac{3617}{510} ; \text{ etc.} \end{aligned}$$

Maintenant, pour obtenir le terme général de la série (160), j'observe que, en développant le produit $p q$ suivant les puissances de u par le théorème de MACLAURIN, l'on a la série

$$\begin{aligned} p q + u \frac{d.p q}{du} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2.p q}{du^2} + \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3.p q}{du^3} + \dots \\ + M_{(i)} u^i \cdot \frac{d^i.p q}{du^i} + M_{(i+1)} u^{i+1} \cdot \frac{d^{i+1}.p q}{du^{i+1}} + \text{etc.} ; \end{aligned}$$

où les coefficients différentiels sont censés avoir les valeurs qu'ils acquièrent après avoir fait $u=0$. En développant le binôme $(1-u)^i$ sous la forme

$$(-1)^i \left\{ \begin{aligned} &u^i - i u^{i-1} + \frac{i(i-1)}{2} u^{i-2} - \frac{i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 3} u^{i-3} \\ &+ \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} u^{i-4} - \text{etc.} \end{aligned} \right\} ;$$

il est clair que les termes multipliés par u^{2i} et par u^{2i+1} qui entrent dans le produit de ces deux polynomes seront les suivans ; savoir

(*) Voyez sur ce point une Note que j'ai publiée dans le Tome XXV (ancienne Série) des Mémoires de l'Académie de Turin.

$$\begin{aligned}
 & (-1)^i u^{2i} \left\{ M_{(i)} \frac{d^i \cdot pq}{du^i} - i M_{(i+1)} \frac{d^{i+1} \cdot pq}{du^{i+1}} + \frac{i(i-1)}{2} M_{(i+2)} \frac{d^{i+2} \cdot pq}{du^{i+2}} \right. \\
 & \left. - \frac{i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 3} M_{(i+3)} \frac{d^{i+3} \cdot pq}{du^{i+3}} + \text{etc} \right\}; \\
 & (-1)^i u^{2i+1} \left\{ M_{(i+1)} \frac{d^{i+1} \cdot pq}{du^{i+1}} - i M_{(i+2)} \frac{d^{i+2} \cdot pq}{du^{i+2}} + \frac{i(i-1)}{2} M_{(i+3)} \frac{d^{i+3} \cdot pq}{du^{i+3}} \right. \\
 & \left. - \frac{i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 3} M_{(i+4)} \frac{d^{i+4} \cdot pq}{du^{i+4}} + \text{etc.} \right\}.
 \end{aligned}$$

Donc en désignant le premier de ces deux termes par $(-1)^i Q \cdot u^{2i}$, et le second par $(-1)^i u^{2i+1} \cdot Q'$, l'on a ;

$$\begin{aligned}
 & (-1)^i \left\{ (2i+1) Q \frac{d^{2i} \cdot u^{2i}}{du^{2i}} - 2 Q' \frac{d^{2i+1} \cdot u^{2i+1}}{du^{2i+1}} \right\} = \\
 & (-1)^i \cdot \left\{ \begin{aligned} & (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2i+1) M_{(i)} \frac{d^i \cdot pq}{du^i} - (i+2)(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2i+1) M_{(i+1)} \frac{d^{i+1} \cdot pq}{du^{i+1}} \\ & + \left\{ \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} + 2i \right\} (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2i+1) M_{(i+2)} \frac{d^{i+2} \cdot pq}{du^{i+2}} \\ & - \left\{ \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2i(i-1)}{1 \cdot 2} \right\} (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2i+1) M_{(i+3)} \frac{d^{i+3} \cdot pq}{du^{i+3}} \\ & + \left\{ \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\} (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2i+1) M_{(i+4)} \frac{d^{i+4} \cdot pq}{du^{i+4}} \\ & - \text{etc.} \end{aligned} \right\} \\
 & = (-1)^i \left\{ H \frac{d^i \cdot pq}{du^i} - H_{(1)} \frac{d^{i+1} \cdot pq}{du^{i+1}} + H_{(2)} \frac{d^{i+2} \cdot pq}{du^{i+2}} - H_{(3)} \frac{d^{i+3} \cdot pq}{du^{i+3}} + \text{etc.} \right\}.
 \end{aligned}$$

Si l'on observe maintenant que

$$M(\lambda) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda},$$

il deviendra manifeste que l'on peut mettre les coefficients désignés par H , $H_{(1)}$, $H_{(2)}$, etc. sous cette forme; savoir

$$H = (i+1)(i+2)(i+3) \dots (2i+1) ;$$

$$H_{(1)} = (i+2)(i+3) \dots (2i+1) ;$$

$$H_{(2)} = \left(\frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} + 2i \right) (i+3)(i+4) \dots (2i+1) ;$$

$$H_{(3)} = \left(\frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2i(i-1)}{1 \cdot 2} \right) (i+4)(i+5) \dots (2i+1) ;$$

$$H_{(4)} = \left(\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) (i+5)(i+6) \dots (2i+1) ;$$

$$H_{(5)} = \left(\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2i(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right) (i+6)(i+7) \dots (2i+1) ;$$

etc.

Le terme général de la série (160) peut donc être exprimé ainsi ;

$$(161) \dots + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \theta}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i)^2} \int_0^1 dt t^{-i} \left\{ H \frac{d^i \cdot pq}{d u^i} - H_{(1)} \frac{d^{i+1} \cdot pq}{d u^{i+1}} + H_{(2)} \frac{d^{i+2} \cdot pq}{d u^{i+2}} - \text{etc.} \right\}.$$

Pour avoir l'expression générale du coefficient différentiel $\frac{d^\lambda \cdot pq}{d u^\lambda}$, j'observe que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{d^\lambda \cdot pq}{d u^\lambda} &= q \frac{d^\lambda \cdot p}{d u^\lambda} + \lambda \frac{d q}{d u} \cdot \frac{d^{\lambda-1} \cdot p}{d u^{\lambda-1}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 q}{d u^2} \cdot \frac{d^{\lambda-2} \cdot p}{d u^{\lambda-2}} \\ &+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 q}{d u^3} \cdot \frac{d^{\lambda-3} \cdot p}{d u^{\lambda-3}} + \text{etc.} ; \end{aligned}$$

et comme les valeurs précédentes de p et q en séries donnent, après avoir fait $u=0$,

$$q = 1 ; \quad \frac{d q}{d u} = -\frac{1}{2} \text{Log. } t ;$$

$$\frac{d^2 q}{d u^2} = 1 \cdot 2 \cdot A_{(2)} \text{Log}^2 \cdot t = B_{(1)} \text{Log}^2 \cdot t ; \quad \frac{d^3 q}{d u^3} = 0 ;$$

$$\frac{d^4 q}{du^4} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot A_{(4)} \text{Log}^4 . t = B_{(3)} \text{Log}^4 . t ; \quad \frac{d^5 q}{du^5} = 0 ;$$

$$\frac{d^6 q}{du^6} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot A_{(6)} \text{Log}^6 . t = B_{(5)} \text{Log}^6 . t ; \quad \frac{d^7 q}{du^7} = 0 ;$$

etc. ;

$$p = 1 ;$$

$$\frac{dp}{du} = \frac{k}{2} \text{Log} . t ;$$

$$\frac{d^2 p}{du^2} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{k^2 \cdot \text{Log}^2 . t}{2 \cdot 3} = \frac{k^2 \cdot \text{Log}^2 . t}{3} ;$$

$$\frac{d^3 p}{du^3} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{k^3 \cdot \text{Log}^3 . t}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{k^3 \cdot \text{Log}^3 . t}{4} ;$$

etc. ;

il est clair que l'on a

$$\frac{d^\lambda . pq}{du^\lambda} = G_{(\lambda)} \cdot \text{Log}^\lambda . t .$$

Cela posé, à l'aide de la formule précédente, l'on trouve

$$G_{(1)} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} ;$$

$$G_{(2)} = \frac{k^2}{3} - \frac{1}{2} k + B_{(1)} ;$$

$$G_{(3)} = \frac{k^3}{4} - \frac{1}{2} k^2 + \frac{3 \cdot 2}{2} B_{(1)} \cdot \frac{k}{2} ;$$

$$G_{(4)} = \frac{k^4}{5} - \frac{1}{2} k^3 + \frac{4 \cdot 3}{2} B_{(1)} \cdot \frac{k^2}{3} + B_{(3)} ;$$

$$G_{(5)} = \frac{k^5}{6} - \frac{1}{2} k^4 + \frac{5 \cdot 4}{2} B_{(1)} \cdot \frac{k^3}{4} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_{(3)} \cdot \frac{k}{2} ;$$

$$G_{(6)} = \frac{k^6}{7} - \frac{1}{2}k^5 + \frac{6.5}{2}B_{(1)} \cdot \frac{k^4}{5} + \frac{6.5.4.3}{2.3.4}B_{(3)} \cdot \frac{k^3}{3} + B_{(5)} ;$$

$$G_{(7)} = \frac{k^7}{8} - \frac{1}{2}k^6 + \frac{7.6}{2}B_{(1)} \cdot \frac{k^5}{6} + \frac{7.6.5.4}{2.3.4}B_{(3)} \cdot \frac{k^3}{4} + 7B_{(5)} \cdot \frac{k}{2} ; \quad \text{etc. ;}$$

et en général ;

$$\begin{aligned} (162) \quad \dots \quad G_{(\lambda)} = & \frac{k^\lambda}{\lambda+1} - \frac{1}{2}k^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}B_{(1)} \cdot \frac{k^{\lambda-2}}{\lambda-1} \\ & + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2.3.4}B_{(3)} \cdot \frac{k^{\lambda-4}}{\lambda-3} \\ & + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)}{1.2.3.4.5.6}B_{(5)} \cdot \frac{k^{\lambda-6}}{\lambda-5} \\ & + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-7)}{1.2.3\dots 8}B_{(7)} \cdot \frac{k^{\lambda-8}}{\lambda-7} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Remarquons maintenant, que l'on a ;

$$\int_0^1 dt \cdot t^{-k} \text{Log} \cdot t = - \frac{1}{(1-k)^2} ;$$

$$\int_0^1 dt \cdot t^{-k} \text{Log}^n t = - \frac{n}{1-k} \cdot \int_0^1 dt \cdot t^{-k} \cdot \text{Log}^{n-1} t ;$$

et par conséquent

$$\int_0^1 dt \cdot t^{-k} \text{Log}^2 t = \frac{2}{(1-k)^3} ;$$

$$\int_0^1 dt \cdot t^{-k} \text{Log}^3 t = - \frac{2.3}{(1-k)^4} ;$$

.....

$$\int_0^1 dt \cdot t^{-k} \text{Log}^\lambda t = (-1)^\lambda \cdot \frac{1.2.3.4.5\dots\lambda}{(1-k)^{\lambda+1}} .$$

$$M_{(3)} = \frac{G_{(3)}}{k^3} + \frac{5}{b k^3} G_{(4)} + \frac{9}{b^2 k^3} G_{(5)} + \frac{7}{b^3 k^3} G_{(6)} + \frac{2}{b^4 k^3} G_{(7)} ;$$

$$M_{(4)} = \frac{G_{(4)}}{k^3} + \frac{6}{b k^3} G_{(5)} + \frac{14}{b^2 k^3} G_{(6)} + \frac{16}{b^3 k^3} G_{(7)} + \frac{9}{b^4 k^3} G_{(8)} + \frac{2}{b^5 k^3} G_{(9)} ;$$

$$M_{(5)} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{G_{(5)}}{k^3} + \frac{7}{b k^3} G_{(6)} + \frac{20}{b^2 k^3} G_{(7)} + \frac{30}{b^3 k^3} G_{(8)} + \frac{25}{b^4 k^3} G_{(9)} \\ & + \frac{11}{b^5 k^3} G_{(10)} + \frac{2}{b^6 k^3} G_{(11)} \end{aligned} \right\} ;$$

$$M_{(6)} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{G_{(6)}}{k^3} + \frac{8}{b k^3} G_{(7)} + \frac{27}{b^2 k^3} G_{(8)} + \frac{50}{b^3 k^3} G_{(9)} + \frac{55}{b^4 k^3} G_{(10)} + \frac{36}{b^5 k^3} G_{(11)} \\ & + \frac{13}{b^6 k^3} G_{(12)} + \frac{2}{b^7 k^3} G_{(13)} \end{aligned} \right\} ;$$

$$M_{(7)} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{G_{(7)}}{k^3} + \frac{9}{b k^3} G_{(8)} + \frac{35}{b^2 k^3} G_{(9)} + \frac{77}{b^3 k^3} G_{(10)} + \frac{105}{b^4 k^3} G_{(11)} + \frac{91}{b^5 k^3} G_{(12)} \\ & + \frac{49}{b^6 k^3} G_{(13)} + \frac{15}{b^7 k^3} G_{(14)} + \frac{2}{b^8 k^3} G_{(15)} \end{aligned} \right\} ;$$

etc.

Le calcul de ces coefficients est assez pénible. Comme il offre des réductions remarquables, je vais l'exposer ici en détail. D'après la formule (162) l'on a d'abord;

$$G_{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} ;$$

$$\frac{G_{(2)}}{k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(1+b) ;$$

$$\frac{G_{(3)}}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1+b) ;$$

$$\frac{G_{(4)}}{k^3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1+b) - \frac{1}{30}(1+b)^3 ;$$

$$\frac{G_{(5)}}{k^4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{5}{12}(1+b) - \frac{1}{12}(1+b)^3 ;$$

$$\frac{G_{(6)}}{k^5} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+b) - \frac{1}{6}(1+b)^3 + \frac{1}{42}(1+b)^5 ;$$

$$\frac{G_{(7)}}{k^6} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12}(1+b) - \frac{7}{24}(1+b)^3 + \frac{1}{12}(1+b)^5 ;$$

$$\frac{G_{(8)}}{k^7} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(1+b) - \frac{7}{15}(1+b)^3 + \frac{2}{9}(1+b)^5 - \frac{1}{30}(1+b)^7 ;$$

$$\frac{G_{(9)}}{k^8} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(1+b) - \frac{7}{10}(1+b)^3 + \frac{1}{2}(1+b)^5 - \frac{3}{20}(1+b)^7 ;$$

$$\frac{G_{(10)}}{k^9} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}(1+b) - (1+b)^3 + (1+b)^5 \\ & - \frac{1}{2}(1+b)^7 + \frac{5}{66}(1+b)^9 \end{aligned} \right\} ;$$

$$\frac{G_{(11)}}{k^{10}} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{11}{12}(1+b) - \frac{11}{8}(1+b)^3 + \frac{11}{6}(1+b)^5 \\ & - \frac{11}{8}(1+b)^7 + \frac{5}{12}(1+b)^9 \end{aligned} \right\} ;$$

$$\frac{G_{(12)}}{k^{11}} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + (1+b) - \frac{11}{6}(1+b)^3 + \frac{22}{7}(1+b)^5 - \frac{33}{10}(1+b)^7 \\ & + \frac{5}{3}(1+b)^9 - \frac{691}{2730}(1+b)^{11} \end{aligned} \right\} ;$$

$$\frac{G_{(13)}}{k^{12}} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{13}{12}(1+b) - \frac{143}{60}(1+b)^3 + \frac{143}{28}(1+b)^5 \\ & - \frac{143}{20}(1+b)^7 + \frac{65}{12}(1+b)^9 - \frac{691}{420}(1+b)^{11} \end{aligned} \right\} ;$$

$$\frac{G_{(14)}}{k^{13}} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{7}{6}(1+b) - \frac{91}{30}(1+b)^3 + \frac{143}{18}(1+b)^5 \\ & - \frac{143}{10}(1+b)^7 + \frac{91}{6}(1+b)^9 - \frac{961}{90}(1+b)^{11} + \frac{7}{6}(1+b)^{13} \end{aligned} \right\} ;$$

$$\frac{G_{(15)}}{k^{14}} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{5}{4}(1+b) - \frac{91}{24}(1+b)^3 + \frac{143}{12}(1+b)^5 \\ & - \frac{429}{16}(1+b)^7 + \frac{455}{12}(1+b)^9 - \frac{691}{24}(1+b)^{11} + \frac{35}{4}(1+b)^{13} \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{G_{(16)}}{k^{15}} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}(1+b) - \frac{14}{3}(1+b)^3 + \frac{52}{3}(1+b)^5 \\ & - \frac{143}{3}(1+b)^7 + \frac{260}{3}(1+b)^9 - \frac{1382}{15}(1+b)^{11} \\ & + \frac{140}{3}(1+b)^{13} - \frac{3617}{510}(1+b)^{15} \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{G_{(17)}}{k^{16}} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{1+b} - \frac{1}{2} + \frac{17}{12}(1+b) - \frac{17}{3}(1+b)^3 + \frac{221}{9}(1+b)^5 \\ & - \frac{2431}{30}(1+b)^7 + \frac{1105}{6}(1+b)^9 - \frac{11747}{45}(1+b)^{11} \\ & + \frac{595}{3}(1+b)^{13} - \frac{3617}{60}(1+b)^{15} \end{aligned} \right\};$$

etc.

En développant les puissances positives du binôme $1+b$, l'on trouvera;

$$G_{(1)} = -\frac{b}{2(1+b)};$$

$$\frac{G_{(2)}}{k} = \frac{b(b-1)}{6(1+b)};$$

$$\frac{G_{(3)}}{k^2} = \frac{b^2}{4(1+b)};$$

$$\frac{G_{(4)}}{k^3} = \frac{b}{1+b} \left(\frac{1}{30} + \frac{2}{15}b - \frac{2}{15}b^2 - \frac{1}{30}b^3 \right);$$

$$\frac{G_{(5)}}{k^4} = \frac{b^2}{1+b} \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{3}b - \frac{1}{12}b^2 \right);$$

$$\frac{G_{(6)}}{k^5} = \frac{b}{1+b} \left(-\frac{1}{42} - \frac{1}{7}b - \frac{4}{21}b^2 + \frac{4}{21}b^3 + \frac{1}{7}b^4 + \frac{1}{42}b^5 \right);$$

$$\frac{G_{(7)}}{k^6} = \frac{b^2}{1+b} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2}b + \frac{23}{24}b^2 + \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{12}b^4 \right);$$

$$\frac{G_{(8)}}{k^7} = \frac{b}{1+b} \left(\frac{1}{30} + \frac{4}{15}b + \frac{32}{45}b^2 + \frac{8}{15}b^3 - \frac{8}{15}b^4 - \frac{32}{45}b^5 - \frac{4}{15}b^6 - \frac{1}{30}b^7 \right);$$

$$\frac{G_{(9)}}{k^8} = \frac{b^2}{1+b} \left(-\frac{3}{20} - \frac{6}{2}b - \frac{37}{10}b^2 - \frac{27}{5}b^3 - \frac{37}{10}b^4 - \frac{6}{5}b^5 - \frac{3}{20}b^6 \right);$$

$$\frac{G_{(10)}}{k^9} = \frac{b}{1+b} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{5}{66} - \frac{25}{33}b - \frac{32}{11}b^2 - \frac{56}{11}b^3 - \frac{32}{11}b^4 + \frac{32}{11}b^5 \\ & + \frac{56}{11}b^6 + \frac{32}{11}b^7 + \frac{25}{33}b^8 + \frac{5}{66}b^9 \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{G_{(11)}}{k^{10}} = \frac{b^2}{1+b} \left\{ \begin{aligned} & \frac{5}{12} + \frac{25}{6}b + \frac{139}{8}b^2 + 39b^3 + \frac{305}{6}b^4 \\ & + 39b^5 + \frac{139}{8}b^6 + \frac{25}{6}b^7 + \frac{5}{12}b^8 \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{G_{(12)}}{k^{11}} = \frac{b}{1+b} \left\{ \begin{aligned} & \frac{691}{2730} + \frac{1382}{13.35}b + \frac{20528}{3.5.7.13}b^2 + \frac{10652}{21.13}b^3 + \frac{24384}{13.35}b^4 \\ & + \frac{12224}{13.35}b^5 - \frac{12224}{13.35}b^6 - \frac{24384}{13.35}b^7 - \frac{10652}{21.13}b^8 \\ & - \frac{20528}{3.5.7.13}b^9 - \frac{1382}{13.35}b^{10} - \frac{691}{2730}b^{11} \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{G_{(13)}}{k^{12}} = \frac{b^2}{1+b} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{691}{420} - \frac{691}{35}b - \frac{43331}{420}b^2 - \frac{4309}{14}b^3 - \frac{80891}{140}b^4 - \frac{24858}{35}b^5 \\ & - \frac{80891}{140}b^6 - \frac{4309}{14}b^7 - \frac{43331}{420}b^8 - \frac{691}{35}b^9 - \frac{691}{420}b^{10} \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{G_{(14)}}{k^{13}} = \frac{b}{1+b} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{7}{6} - \frac{49}{3}b - \frac{4432}{45}b^2 - \frac{4988}{15}b^3 - \frac{10144}{15}b^4 - \frac{7184}{9}b^5 \\ & -\frac{1856}{5}b^6 + \frac{1856}{5}b^7 + \frac{7184}{9}b^8 + \frac{10144}{15}b^9 + \frac{4988}{15}b^{10} \\ & + \frac{4432}{45}b^{11} + \frac{49}{3}b^{12} + \frac{7}{16}b^{13} \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{G_{(15)}}{k^{14}} = \frac{b^2}{1+b} \left\{ \begin{aligned} & \frac{35}{4} + \frac{245}{2}b + \frac{18419}{24}b^2 + \frac{5679}{2}b^3 + \frac{82757}{12}b^4 + \frac{23125}{2}b^5 \\ & + \frac{219261}{16}b^6 + \frac{23125}{2}b^7 + \frac{82757}{12}b^8 + \frac{5679}{2}b^9 \\ & + \frac{18419}{24}b^{10} + \frac{245}{2}b^{11} + \frac{35}{4}b^{12} \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{G_{(16)}}{k^{15}} = \frac{b}{1+b} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3617}{510} + \frac{28936}{255}b + \frac{41024}{51}b^2 + \frac{169232}{51}b^3 + \frac{2232064}{255}b^4 \\ & + \frac{3849856}{255}b^5 + \frac{4099072}{255}b^6 + \frac{362624}{51}b^7 - \frac{362624}{51}b^8 \\ & - \frac{4099072}{255}b^9 - \frac{3849856}{255}b^{10} - \frac{2232064}{255}b^{11} - \frac{169232}{51}b^{12} \\ & - \frac{41024}{51}b^{13} - \frac{28936}{255}b^{14} - \frac{3617}{510}b^{15} \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{G_{(17)}}{k^{16}} = \frac{b^2}{1+b} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{3617}{60} - \frac{14468}{15}b - \frac{21107}{3}b^2 - \frac{30982}{1}b^3 - \frac{4136777}{45}b^4 \\ & - \frac{971284}{5}b^5 - \frac{9037861}{30}b^6 - \frac{3133495}{9}b^7 - \frac{9037861}{30}b^8 \\ & - \frac{971284}{5}b^9 - \frac{4136777}{45}b^{10} - \frac{30982}{1}b^{11} - \frac{21107}{3}b^{12} \\ & - \frac{14468}{15}b^{13} - \frac{3617}{60}b^{14} \end{aligned} \right\};$$

etc.

A l'aide de ces valeurs on trouve ;

$$\begin{aligned}
 (1+b)M_{(1)} &= \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \right) + b \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \right) \right\} ; \\
 b(1+b)M_{(2)} &= \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \right) + b \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \right) \\ &+ b^2 \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = 0 \right) + b^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \right) \end{aligned} \right\} ; \\
 b^2(1+b)M_{(3)} &= \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \right) + b(1-1=0) \\ &+ b^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4} - \frac{4}{3} + \frac{23}{12} = 0 \right) \\ &+ b^3 \left(\frac{2}{3} - 3 + \frac{4}{3} + 1 = 0 \right) \\ &+ b^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{6} = 0 \right) + b^5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \right) \end{aligned} \right\} ; \\
 b^3(1+b)M_{(4)} &= \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10} = 0 \right) + b \left(\frac{12}{5} - \frac{12}{5} = 0 \right) \\ &+ b^2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{32}{5} - \frac{37}{5} = 0 \right) \\ &+ b^3 \left(-2 + 8 + \frac{24}{5} - \frac{54}{5} = 0 \right) \\ &+ b^4 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + \frac{46}{3} - \frac{24}{5} - \frac{37}{5} = 0 \right) \\ &+ b^5 \left(\frac{2}{15} - 2 + \frac{8}{3} + 8 - \frac{32}{5} - \frac{12}{5} = 0 \right) \\ &+ b^6 \left(-\frac{2}{15} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{4}{3} - \frac{12}{5} - \frac{3}{10} = 0 \right) \\ &+ b^7 \left(-\frac{1}{30} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = 0 \right) \end{aligned} \right\} ;
 \end{aligned}$$

$$b(1+b)M_{(5)} = \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0\right) + b\left(\frac{25}{3} - \frac{25}{3} = 0\right) \\ &+ b^2\left(1 - \frac{15}{4} - 32 + \frac{139}{4} = 0\right) \\ &+ b^3(8 - 30 - 56 + 78 = 0) \\ &+ b^4\left(-\frac{1}{6} + \frac{5}{3} + \frac{64}{3} - \frac{185}{2} - 32 + \frac{305}{3} = 0\right) \\ &+ b^5(-1 + 10 + 16 - 135 + 32 + 78 = 0) \\ &+ b^6\left(-\frac{1}{12} - \frac{4}{3} + \frac{115}{6} - 16 - \frac{185}{2} + 56 + \frac{139}{4} = 0\right) \\ &+ b^7\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 10 - \frac{64}{3} - 30 + 32 + \frac{25}{3} = 0\right) \\ &+ b^8\left(-\frac{1}{12} + 1 + \frac{5}{3} - 8 - \frac{15}{4} + \frac{25}{3} + \frac{5}{6} = 0\right) \\ &+ b^9\left(\frac{1}{6} - 1 + \frac{5}{6} = 0\right) \end{aligned} \right\};$$

$$b(1+b)M_{(6)} = \left(\frac{691}{210} - \frac{691}{210} = 0\right) + b\left(\frac{1382}{35} - \frac{1382}{35} = 0\right) \\ + b^2\left(-\frac{25}{6} + 15 + \frac{20528}{105} - \frac{43331}{210} = 0\right) \\ + b^3\left(-\frac{125}{3} + 150 + \frac{10652}{21} - \frac{4309}{7} = 0\right) \\ + b^4\left(\frac{9}{10} - \frac{15}{2} - 160 + \frac{1251}{2} + \frac{24384}{35} - \frac{80891}{70} = 0\right) \\ + b^5\left(\frac{36}{5} - 60 - 280 + 1404 + \frac{12224}{35} - \frac{49716}{35} = 0\right) \\ + b^6\left(-\frac{1}{42} + \frac{2}{3} + \frac{96}{5} - 185 - 160 + 1830 - \frac{12224}{35} - \frac{80891}{70} = 0\right)$$

$$+b^7 \left(-\frac{1}{7} + 4 + \frac{7^2}{5} - 270 + 160 + 1404 \right) \\ - \frac{24384}{35} - \frac{4309}{7} = 0$$

$$+b^8 \left(-\frac{4}{21} + \frac{23}{3} - \frac{7^2}{5} - 185 + 280 + \frac{1251}{2} \right) \\ - \frac{10652}{21} - \frac{43331}{210} = 0$$

$$+b^9 \left(\frac{4}{21} + 4 - \frac{96}{5} - 60 + 160 + 150 - \frac{20528}{105} - \frac{1382}{35} = 0 \right)$$

$$+b^{10} \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{3} - \frac{36}{5} - \frac{15}{2} + \frac{125}{3} + 15 - \frac{1382}{35} - \frac{691}{210} = 0 \right)$$

$$+b^{11} \left(\frac{1}{42} - \frac{9}{10} + \frac{25}{6} - \frac{691}{210} = 0 \right) ;$$

$$b^5(1+b)M_{(7)} = \left(-15 \cdot \frac{7}{6} + 2 \cdot \frac{35}{4} = \frac{35}{2} - \frac{35}{2} = 0 \right)$$

$$+b \left\{ -15 \cdot \frac{49}{3} + 2 \cdot \frac{245}{2} = 245 - 245 = 0 \right\}$$

$$+b^2 \left\{ \begin{aligned} &91 \cdot \frac{691}{2730} - 49 \cdot \frac{691}{420} - 15 \cdot \frac{4432}{45} + 2 \cdot \frac{18419}{24} \\ &= \frac{691}{30} - 7 \cdot \frac{691}{60} - 5 \cdot \frac{4432}{15} + \frac{18419}{12} \\ &= \frac{93477 - 93477}{60} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^3 \left\{ \begin{aligned} &91 \cdot \frac{1382}{13 \cdot 35} - 49 \cdot \frac{691}{35} - 15 \cdot \frac{4988}{15} + 2 \cdot \frac{5679}{2} \\ &= \frac{1382}{5} - 7 \cdot \frac{691}{5} - 4988 + 5679 \\ &= \frac{29777}{5} - \frac{29777}{5} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^4 \left\{ \begin{aligned} & -77 \cdot \frac{5}{66} + 105 \cdot \frac{5}{12} + 91 \cdot \frac{20528}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13} - 49 \cdot \frac{43331}{420} \\ & -15 \cdot \frac{10144}{15} + 2 \cdot \frac{82757}{12} = -\frac{5 \cdot 7}{6} + \frac{35 \cdot 5}{4} \\ & + \frac{20528}{15} - 7 \cdot \frac{43331}{60} - 10144 + \frac{82757}{6} \\ & = \frac{912307}{60} - \frac{912307}{60} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^5 \left\{ \begin{aligned} & -77 \cdot \frac{25}{33} + 105 \cdot \frac{25}{6} + 91 \cdot \frac{10652}{21 \cdot 13} - 49 \cdot \frac{4309}{14} \\ & -15 \cdot \frac{7184}{9} + 2 \cdot \frac{23125}{2} = -7 \cdot \frac{25}{3} + 35 \cdot \frac{25}{2} \\ & + \frac{10652}{3} - 7 \cdot \frac{4309}{2} - 5 \cdot \frac{7184}{2} + 23125 \\ & = \frac{162679}{6} - \frac{162679}{6} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^6 \left\{ \begin{aligned} & 9 \cdot \frac{1}{30} - 35 \cdot \frac{3}{20} - 77 \cdot \frac{32}{11} + 105 \cdot \frac{39}{8} + 91 \cdot \frac{24384}{13 \cdot 35} \\ & -49 \cdot \frac{80891}{140} - 15 \cdot \frac{1856}{5} + 2 \cdot \frac{219261}{16} = \frac{3}{10} - 7 \cdot \frac{3}{4} \\ & -7 \cdot 32 + 105 \cdot \frac{139}{8} + \frac{24384}{5} - 7 \cdot \frac{80891}{20} \\ & -3 \cdot 1856 + \frac{219261}{8} = \frac{1364364}{40} - \frac{1364364}{40} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^1 \left\{ \begin{aligned} &9 \cdot \frac{4}{15} - 35 \cdot \frac{6}{5} - 77 \cdot \frac{56}{11} + 105 \cdot 39 + 91 \cdot \frac{12224}{13 \cdot 35} \\ &- 49 \cdot \frac{24858}{35} + 15 \cdot \frac{1856}{5} + 2 \cdot \frac{23125}{2} = 3 \cdot \frac{4}{5} - 7 \cdot 6 \\ &- 7 \cdot 56 + 105 \cdot 39 - 7 \cdot \frac{24858}{5} + 3 \cdot 1856 + 23125 \\ &+ \frac{12224}{5} = \frac{176176}{5} - \frac{176176}{5} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^3 \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{12} + 9 \cdot \frac{32}{45} - 35 \cdot \frac{37}{10} - 77 \cdot \frac{32}{11} + 105 \cdot \frac{305}{6} \\ &- 91 \cdot \frac{12224}{13 \cdot 35} - 49 \cdot \frac{80891}{140} + 15 \cdot \frac{7184}{9} + 2 \cdot \frac{82757}{12} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{32}{5} - 7 \cdot \frac{37}{2} - 7 \cdot 32 + 35 \cdot \frac{305}{2} - \frac{12224}{5} \\ &- 7 \cdot \frac{80891}{20} + 5 \cdot \frac{7184}{3} + \frac{82757}{6} \\ &= \frac{1866609}{60} - \frac{1866609}{60} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^9 \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{8}{15} - 35 \cdot \frac{27}{5} + 77 \cdot \frac{32}{11} + 105 \cdot 39 \\ &- 91 \cdot \frac{24384}{13 \cdot 35} - 49 \cdot \frac{4309}{14} + 15 \cdot \frac{10144}{15} + 2 \cdot \frac{5679}{2} \\ &= \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{8}{5} - 7 \cdot 27 + 7 \cdot 32 + 105 \cdot 39 - \frac{24384}{5} \\ &- 7 \cdot \frac{4309}{2} + 10144 + 5679 \\ &= \frac{201473}{10} - \frac{201473}{10} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^{10} \left\{ \begin{aligned} & \frac{23}{24} - 9 \cdot \frac{8}{15} - 35 \cdot \frac{37}{10} + 77 \cdot \frac{56}{11} + 105 \cdot \frac{139}{8} \\ & - 91 \cdot \frac{10652}{21 \cdot 13} - 49 \cdot \frac{43331}{420} + 15 \cdot \frac{4988}{15} + 2 \cdot \frac{18419}{24} \\ & = \frac{23}{24} - 3 \cdot \frac{8}{5} - 7 \cdot \frac{37}{2} + 7 \cdot 56 + 105 \cdot \frac{139}{8} \\ & - \frac{10652}{3} - 7 \cdot \frac{43331}{60} + 4988 + \frac{18419}{12} \\ & = \frac{1048830}{120} - \frac{1048830}{120} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^{11} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} - 9 \cdot \frac{32}{45} - 35 \cdot \frac{6}{5} + 77 \cdot \frac{32}{11} + 105 \cdot \frac{25}{6} \\ & - 91 \cdot \frac{20528}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13} - 49 \cdot \frac{691}{35} + 15 \cdot \frac{4432}{45} + 2 \cdot \frac{245}{2} \\ & = \frac{1}{2} - \frac{32}{5} - 7 \cdot 6 + 7 \cdot 32 + 35 \cdot \frac{25}{2} \\ & - \frac{20528}{15} - 7 \cdot \frac{691}{5} + \frac{4432}{3} + 245 \\ & = \frac{71530}{30} - \frac{71530}{30} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^{12} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{12} - 9 \cdot \frac{4}{15} - 35 \cdot \frac{3}{20} + 77 \cdot \frac{25}{33} + 105 \cdot \frac{5}{12} \\ & - 91 \cdot \frac{1382}{13 \cdot 35} - 49 \cdot \frac{691}{420} + 15 \cdot \frac{49}{3} + 2 \cdot \frac{35}{4} \\ & = \frac{1}{12} - 3 \cdot \frac{4}{5} - 7 \cdot \frac{3}{4} + 7 \cdot \frac{25}{3} + 35 \cdot \frac{5}{4} - \frac{1382}{5} \\ & - 7 \cdot \frac{691}{60} + 5 \cdot 49 + \frac{35}{2} = \frac{21880}{60} - \frac{21880}{60} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$+b^{13} \left\{ = \frac{175 + 525 - 9 - 691}{30} = \frac{700 - 700}{30} = 0 \right\}.$$

L'on trouverait de même $M_{(8)} = 0$; mais il est inutile de pousser plus loin le calcul de ces coefficients. Les résultats obtenus dans ce § suffisent pour démontrer, que l'explication théorique donnée par Poisson dans le N.° 38 de son premier Mémoire, relativement à la lenteur de l'accroissement de l'épaisseur de la couche électrique, est tout-à-fait inadmissible. Mais, le fait étant incontestable, nous ferons remarquer que notre série (127) peut en rendre raison d'une manière très-satisfaisante. Car, en y faisant par exemple $b=1$, et successivement, $\mu = \cos. 7^{\circ}.12'$; $\mu = \cos. 10^{\circ}$, cette série donne ; pour $\theta = 7^{\circ}.12'$:

$$y = h \left\{ \begin{array}{l} 0,5 - 1,43173 + 0,97690 - 0,04406 \\ \quad - 0,001120 + 0,00069 \end{array} \right\} = h(0,000671) ,$$

et pour $\theta = 10^{\circ}$;

$$y = h \left\{ \begin{array}{l} 0,5 - 1,372969 + 0,956618 - 0,079626 \\ \quad - 0,003465 + 0,000307 \end{array} \right\} = h(0,000911) .$$

Or il est clair, que d'aussi faibles intensités électriques devaient paraître insensibles d'après la manière dont elles étaient observées par COULOMB.

Quoique la série (127) soit particulièrement convergente lorsque l'angle θ est d'un petit nombre de degrés, cependant nous ferons observer que, en l'arrêtant là où la divergence commence, elle donne encore des résultats sensiblement vrais. En prenant, par exemple, $\theta = 30^{\circ}$ et $b=1$, l'on trouve, par le calcul des quatre premiers termes,

$$y = h \{ 0,5 - 0,788045 + 0,720666 - 0,297441 \} = h(0,10518) ;$$

résultat exact à un millième près.

Même en prenant $\theta = 60^{\circ}$, et $b=1$, l'on obtient

$$y = h \{ 0,5 - 0,28868 + 0,42264 - 0,16352 + 0,155101 \} = h(0,625541) ;$$

c'est-à-dire un résultat approchant de celui qu'on obtiendrait par la

série (137). En effet cette série donne

$$y = h \{ U_0 - U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5 + \text{etc.} \} ,$$

où les valeurs numériques des seize premiers termes sont celles-ci :

$U_0 = 1 ;$	$U_1 = 0,577330 ;$
$U_2 = 0,269961 ;$	$U_3 = 0,149310 ;$
$U_4 = 0,093568 ;$	$U_5 = 0,063729 ;$
$U_6 = 0,046072 ;$	$U_7 = 0,034854 ;$
$U_8 = 0,027255 ;$	$U_9 = 0,021886 ;$
$U_{10} = 0,017998 ;$	$U_{11} = 0,014997 ;$
$U_{12} = 0,012708 ;$	$U_{13} = 0,010906 ;$
$U_{14} = 0,009462 ;$	$U_{15} = 0,008257 .$

Donc en arrêtant la série à U_{14} l'on a $y = h(0,603412)$, et en l'arrêtant à U_{15} l'on a $y = h(0,595156)$. Le premier résultat étant supérieur, et le second inférieur au véritable, la valeur moyenne, c'est-à-dire

$$y = h(0,599284)$$

sera plus exacte. J'ai voulu rapporter cet exemple de calcul afin de mettre en évidence la lenteur de la convergence de la série (137).

CHAPITRE TROISIÈME

LOIS DE LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ
À LA SURFACE DE DEUX SPHÈRES CONDUCTRICES

SÉPARÉES PAR UN INTERVALLE QUELCONQUE

§ XVII.

Le cas général, dont il est ici question, peut être résolu par un procédé analogue à celui qui a été employé dans les §§ VII et VIII.

En divisant par a les deux membres de l'équation (E), trouvée dans le § VI, et faisant $k = \frac{c^2 - b^2}{a}$, nous avons

$$(G_1) \dots f(x) - \frac{b}{k - cx} f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{h}{a} - \frac{gb}{ac - a^2 x}.$$

D'après la forme linéaire de cette équation, il est clair que l'on a

$$f(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x),$$

pourvu que ces trois fonctions soient déterminées, chacune, conformément à ces trois équations; savoir

$$(G'_1) \dots f'(x) - \frac{b}{k - cx} f'\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = 0,$$

$$(G''_1) \dots f''(x) - \frac{b}{k - cx} f''\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{h}{a},$$

$$(G'''_1) \dots f'''(x) - \frac{b}{k - cx} f'''\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = -\frac{gb}{ac - a^2 x}.$$

Pour intégrer la première, nous ferons d'abord

SÉRIE II. TOM. VIII.

FF

$$f'(x) = \frac{h'}{\beta' - \gamma' x} \varphi(x) ;$$

h' , β' , γ' étant trois coefficients constans qu'il faudra déterminer convenablement. De là l'on tire

$$f'\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) = \frac{h'}{\beta' - \gamma' \left(\frac{c-ax}{k-cx}\right)} \cdot \varphi\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) ;$$

partant, l'équation (G'_1) donnera, après avoir supprimé le facteur commun h' ;

$$\frac{\varphi(x)}{\beta' - \gamma' x} = \frac{b}{(\beta' k - \gamma' c) - (\beta' c - a \gamma') x} \cdot \varphi\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) .$$

Actuellement, si l'on fait

$$\beta' c - a \gamma' = (\beta' k - \gamma' c) \frac{\gamma'}{\beta'} ,$$

l'on aura

$$\varphi(x) = \frac{b}{k - c \cdot \frac{\gamma'}{\beta'}} \cdot \varphi\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) .$$

En divisant par β' les deux membres de l'équation précédente l'on voit que l'inconnue est le rapport $\frac{\gamma'}{\beta'}$. Il est donc permis de faire $\beta' = 1$. Après cela, si l'on fait $-\gamma' = m$, l'on a ces trois équations

$$(166) \dots f'(x) = \frac{h'}{1 + m x} \varphi(x) ,$$

$$(167) \dots \varphi(x) = \frac{b}{k + c m} \cdot \varphi\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) ,$$

$$(168) \dots c + a m = -m(k + c m) .$$

La valeur de m étant déterminée par cette dernière équation du second degré, l'on voit qu'il y a deux valeurs de m admissibles. En désignant par m' la seconde, nous aurons aussi

$$(169) \dots c + am' = -m'(k + cm') .$$

De sorte que l'on a

$$mm' = 1 ; \quad m + m' = -\frac{(k+a)}{c} .$$

La question est maintenant réduite à rendre identique l'équation (167), en profitant des facilités offertes par les équations (168) et (169). Pour cela, je prends

$$\varphi(x) = \left(\frac{A+Bx}{A'+B'x} \right)^n ,$$

et j'examine, si l'on peut déterminer convenablement l'exposant n et les quatre coefficients A, B, A', B' . Il est vrai qu'ils sont réductibles à trois; mais, pour plus de symétrie, je conserve cette forme, laquelle étant introduite dans l'équation (167), donne

$$\left(\frac{A+Bx}{A'+B'x} \right)^n = \frac{b}{k+mc} \left\{ \frac{(Ak+Bc) - (Ac+Ba)x}{(A'k+B'c) - (A'c+B'a)x} \right\}^n .$$

Cela posé, pour faire disparaître x de cette équation, je remarque que, en vertu des équations (168) et (169), il suffit de prendre

$$A=1, \quad B=m, \quad A'=1, \quad B'=m ;$$

car l'on a immédiatement, après avoir divisé par $\left(\frac{1+mx}{1+m'x} \right)^n$;

$$1 = \frac{b}{k+mc} \left(\frac{k+mc}{k+m'c} \right)^n .$$

Pour tirer de là la valeur de n , observons que, en multipliant les deux équations (168) et (169) l'on a

$$(k+cm)(k+cm') = b^2 ;$$

et par conséquent l'on doit avoir

$$1 = \left(\frac{k+mc}{b} \right)^{2n-1} ;$$

ce qui revient à dire que, $n = \frac{1}{2}$.

Donc l'équation (166) sera satisfaite, en prenant

$$f'(x) = \frac{h'}{1+mx} \cdot \sqrt{\frac{1+mx}{1+m'x}} = \frac{h'}{\sqrt{(1+mx)(1+m'x)}} ,$$

ou bien,

$$(170) \dots f'(x) = \frac{h' \sqrt{c}}{\sqrt{c - (a+k)x + cx^2}} ;$$

h' étant une constante arbitraire.

Ce résultat comprend celui trouvé dans le § VII: car, en supposant $c=a+b$, l'on a $a+k=2(a+b)=2c$; et par conséquent

$$f'(x) = \frac{h' \sqrt{c}}{\sqrt{c - 2cx + cx^2}} = \frac{h'}{1-x} .$$

Maintenant, pour compléter l'intégrale (170), il faudra remplacer h' par une fonction de x , capable de ne point changer de valeur par le changement de x en $\frac{c-ax}{k-cx}$. Mais, pour cet objet, je renvoie au second Mémoire de Poisson; où il est aussi démontré, que, pour résoudre le problème de Physique dont il est ici question, il suffit de faire $h'=0$, et par conséquent $f'(x)=0$ (Voyez p. 14-22).

Pour intégrer l'équation (G''), nous ferons

$$f''(x) = \frac{h}{a} \varphi(x) ;$$

ce qui donne

$$\varphi(x) = \frac{b}{k-cx} \cdot \varphi\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) = 1 .$$

Maintenant, si nous faisons $\varphi(x) = 1 + b\varphi'(x)$, il viendra

$$\varphi'(x) = \frac{1}{k-cx} + \frac{b}{k-cx} \cdot \varphi'\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) ,$$

où en posant

$$\psi'(x) = \frac{1}{k-cx} + b\varphi''(x) ,$$

et faisant ensuite

$$k' = k^2 - c^2 ; \quad c' = ck - ac ,$$

l'on aura

$$\varphi''(x) = \frac{1}{k' - c'x} + \frac{b}{k - cx} \cdot \varphi''\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right).$$

Maintenant l'on fera

$$\varphi''(x) = \frac{1}{k' - c'x} + b\varphi'''(x),$$

ce qui donnera

$$\varphi'''(x) = \frac{1}{k'' - c''x} + \frac{b}{k - cx} \cdot \varphi'''(\frac{c - ax}{k - cx}),$$

après avoir fait, pour conserver la symétrie,

$$k'' = k.k' - c.c'; \quad c'' = c.k' - a.c'.$$

En continuant cette suite de transformations successives, il est clair que l'on aura ces trois systèmes d'équations; savoir

$$\varphi(x) = 1 + b\varphi'(x), \quad \varphi'(x) = \frac{1}{k - cx} + b\varphi''(x),$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{k' - c'x} + b\varphi'''(x), \quad \varphi'''(x) = \frac{1}{k'' - c''x} + b\varphi^{(4)}(x),$$

$$\varphi^{(4)}(x) = \frac{1}{k''' - c'''x} + b\varphi^{(5)}(x), \quad \text{etc. ;}$$

$$k' = k.k - c.c,$$

$$c' = c.k - a.c,$$

$$k'' = k.k' - c.c',$$

$$c'' = c.k' - a.c',$$

$$k''' = k.k'' - c.c'',$$

$$c''' = c.k'' - a.c'',$$

$$k^{(4)} = k.k''' - c.c''',$$

$$c^{(4)} = c.k''' - a.c''',$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$k^{(n-1)} = k.k^{(n-2)} - c.c^{(n-2)},$$

$$c^{(n-1)} = c.k^{(n-2)} - a.c^{(n-2)},$$

$$\text{etc. ;}$$

$$\text{etc. ;}$$

desquelles l'on tire

$$\varphi(x) = 1 + \frac{b}{k - cx} + \frac{b^2}{k' - c'x} + \frac{b^3}{k'' - c''x} \dots + \frac{b^n}{k^{(n-1)} - c^{(n-1)}x} + \text{etc.}$$

Pour déterminer la loi de ces coefficients, observons que l'on a

$$k^{(n)} = k \cdot k^{(n-1)} - c \cdot c^{(n-1)} = k \cdot k^{(n-1)} - c \{ c \cdot k^{(n-2)} - a \cdot c^{(n-2)} \},$$

$$k^{(n)} = k \cdot k^{(n-1)} - c^2 \cdot k^{(n-2)} + ac \cdot c^{(n-2)}.$$

Mais nous avons

$$ak^{(n-1)} = ak \cdot k^{(n-2)} - ac \cdot c^{(n-2)};$$

donc, en ajoutant ces deux dernières équations, et remarquant que $c^2 - ak = b^2$, il viendra

$$k^{(n)} + (a - k)k^{(n-1)} + b^2 k^{(n-2)} = 0,$$

ou bien, en changeant n en $n + 2$;

$$(171) \dots k^{(n+2)} + (a - k)k^{(n+1)} + b^2 k^{(n)} = 0.$$

D'après la théorie des séries récurrentes, les coefficients k , k' , k'' etc., doivent, en vertu de cette relation, naître du développement d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est du second degré; c'est-à-dire que l'on a;

$$\frac{k - b^2 x}{1 + (a - k)x + b^2 x^2} = k + k'x + k''x^2 + k'''x^3 \dots + k^{(n)}x^n + \text{etc.}$$

Cela posé; soient γ et γ' les deux valeurs de bx qui satisfont à l'équation

$$b^2 x^2 + \frac{(a - k)}{b} bx + 1 = 0.$$

Si l'on fait

$$N = \frac{b(k - b\gamma)}{a - k + 2b\gamma}; \quad N' = \frac{b(k - b\gamma')}{a - k + 2b\gamma'},$$

l'on aura

$$\frac{k - b^2 x}{1 + (a - k)x + b^2 x^2} = \frac{N}{bx - \gamma} + \frac{N'}{bx - \gamma'};$$

d'où l'on tire

$$k^{(n)} = -\frac{Nb^n}{\gamma^{n+1}} - \frac{N'b^n}{\gamma'^{n+1}} ; \quad k^{(n-1)} = -\frac{Nb^{n-1}}{\gamma^n} - \frac{N'b^{n-1}}{\gamma'^n} ;$$

et comme

$$c \cdot c^{(n-1)} = k \cdot k^{(n-1)} - k^{(n)} ,$$

l'on a

$$k^{(n-1)} - c^{(n-1)} x = k^{(n-1)} - \frac{x}{c} \{ k \cdot k^{(n-1)} - k^{(n)} \} ;$$

ce qui donne

$$k^{(n-1)} - c^{(n-1)} x = -\frac{Nb^{n-1}}{\gamma^n} - \frac{N'b^{n-1}}{\gamma'^n} - \frac{b^{n-1}x}{c} \left\{ \frac{(b-\gamma k)N}{\gamma^{n+1}} + \frac{(b-\gamma' k)N'}{\gamma'^{n+1}} \right\} .$$

Les deux racines γ et γ' sont telles que l'on a

$$\gamma\gamma' = 1 , \quad \gamma + \gamma' = -\frac{(a-k)}{b} ;$$

donc nous avons ;

$$\frac{b-\gamma k}{\gamma} = b\gamma' - k = -(a+b\gamma) ;$$

$$\frac{b-\gamma' k}{\gamma'} = b\gamma - k = -(a+b\gamma') ;$$

$$N = \frac{k-b\gamma'}{\gamma-\gamma'} = \frac{a+b\gamma'}{\gamma-\gamma'} ;$$

$$N' = \frac{k-b\gamma}{\gamma'-\gamma} = \frac{a+b\gamma}{\gamma'-\gamma} .$$

En substituant ces valeurs, et remarquant que l'on a

$$(a+b\gamma)(a+b\gamma') = a^2 - a(a-k) + b^2 = c^2 ,$$

l'on trouvera

$$k^{(n-1)} - c^{(n-1)} x = \begin{cases} -\frac{ab^{n-1}}{\gamma-\gamma'} \cdot \left(\frac{1}{\gamma^n} - \frac{1}{\gamma'^n} \right) \\ -\frac{b^n}{\gamma-\gamma'} \cdot \left(\frac{1}{\gamma^{n+1}} - \frac{1}{\gamma'^{n+1}} \right) + \frac{cb^{n-1}x}{\gamma-\gamma'} \cdot \left(\frac{1}{\gamma^n} - \frac{1}{\gamma'^n} \right) . \end{cases}$$

Actuellement, si l'on fait $\frac{b}{\gamma} = \alpha$, $\frac{b}{\gamma'} = \alpha'$, l'on pourra écrire

$$k^{(n-1)} - c^{(n-1)} x = \frac{\alpha(\alpha^n - \alpha'^n) + (\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}) - c x (\alpha^n - \alpha'^n)}{\alpha - \alpha'} ,$$

ou bien

$$k^{(n-1)} - c^{(n-1)} x = \frac{(a + \alpha - c x) \alpha^n - (a + \alpha' - c x) \alpha'^n}{\alpha - \alpha'} .$$

Il suit de là, que l'intégrale de l'équation (G_1'') peut être exprimée ainsi ;

$$(172) \dots f''(x) = \frac{h}{a} (\alpha - \alpha') \cdot \sum_0^{\infty} \frac{b^n}{(a + \alpha - c x) \alpha^n - (a + \alpha' - c x) \alpha'^n} ,$$

où le signe $\sum_0^{\infty}$ s'étend à toutes les valeurs entières et positives de n depuis $n=0$ jusqu'à $n=\infty$.

Les quantités α et α' doivent être regardées comme les deux racines de l'équation

$$(173) \dots x^2 + (a - k)x + b^2 = 0 ;$$

de sorte que l'on a ; $\alpha\alpha' = b^2$, $\alpha + \alpha' = k - a$. D'où l'on tire, en substituant pour k sa valeur,

$$(174) \dots 2a\alpha = (c^2 - b^2 - a^2) + \sqrt{(c^2 - b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2} ,$$

$$(175) \dots 2a\alpha' = (c^2 - b^2 - a^2) - \sqrt{(c^2 - b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2} ;$$

ce qui démontre que les deux racines α et α' sont toujours réelles et positives, puisque nous supposons $c > a + b$.

Nous allons maintenant intégrer de la même manière l'équation (G_1'''). En faisant d'abord

$$f'''(x) = -g \frac{b}{a} \cdot \psi(x) ,$$

l'on a

$$\psi(x) - \frac{b}{k - cx} \cdot \psi\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{1}{c - ax} .$$

Donc en posant

$$\psi(x) = \frac{1}{c-ax} + b\psi'(x),$$

$$H' = k.c - c.a, \quad G' = c.c - a.a;$$

il viendra

$$\psi'(x) = \frac{1}{H' - G'x} + \frac{b}{k - cx} \cdot \psi' \left(\frac{c-ax}{k-cx} \right).$$

Actuellement, l'on fera

$$\psi'(x) = \frac{1}{H' - G'x} + b\psi''(x);$$

ce qui donnera

$$\psi''(x) = \frac{1}{H'' - G''x} + \frac{b}{k - cx} \cdot \psi'' \left(\frac{c-ax}{k-cx} \right),$$

après avoir fait

$$H'' = k.H' - c.G'; \quad G'' = c.H' - a.G'.$$

Maintenant, si l'on fait

$$\psi''(x) = \frac{1}{H'' - G''x} + b\psi'''(x);$$

$$H''' = k.H'' - c.G''; \quad G''' = c.H'' - a.G'';$$

l'on aura

$$\psi'''(x) = \frac{1}{H''' - G'''x} + \frac{b}{k - cx} \cdot \psi''' \left(\frac{c-ax}{k-cx} \right).$$

En continuant ainsi, il est évident que l'on obtient cette suite d'équations; savoir

$$\psi(x) = \frac{1}{c-ax} + b\psi'(x); \quad \psi'(x) = \frac{1}{H' - G'x} + b\psi''(x);$$

$$\psi''(x) = \frac{1}{H'' - G''x} + b\psi'''(x); \quad \psi'''(x) = \frac{1}{H''' - G'''x} + b\psi^{(4)}(x);$$

etc. ;

$H' = k.c - c.a,$	$G' = c.c - a.a,$
$H'' = k.H' - c.G',$	$G'' = c.H' - a.G',$
$H''' = k.H'' - c.G'',$	$G''' = c.H'' - a.G'',$
.....	
.....	
$H^{(n-1)} = k.H^{(n-2)} - c.G^{(n-2)},$	$G^{(n-1)} = c.H^{(n-2)} - a.G^{(n-2)},$
etc. ;	etc. ;

desquelles l'on tire

$$\psi(x) = \frac{1}{c-a}x + \frac{b}{H'-G'}x + \frac{b^2}{H''-G''}x + \dots + \frac{b^n}{H^{(n)}-G^{(n)}}x + \text{etc.}$$

La loi de ces coefficients est facile à trouver : car l'on a

$$\begin{aligned} H^{(n)} &= k.H^{(n-1)} - c\{c.H^{(n-2)} - a.G^{(n-2)}\} \\ &= k.H^{(n-1)} - c^2.H^{(n-2)} + a\{k.H^{(n-2)} - H^{(n-1)}\}, \end{aligned}$$

ou bien,

$$H^{(n)} + (a-k)H^{(n-1)} + b^2H^{(n-2)} = 0,$$

en se rappelant que $b^2 = c^2 - ak$.

Cette équation coïncide avec l'équation (171) par le simple changement de $H^{(n)}$ en $k^{(n)}$, et de n en $n+2$. Il suit de là que

$$\frac{c}{1 + (a-k)x + b^2x^2} = c + H'x + H''x^2 + H'''x^3 + \dots + H^{(n)}x^n + \text{etc.}$$

Donc, conformément aux dénominations précédentes, nous avons

$$\frac{c}{1 + (a-k)x + b^2x^2} = \frac{c}{\gamma - \gamma'} \cdot \left\{ \frac{1}{bx - \gamma} - \frac{1}{bx - \gamma'} \right\},$$

et par conséquent

$$H^{(n)} = -\frac{cb^n}{\gamma - \gamma'} \cdot \left(\frac{1}{\gamma^{n+1}} - \frac{1}{\gamma'^{n+1}} \right).$$

Mais,

$$G^{(n)} = \frac{b^2}{c} \cdot H^{(n-1)} + \frac{a}{c} H^{(n)} ;$$

partant l'on a ,

$$G^{(n)} = -\frac{b^{n+1}}{\gamma - \gamma'} \cdot \left(\frac{1}{\gamma^n} - \frac{1}{\gamma'^n} \right) - \frac{a b^n}{\gamma - \gamma'} \cdot \left(\frac{1}{\gamma^{n+1}} - \frac{1}{\gamma'^{n+1}} \right) ;$$

d'où l'on tire

$$H^{(n)} - G^{(n)} x = \frac{-c(\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}) + x b^2 (\alpha^n - \alpha'^n) + a x (\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1})}{\alpha - \alpha'} ;$$

et en observant que $b^2 = \alpha \alpha'$, l'on aura

$$\frac{b^n}{H^{(n)} - G^{(n)} x} = \frac{b^n (\alpha - \alpha')}{(c - a x - \alpha' x) \alpha^{n+1} - (c - a x - \alpha x) \alpha'^{n+1}} .$$

Donc la fonction $f'''(x)$ est telle que l'on a

$$(176) \dots f'''(x) = -g \frac{b}{a} (\alpha - \alpha') \cdot \sum_{\infty} \frac{b^n}{(c - a x - \alpha' x) \alpha^{n+1} - (c - a x - \alpha x) \alpha'^{n+1}} .$$

En réunissant les équations (172) et (176), nous aurons pour l'intégrale de l'équation (G_1) ;

$$(177) \dots f(x) = \frac{h(\alpha - \alpha')}{a} \cdot \sum_{\infty} \frac{b^n}{(a + \alpha - c x) \alpha^n - (a + \alpha' - c x) \alpha'^n} \\ - \frac{g(\alpha - \alpha')}{a} \cdot \sum_{\infty} \frac{b^{n+1}}{(c - a x - \alpha' x) \alpha^{n+1} - (c - a x - \alpha x) \alpha'^{n+1}} .$$

Comme

$$\frac{b}{\alpha} = \gamma , \quad \frac{b}{\alpha'} = \gamma' ; \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \gamma^2 ;$$

si l'on fait pour plus de simplicité ;

$$H = \frac{a + \alpha' - c x}{a + \alpha - c x} ; \quad H' = \frac{(c - a x - \alpha x) \gamma^2}{c - a x - \alpha' x} ,$$

l'on pourra écrire

$$(178) \dots f(x) = \frac{h(\alpha - \alpha')}{a(a + \alpha - c x)} \cdot \sum_{\infty} \frac{\gamma^n}{1 - H \gamma^{2n}} \\ - \frac{g \gamma (\alpha - \alpha')}{a(c - a x - \alpha' x)} \cdot \sum_{\infty} \frac{\gamma^n}{1 - H' \gamma^{2n}} .$$

D'après la règle démontrée dans le § VI l'on aura la fonction $F(x)$ par une simple permutation entre les lettres qui composent $f(x)$. Cette permutation introduit $\alpha \cdot \frac{a}{b}$, $\alpha' \cdot \frac{a}{b}$ au lieu de α et α' , et donne immédiatement, en employant l'équation (177);

$$(179) \dots F(x) = g \frac{a}{b} (\alpha - \alpha') \cdot \sum_{\circ}^{\infty} \frac{b^n}{(b^2 + a\alpha - bcx)\alpha^n - (b^2 + a\alpha' - bcx)\alpha'^n} \\ - h \frac{a}{b} (\alpha - \alpha') \cdot \sum_{\circ}^{\infty} \frac{b^{n+1}}{(bc - b^2x - a\alpha'x)\alpha'^{n+1} - (bc - b^2x - a\alpha x)\alpha^{n+1}}.$$

De sorte que, en posant

$$H_1 = \frac{b^2 + a\alpha' - bcx}{b^2 + a\alpha - bcx}; \quad H_1' = \frac{(bc - b^2x - a\alpha x)\gamma^2}{bc - b^2x - a\alpha'x},$$

nous aurons

$$(180) \dots F(x) = g \frac{a}{b} \cdot \frac{(\alpha - \alpha')}{(b^2 + a\alpha - bcx)} \cdot \sum_{\circ}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1 - H_1 \gamma^{2n}} \\ - h \frac{a}{b} \cdot \frac{\gamma(\alpha - \alpha')}{(bc - b^2x - a\alpha'x)} \cdot \sum_{\circ}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1 - H_1' \gamma^{2n}}.$$

Si l'on observe actuellement, que la quantité γ est toujours plus petite que l'unité, l'on accordera que les suites infinies dont le terme général est

$$\frac{\gamma^n}{1 - H \gamma^{2n}}$$

sont nécessairement convergentes. L'on peut même augmenter leur convergence par cette remarque fort simple. En s'arrêtant à une valeur donnée de n l'on aurait un degré d'approximation exprimé par la fraction

$$\gamma^n = \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^{\frac{n}{2}};$$

mais la suite infinie

$$\frac{\gamma^n}{1 - H \gamma^{2n}} + \frac{\gamma^{n+1}}{1 - H \gamma^{2n+2}} + \frac{\gamma^{n+2}}{1 - H \gamma^{2n+4}} + \text{etc.}$$

a pour valeur approchée

$$\frac{\gamma^n}{1-H\gamma^{2n}} + \frac{\gamma^{n+1}}{(1-H\gamma^{2n})(1+H\gamma^{2n}+\text{etc.})} + \frac{\gamma^{n+2}}{(1-H\gamma^{2n})(1+H\gamma^{2n}+\text{etc.})} \\ = \frac{\gamma^n}{1-H\gamma^{2n}} \left\{ 1 + \gamma(1-H\gamma^{2n}+\text{etc.}) + \gamma^2(1-H\gamma^{2n}+\text{etc.}) + \gamma^3(1-H\gamma^{2n}+\text{etc.}) \right\},$$

ou bien (en négligeant dans le second facteur les termes multipliés par γ^{2n})

$$\frac{\gamma^n}{1-H\gamma^{2n}} (1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \dots + \gamma^{2n-1}) = \frac{\gamma^n}{1-H\gamma^{2n}} \cdot \left(\frac{1-\gamma^{2n}}{1-\gamma} \right).$$

Donc, en multipliant le dernier terme calculé par $\frac{1-\gamma^{2n}}{1-\gamma}$ l'on aura une approximation exacte jusqu'aux quantités de l'ordre γ^{2n-1} inclusive-ment. Cette règle est un peu plus exacte que celle donnée par Poisson dans la page 34 de son second Mémoire où il prescrit de multiplier le dernier terme calculé par $\frac{1}{1-\gamma}$.

§ XVIII.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer, que les différens termes qui composent le second membre de l'équation (177) peuvent être exprimés rationnellement: c'est-à-dire qu'il ne saurait y avoir le radical qui entre dans l'expression des deux racines α et α' . En effet; nous avons l'équation

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}}{\alpha - \alpha'} = \alpha^n + \alpha'^{n-1} \alpha' + \alpha'^{n-2} \alpha'^2 + \dots + \alpha \alpha'^{n-1} + \alpha'^n;$$

d'où l'on tire (en se rappelant que $b^2 = \alpha\alpha'$): pour toute valeur *paire* de n ;

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}}{\alpha - \alpha'} = (\alpha^n + \alpha'^n) + b^2(\alpha^{n-2} + \alpha'^{n-2}) + b^4(\alpha^{n-4} + \alpha'^{n-4}) \dots + b^n(\alpha^0 + \alpha'^0) - b^n;$$

et pour toute valeur *impair* de n ;

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}}{\alpha - \alpha'} = (\alpha^n + \alpha'^n) + b^2(\alpha^{n-2} + \alpha'^{n-2}) + b^4(\alpha^{n-4} + \alpha'^{n-4}) \dots + b^{n-1}(\alpha + \alpha').$$

De sorte que l'on peut écrire

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}}{\alpha - \alpha'} = -b^n + \sum_0^{\frac{n}{2}} b^{2i} (\alpha^{n-2i} + \alpha'^{n-2i}) ,$$

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}}{\alpha - \alpha'} = \sum_0^{\frac{n-1}{2}} b^{2i} (\alpha^{n-2i} + \alpha'^{n-2i}) ,$$

suivant que n sera *pair* ou *impair*.

Le signe $\sum_0^{\frac{n}{2}}$ indique que l'on doit donner à i toutes les valeurs 0, 1, 2, 3 $\frac{n}{2}$, et prendre la somme des termes ainsi formés.

Et le signe $\sum_0^{\frac{n-1}{2}}$ a une signification analogue.

Cela posé, si l'on fait pour plus de simplicité,

$$M_i = c^2 - b^2 - a^2 ; \quad N = M_i^2 - 4a^2b^2 ,$$

l'on aura, d'après les formules (174) et (175),

$$\alpha^p + \alpha'^p = \frac{(M_i + \sqrt{N})^p + (M_i - \sqrt{N})^p}{(2a)^p} .$$

Donc en faisant

$$2E_{(i)} = (M_i + \sqrt{N})^{n-2i} + (M_i - \sqrt{N})^{n-2i} ;$$

$$P_{(n)} = \sum_0^{\frac{n}{2}} (2ab)^{2i} E_{(i)} ; \quad P'_{(n)} = \sum_0^{\frac{n-1}{2}} (2ab)^{2i} E_{(i)} ,$$

nous aurons; pour n nombre pair :

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}}{\alpha - \alpha'} = -b^n + \frac{2P_{(n)}}{(2a)^n} ;$$

et pour n nombre impair ;

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}}{\alpha - \alpha'} = \frac{2P'_{(n)}}{(2a)^n} .$$

De sorte que l'on a

$$\frac{\alpha^n - \alpha'^n}{\alpha - \alpha'} = \frac{2 P'_{(n-1)}}{(2a)^{n-1}}; \quad \frac{\alpha^n - \alpha'^n}{\alpha - \alpha'} = -b^{n-1} + \frac{2 P_{(n-1)}}{(2a)^{n-1}},$$

suivant que n sera nombre *pair* ou *impair*.

Donc en posant pour plus de simplicité ;

$$U_{(n)} = \frac{b^n (\alpha - \alpha')}{a(a + \alpha - cx) \alpha^n - a(a + \alpha' - cx) \alpha'^n};$$

$$V_{(n)} = \frac{b^{n+1} (\alpha - \alpha')}{a(c - ax - \alpha' x) \alpha^{n+1} - a(c - ax - \alpha x) \alpha'^{n+1}};$$

l'on aura

$$(181) \dots f(x) = h \sum_{\alpha}^{\infty} U_{(n)} - g \sum_{\alpha'}^{\infty} V_{(n)}.$$

Et les formules propres au calcul des termes $U_{(n)}$, $V_{(n)}$ seront ; pour n nombre *pair* :

$$(\varepsilon') \dots \begin{cases} U_{(n)} = \frac{b^n (2a)^{n-1}}{P'_{(n)} - a b^n (2a)^{n-1} + (a - cx) 2a P'_{(n-1)}}; \\ V_{(n)} = \frac{b^{n+1} (2a)^{n-1}}{(c - ax) \{P'_{(n)} - a b^n (2a)^{n-1}\} - a b^2 x \cdot 2 P'_{(n-1)}}; \end{cases}$$

et pour n nombre *impair* :

$$(\varepsilon'') \dots \begin{cases} U_{(n)} = \frac{b^n (2a)^{n-1}}{P'_{(n)} + a(a - cx) \{2 P_{(n-1)} - b^{n-1} (2a)^{n-1}\}}; \\ V_{(n)} = \frac{b^{n+1} (2a)^{n-1}}{(c - ax) P'_{(n)} - a b^2 x \{2 P_{(n-1)} - b^{n-1} (2a)^{n-1}\}}. \end{cases}$$

En écrivant seulement les premiers termes de $f(x)$, et observant que l'on a

$$P_{(0)} = 1, \quad P'_{(-1)} = 0,$$

il viendra

$$(182) \dots\dots\dots f(x) =$$

$$\left. \begin{aligned} & 1 + \frac{ab}{P'_{(1)} + a(a-cx)} + \frac{2(ab)^2}{P_{(2)} - 2(ab)^2 + a(a-cx)2aP'_{(1)}} \\ & + \frac{2^2(ab)^3}{P'_{(3)} + a(a-cx)\{2P_{(2)} - (2ab)^2\}} \\ & + \frac{2^3(ab)^4}{P_{(4)} - 2^3(ab)^4 + (a-cx)2aP'_{(3)}} \\ & + \frac{2^4(ab)^5}{P'_{(5)} + a(a-cx)\{2P_{(4)} - (2ab)^4\}} \\ & + \frac{2^5(ab)^6}{P_{(6)} - 2^5(ab)^6 + (a-cx)2aP'_{(5)}} \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \frac{h}{a}.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{cub - ba^2x} + \frac{1}{(c-ax)P'_{(1)} - ab^2x} \\ & + \frac{2ab}{(c-ax)\{P_{(2)} - 2(ab)^2\} - 2ab^2xP'_{(1)}} \\ & + \frac{(2ab)^2}{(c-ax)P'_{(3)} - ab^2x\{2P_{(2)} - (2ab)^2\}} \\ & + \frac{(2ab)^3}{(c-ax)\{P_{(4)} - 2^3(ab)^4\} - 2ab^2xP'_{(3)}} \\ & + \frac{(2ab)^4}{(c-ax)P'_{(5)} - ab^2x\{2P_{(4)} - (2ab)^4\}} \\ & + \frac{(2ab)^5}{(c-ax)\{P_{(6)} - 2^5(ab)^6\} - 2ab^2xP'_{(5)}} \\ & + \text{etc. ;} \end{aligned} \right\} -gb^2.$$

où l'on a

$$P'_{(1)} = M_1 ;$$

$$P'_{(2)} = M_1^2 + N + 4a^2b^2 = 2(N + 4a^2b^2) ;$$

$$P'_{(3)} = M_1^3 + 3M_1N + 4a^2b^2M_1 = 4M_1(N + 2a^2b^2) ;$$

$$P'_{(4)} = M_1^4 + 6M_1^2N + N^2 + 4a^2b^2M_1^2 + 16a^4b^4 \\ = 8(N + a^2b^2)(N + 4a^2b^2) + 16a^4b^4 ;$$

$$P'_{(5)} = M_1^5 + 10M_1^3N + 5M_1N^2 + 4a^2b^2M_1(M_1^2 + 3N) + (2ab)^4M_1 \\ = 16M_1 \{ N(N + 4a^2b^2) + 3a^4b^4 \} ;$$

$$P'_{(6)} = M_1^6 + 15M_1^4N + 15N^2M_1^2 + N^3 + (2ab)^2(M_1^4 + 6M_1^2N + N^2) \\ + (2ab)^4(M_1^2 + N) + (2ab)^6 \\ = 32(N + a^2b^2)(N + 2a^2b^2)(N + 4a^2b^2) ;$$

etc.

En substituant ces valeurs, et faisant pour plus de simplicité :

$$M_0 = 1 ; \quad M_2 = N + 3a^2b^2 ; \quad M_3 = M_1(N + 2a^2b^2) ;$$

$$M_4 = a^4b^4 + M_1^2(N + a^2b^2) ; \quad M_5 = M_1 \{ NM_1^2 + 3a^4b^4 \} ;$$

$$M_6 = M_1^2(N + a^2b^2)(N + 2a^2b^2) - a^6b^6 ; \quad \text{etc. ;}$$

$$p_{-1} = 1 ;$$

$$p_0 = M_1 + a^2M_0 ;$$

$$p_1 = M_2 + a^2M_1 ;$$

$$p_2 = M_3 + a^2M_2 ;$$

$$p_3 = M_4 + a^2M_3 ;$$

$$p_4 = M_5 + a^2M_4 ;$$

$$p_5 = M_6 + a^2M_5 ;$$

etc. ;

$$\mu_{-1} = 1 ;$$

$$\mu_0 = M_1 + b^2M_0 ;$$

$$\mu_1 = M_2 + b^2M_1 ;$$

$$\mu_2 = M_3 + b^2M_2 ;$$

$$\mu_3 = M_4 + b^2M_3 ;$$

$$\mu_4 = M_5 + b^2M_4 ;$$

$$\mu_5 = M_6 + b^2M_5 ;$$

etc. ;

l'on aura

$$(183) \dots f(x) = hf_1(x, a, b, c) + gf_2(x, a, b, c),$$

après avoir fait

$$(184) \dots \begin{cases} f_1(x, a, b, c) = \frac{1}{a} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{p_i - ac M_i x} \right\}, \\ f_2(x, a, b, c) = -\frac{b}{a} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ab)^i}{c M_i - a p_{i-1} x}; \end{cases}$$

où il importe de remarquer que N , M_1 , M_2 , M_3 , etc. sont des fonctions des trois lettres a , b , c qui demeurent invariables par la permutation entr'elles des deux lettres a et b . La généralité de cette propriété est démontrée par la simple inspection de nos deux formules désignées, plus haut, par (ε') et (ε'') . Après avoir ainsi déterminé $f(x)$, il est clair que, par la règle démontrée dans le § VI, nous en tirons :

$$(185) \dots F(x) = gf_1(x, b, a, c) + hf_2(x, b, a, c),$$

en posant

$$(186) \dots \begin{cases} f_1(x, b, a, c) = \frac{1}{b} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{p_i - bc M_i x} \right\}, \\ f_2(x, b, a, c) = -\frac{a}{b} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ab)^i}{c M_i - b p_{i-1} x}. \end{cases}$$

Il suit de là, et des formules générales établies vers la fin du même § que, en introduisant, au lieu des constantes arbitraires h et g les épaisseurs moyennes A et B , qui sont censées immédiatement données, nous aurons

$$(187) \dots Df(x) = A \left\{ f_1(b, a, c) \cdot f_1(x, a, b, c) - f_2(b, a, c) \cdot f_2(x, a, b, c) \right\} \\ + B \left\{ f_1(a, b, c) \cdot f_2(x, a, b, c) - f_2(a, b, c) \cdot f_1(x, a, b, c) \right\};$$

$$(188) \dots DF(x) = A \left\{ f_1(b, a, c) \cdot f_2(x, b, a, c) - f_2(b, a, c) \cdot f_1(x, b, a, c) \right\} \\ + B \left\{ f_1(a, b, c) \cdot f_1(x, b, a, c) - f_2(a, b, c) \cdot f_2(x, b, a, c) \right\};$$

où l'on a

$$(189) \dots \left\{ \begin{aligned} f_1(a, b, c) &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\circ} \cdot \frac{\infty}{\circ} \cdot \frac{(ab)^{i+1}}{p_i} ; \\ f_1(b, a, c) &= \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\circ} \cdot \frac{\infty}{\circ} \cdot \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} ; \\ f_2(a, b, c) &= -\frac{b}{ac} \cdot \frac{\infty}{\circ} \cdot \frac{(ab)^i}{M_i} ; \\ f_2(b, a, c) &= -\frac{a}{bc} \cdot \frac{\infty}{\circ} \cdot \frac{(ab)^i}{M_i} ; \end{aligned} \right.$$

$$(190) \dots D = f_1(a, b, c) \cdot f_1(b, a, c) - f_2(a, b, c) \cdot f_2(b, a, c) .$$

Il est d'ailleurs évident que l'on a l'équation

$$(191) \dots b^2 f_2(b, a, c) = a^2 f_2(a, b, c) .$$

Maintenant, pour former les fonctions désignées par $\varphi(\mu, x)$, $\Phi(\mu_i, x_i)$, il faudra, conformément à la règle démontrée dans le § XIV, remplacer, dans $f(x)$ et $F(x)$, chaque terme de la forme $\frac{1}{p-qx}$ par le radical

$$(p^2 - 2pq \cdot \mu x + q^2 x^2)^{-\frac{1}{2}} ;$$

ce qui donnera

$$(192) \dots D \varphi(\mu, x) = A \left\{ \begin{aligned} &f_1(b, a, c) \cdot \varphi_1(\mu, x, a, b, c) \\ &- f_2(b, a, c) \cdot \varphi_2(\mu, x, a, b, c) \end{aligned} \right\} \\ + B \left\{ \begin{aligned} &f_1(a, b, c) \cdot \varphi_2(\mu, x, a, b, c) \\ &- f_2(a, b, c) \cdot \varphi_1(\mu, x, a, b, c) \end{aligned} \right\} ;$$

$$(193) \dots D \Phi(\mu_i, x_i) = A \left\{ \begin{aligned} &f_1(b, a, c) \cdot \varphi_2(\mu_i, x_i, b, a, c) \\ &- f_2(b, a, c) \cdot \varphi_1(\mu_i, x_i, b, a, c) \end{aligned} \right\} \\ + B \left\{ \begin{aligned} &f_1(a, b, c) \cdot \varphi_1(\mu_i, x_i, b, a, c) \\ &- f_2(a, b, c) \cdot \varphi_2(\mu_i, x_i, b, a, c) \end{aligned} \right\} ;$$

où l'on a

$$(194) \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(\mu, x, a, b, c) &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{(p_i^2 - 2acp_i M_i \cos \theta x + a^2 c^2 M_i^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \varphi_1(\mu_1, x_1, b, a, c) &= \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{(\mu_i^2 - 2bc\mu_i M_i \cos \theta x_1 + b^2 c^2 M_i^2 x_1^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \varphi_2(\mu, x, a, b, c) &= -\frac{b}{a} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i}{(c^2 M_i^2 - 2ac M_i \mu_{i-1} \cos \theta x + a^2 \mu_{i-1}^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \varphi_2(\mu_1, x_1, b, a, c) &= -\frac{a}{b} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i}{(c^2 M_i^2 - 2bc M_i \mu_{i-1} \cos \theta x_1 + b^2 \mu_{i-1}^2 x_1^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

En appliquant à ces équations les formules (29) et (120) l'on aura les expressions suivantes des deux épaisseurs électriques y et z qui ont lieu, respectivement, sur la surface des deux sphères dont a et b sont les rayons; savoir

$$(195) \dots D.y = Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c)$$

$$\begin{aligned} &+ Af_1(b, a, c) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1} (p_i^2 - a^2 c^2 M_i^2)}{(p_i^2 - 2acp_i M_i \cos \theta + a^2 c^2 M_i^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &+ Abf_2(b, a, c) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i (c^2 M_i^2 - a^2 \mu_{i-1}^2)}{(c^2 M_i^2 - 2ac\mu_{i-1} M_i \cos \theta + a^2 \mu_{i-1}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &- Bf_2(a, b, c) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1} (p_i^2 - a^2 c^2 M_i^2)}{(p_i^2 - 2acp_i M_i \cos \theta + a^2 c^2 M_i^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &- Bbf_2(a, b, c) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i (c^2 M_i^2 - a^2 \mu_{i-1}^2)}{(c^2 M_i^2 - 2ac\mu_{i-1} M_i \cos \theta + a^2 \mu_{i-1}^2)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}$$

$$(196) \dots D.bz = Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c)$$

$$\begin{aligned}
 & + Bf_1(a, b, c) \cdot \frac{\infty}{0} \cdot \frac{(ab)^{i+1} (\mu_i^2 - b^2 c^2 M_i^2)}{(\mu_i^2 - 2bc\mu_i M_i \cos \theta_i + b^2 c^2 M_i^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 & + Baf_2(a, b, c) \cdot \frac{\infty}{0} \cdot \frac{(ab)^i (c^2 M_i^2 - b^2 p_{i-1}^2)}{(c^2 M_i^2 - 2bc M_i p_{i-1} \cos \theta_i + b^2 p_{i-1}^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 & - Af_2(b, a, c) \cdot \frac{\infty}{0} \cdot \frac{(ab)^{i+1} (\mu_i^2 - b^2 c^2 M_i^2)}{(\mu_i^2 - 2bc\mu_i M_i \cos \theta_i + b^2 c^2 M_i^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 & - Aaf_1(b, a, c) \cdot \frac{\infty}{0} \cdot \frac{(ab)^i (c^2 M_i^2 - b^2 p_{i-1}^2)}{(c^2 M_i^2 - 2bc M_i p_{i-1} \cos \theta_i + b^2 p_{i-1}^2)^{\frac{3}{2}}} .
 \end{aligned}$$

Pour faciliter la réduction en nombres de ces deux formules, il faudra avoir égard au principe exposé en finissant le § précédent, et se rappeler que, en posant

$$\frac{p}{q} = \text{tang.}(45^\circ + \Pi) ;$$

$$\cos \zeta = \cos \varphi \cdot \cos 2\Pi ,$$

l'on a l'équation

$$(197) \dots \frac{H(p^2 - q^2)}{(p^2 - 2pq \cos \varphi + q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{H}{q \cdot 2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin 2\Pi \cdot \cos(45^\circ + \Pi)}{\sin^3 \frac{1}{2}\zeta} .$$

Par le rapprochement des deux équations (195) et (196), il est aisé de voir, que la valeur de z résulte de celle de y par la simple permutation des deux lettres a et b , ainsi que celle de A et B . Mais, cette propriété doit être employée avec circonspection, lorsque l'on voudra conclure la seconde (z) de la première, après avoir développée celle-ci suivant les puissances d'une seule des deux lettres a ou b .

Dans les cas particuliers de $\theta = 0^\circ$, $\theta = 180^\circ$, $\theta_i = 0^\circ$, $\theta_i = 180^\circ$; les formules générales (195) et (196) deviennent plus simples, et l'on obtient

$$(198) \dots D.ay = Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c)$$

$$+ Af_1(b, a, c) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (ab)^{i+1} \{p_i \pm ac M_i\}}{\{p_i \mp ac M_i\}^2}$$

$$+ Abf_2(b, a, c) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (ab)^i \{c M_i \pm a \mu_{i-1}\}}{\{c M_i \mp a \mu_{i-1}\}^2}$$

$$- Bf_2(a, b, c) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (ab)^{i+1} \{p_i \pm ac M_i\}}{\{p_i \mp ac M_i\}^2}$$

$$- Bbf_1(a, b, c) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (ab)^i \{c M_i \pm a \mu_{i-1}\}}{\{c M_i \mp a \mu_{i-1}\}^2} ;$$

$$(199) \dots D.bz = Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c)$$

$$+ Bf_1(a, b, c) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (ab)^{i+1} \{\mu_i \pm bc M_i\}}{\{\mu_i \mp bc M_i\}^2}$$

$$+ Baf_2(a, b, c) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (ab)^i \{c M_i \pm b p_{i-1}\}}{\{c M_i \mp b p_{i-1}\}^2}$$

$$- Af_2(b, a, c) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (ab)^{i+1} \{\mu_i \pm bc M_i\}}{\{\mu_i \mp bc M_i\}^2}$$

$$- Aaf_1(b, a, c) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (ab)^i \{c M_i \pm b p_{i-1}\}}{\{c M_i \mp b p_{i-1}\}^2} ;$$

en observant que les signes supérieurs se rapportent aux points où $\theta = 0^\circ$, $\theta_i = 0^\circ$; et les signes inférieurs aux points opposés où l'on a $\theta = 180^\circ$; $\theta_i = 180^\circ$. En remplaçant p_i et μ_i par leurs valeurs précédentes, il viendra (en supposant $M_{-1} = 0$)

$$(200) \dots D.ay = Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c)$$

$$\begin{aligned} &+ Af_1(b, a, c) \cdot \frac{Z}{0} \cdot \frac{(ab)^{i+1} \{M_{i+1} + a(a \pm c) M_i\}}{\{M_{i+1} + a(a \mp c) M_i\}^2} \\ &+ Abf_2(b, a, c) \cdot \frac{Z}{0} \cdot \frac{(ab)^i \{c \pm a\} M_i \pm ab^2 M_{i-1}}{\{c \mp a\} M_i \mp ab^2 M_{i-1}}^2 \\ &- Bf_2(a, b, c) \cdot \frac{Z}{0} \cdot \frac{(ab)^{i+1} \{M_{i+1} + a(a \pm c) M_i\}}{\{M_{i+1} + a(a \mp c) M_i\}^2} \\ &- Bbf_1(a, b, c) \cdot \frac{Z}{0} \cdot \frac{(ab)^i \{c \pm a\} M_i \pm ab^2 M_{i-1}}{\{c \mp a\} M_i \mp ab^2 M_{i-1}}^2 ; \end{aligned}$$

$$(201) \dots D.bz = Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c)$$

$$\begin{aligned} &+ Bf_1(a, b, c) \cdot \frac{Z}{0} \cdot \frac{(ab)^{i+1} \{M_{i+1} + b(b \pm c) M_i\}}{\{M_{i+1} + b(b \mp c) M_i\}^2} \\ &+ Baf_2(a, b, c) \cdot \frac{Z}{0} \cdot \frac{(ab)^i \{c \pm b\} M_i \pm ba^2 M_{i-1}}{\{c \mp b\} M_i \mp ba^2 M_{i-1}}^2 \\ &- Af_2(b, a, c) \cdot \frac{Z}{0} \cdot \frac{(ab)^{i+1} \{M_{i+1} + b(b \pm c) M_i\}}{\{M_{i+1} + b(b \mp c) M_i\}^2} \\ &- Aaf_1(b, a, c) \cdot \frac{Z}{0} \cdot \frac{(ab)^i \{c \pm b\} M_i \pm ba^2 M_{i-1}}{\{c \mp b\} M_i \mp ba^2 M_{i-1}}^2 . \end{aligned}$$

Telles sont les formules propres à donner l'expression de l'épaisseur de la couche électrique aux points de la surface des deux sphères placées sur la ligne qui joint leurs centres.

Les formules générales (195) et (196) ont la forme convenable pour démontrer *a priori* le fait, que l'influence mutuelle entre deux sphères séparées ne saurait augmenter la masse *analytique* de l'électricité répandue sur leurs surfaces : c'est-à-dire que l'on a les équations

$$2\pi a^3 \int_0^\pi \gamma \sin \theta d\theta = 4\pi a^3 A ; \qquad 2\pi b^3 \int_0^\pi z \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 = 4\pi b^3 B ;$$

quelles que soient les valeurs primitives des épaisseurs moyennes A et B qui avaient lieu avant l'action due au développement de leur influence. En effet, en appliquant ici la formule

$$(A^2 - B^2) \int_0^\pi d\varphi \sin \varphi (A^2 - 2AB \cos \varphi + B^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{A},$$

l'on obtient immédiatement ;

$$\begin{aligned} & 2\pi a^2 \int_0^\pi \gamma \sin \theta d\theta = \\ & \frac{4\pi a^2}{Da} \left\{ Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c) \right\} \\ & + \frac{4\pi a^2 A}{Da} \left\{ f_1(b, a, c) \cdot \bar{Z} \cdot \frac{(ab)^{i+1}}{\rho_i} + bf_2(b, a, c) \cdot \bar{Z} \cdot \frac{(ab)^i}{cM_i} \right\} \\ & - \frac{4\pi a^2 B}{Da} \left\{ f_2(a, b, c) \cdot \bar{Z} \cdot \frac{(ab)^{i+1}}{\rho_i} + bf_1(a, b, c) \cdot \bar{Z} \cdot \frac{(ab)^i}{cM_i} \right\} ; \\ & 2\pi b^2 \int_0^\pi z \sin \theta_1 d\theta_1 = \\ & \frac{4\pi b^2}{Db} \left\{ Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c) \right\} \\ & + \frac{4\pi b^2 B}{Db} \left\{ f_1(a, b, c) \cdot \bar{Z} \cdot \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} + af_2(a, b, c) \cdot \bar{Z} \cdot \frac{(ab)^i}{cM_i} \right\} \\ & - \frac{4\pi b^2 A}{Db} \left\{ f_2(b, a, c) \cdot \bar{Z} \cdot \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} + af_1(b, a, c) \cdot \bar{Z} \cdot \frac{(ab)^i}{cM_i} \right\} . \end{aligned}$$

Donc en éliminant, à l'aide des équations (189), les sommes indiquées par le signe $\bar{Z}$, et ayant égard à l'équation (191), l'on verra aussitôt : 1.° que le coefficient de B devient nul, par identité, dans la première de ces deux équations, et que celui de A devient de même nul dans la seconde : 2.° que le coefficient de A se réduit à $4\pi a^2$ dans

la première, et celui de B à $4\pi b^2$ dans la seconde. Cette démonstration a l'avantage d'être tout-à-fait explicite, et de n'avoir pas besoin que l'expression de γ soit réduite en une série de termes de la forme $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ etc., semblables à ceux définis dans le III^{ème} §.

Si l'on suppose $B=0$ avant l'influence, l'on aura encore $B=0$ pendant l'influence, et l'on comprendra pourquoi les deux quantités égales d'électricités contraires ainsi développées sur la surface de la sphère du rayon b pourront se neutraliser complètement en éloignant la sphère électrisée. De sorte que la nullité d'action que présentera maintenant la sphère du rayon b sera due à cette combinaison, et non à la dissipation par le sol des deux électricités, puisque, par l'isolement parfait que nous admettons, cette dissipation est rendue impossible. C'est un de ces cas où l'identité des effets n'entraîne pas l'identité des causes.

D'après la formule (196), le cercle qui sépare les deux électricités sur la sphère du rayon b sera déterminé par la valeur particulière de θ_1 qui satisfait à l'équation $z=0$; c'est-à-dire à l'équation

$$(202) \dots 0 = f_2(b, a, c) + f_2(b, a, c) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1} (\mu_i^2 - b^2 c^2 M_i^2)}{(\mu_i^2 - 2bc\mu_i M_i \cos \theta'_1 + b^2 c^2 M_i^2)^{\frac{3}{2}}} \\ + af_1(b, a, c) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i (c^2 M_i^2 - b^2 p_{i-1}^2)}{(c^2 M_i^2 - 2bcM_i p_{i-1} \cos \theta'_1 + b^2 p_{i-1}^2)^{\frac{3}{2}}};$$

où θ'_1 désigne la valeur convenable de θ_1 . De sorte que, la position de ce cercle sera *indépendante* de l'intensité A de la sphère électrisée: car, il est clair, que cette équation donne;

$$\cos. \theta'_1 = \text{fonct.}(a, b, c) .$$

En supposant connu l'angle θ'_1 , la masse de l'électricité de même nom qui se trouve, libre, sur la sphère du rayon b sera aussi connue, et exprimée par l'intégrale définie

$$2\pi b^2 \int_0^{\theta'_1} z \sin \theta_1 d\theta_1 .$$

En substituant pour z sa valeur fournie par l'équation (196), après y avoir fait $B=0$, et remarquant que l'on a la formule générale

$$\begin{aligned} & (A^2 - B^2) \int_0^{\varphi'} d\varphi \sin \varphi (A^2 - 2AB \cos \varphi + B^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{(A^2 - B^2)}{AB} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{(A-B)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(A^2 - 2AB \cos \varphi' + B^2)}} \right\}, \end{aligned}$$

l'on trouvera ;

$$\begin{aligned} (203) \quad & 2\pi b^2 \int_0^{\theta_1'} z \sin \theta_1 d\theta_1 = -\frac{A}{Db} f_2(b, a, c) \cdot (1 - \cos \theta_1') \\ & - \frac{A}{Dcb^2} \cdot \left\{ f_2(b, a, c) \cdot \sum_0^\infty \frac{(ab)^{i+1} (\mu_i + bc M_i)}{M_i \mu_i} \right. \\ & \left. + f_1(b, a, c) \cdot \sum_0^\infty \frac{(ab)^i (M_i + bp_{i-1})}{M_i p_{i-1}} \right\} \\ & + \frac{A}{Dcb^2} \cdot \left\{ f_2(b, a, c) \cdot \sum_0^\infty \frac{(ab)^{i+1} (\mu_i^2 - b^2 c^2 M_i^2)}{M_i \mu_i \cdot \sqrt{\mu_i^2 - 2bc \mu_i M_i \cos \theta_1' + b^2 c^2 M_i^2}} \right. \\ & \left. + f_1(b, a, c) \cdot \sum_0^\infty \frac{(ab)^i (c^2 M_i^2 - b^2 p_{i-1}^2)}{M_i p_{i-1} \cdot \sqrt{c^2 M_i^2 - 2bc M_i p_{i-1} \cos \theta_1' + b^2 p_{i-1}^2}} \right\}. \end{aligned}$$

L'on a donc une équation de la forme

$$2\pi b^2 \int_0^{\theta_1'} z \sin \theta_1 d\theta_1 = A \cdot \text{Fonct.}(a, b, c) ;$$

ce qui démontre que l'électricité décomposée par influence est proportionnelle à l'intensité A , lorsque les trois paramètres a, b, c demeurent constans. Mais, pour deux sphères données, cette quantité varie avec la distance c des deux centres, et la loi de cette variation est, comme l'on voit, fort compliquée.

Pour rendre plus manifeste la manière dont les formules précédentes sont fonctions de la distance c des deux centres, nous ferons remarquer,

qu'en ordonnant les quantités M_2, M_3, M_4 , etc.; p_0, p_1, p_2 , etc.; μ_0, μ_1, μ_2 etc.; suivant les puissances du trinome $c^2 - b^2 - a^2 = M_1$, l'on aura les équations suivantes;

$$(204) \left\{ \begin{array}{l} M_0 = 1 ; \\ M_1 = M_1 ; \\ M_2 = -a^2 b^2 + M_1^2 ; \\ M_3 = -2a^2 b^2 M_1 + M_1^3 ; \\ M_4 = a^4 b^4 - 3a^2 b^2 M_1^2 + M_1^4 ; \\ M_5 = 3a^4 b^4 M_1 - 4a^2 b^2 M_1^3 + M_1^5 ; \\ M_6 = -a^6 b^6 + 6a^4 b^4 M_1^2 - 5a^2 b^2 M_1^4 + M_1^6 ; \\ \text{etc. ;} \end{array} \right.$$

$$(205) \left\{ \begin{array}{l} p_0 = a^2 + M_1 ; \\ p_1 = -a^2 b^2 + a^2 M_1 + M_1^2 ; \\ p_2 = -a^4 b^2 - 2a^2 b^2 M_1 + a^2 M_1^2 + M_1^3 ; \\ p_3 = a^4 b^4 - 2a^4 b^2 M_1 - 3a^2 b^2 M_1^2 + a^2 M_1^3 + M_1^4 ; \\ p_4 = a^6 b^4 + 3a^4 b^4 M_1 - 3a^4 b^2 M_1^2 - 4a^2 b^2 M_1^3 + a^2 M_1^4 + M_1^5 ; \\ p_5 = -a^6 b^6 + 3a^6 b^4 M_1 + 6a^4 b^4 M_1^2 - 4a^4 b^2 M_1^3 \\ \quad - 5a^2 b^2 M_1^4 + a^2 M_1^5 + M_1^6 ; \\ \text{etc. ;} \end{array} \right.$$

$$(206) \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = b^3 + M_1 ; \\ \mu_1 = -a^3 b^3 + b^3 M_1 + M_1^3 ; \\ \mu_2 = -a^3 b^4 - 2 a^2 b^3 M_1 + b^3 M_1^2 + M_1^3 ; \\ \mu_3 = a^4 b^4 - 2 a^2 b^4 M_1 - 3 a^2 b^3 M_1^2 + b^3 M_1^3 + M_1^4 ; \\ \mu_4 = a^4 b^6 + 3 a^4 b^4 M_1 - 3 a^2 b^4 M_1^2 - 4 a^2 b^3 M_1^3 + b^3 M_1^4 + M_1^5 ; \\ \mu_5 = -a^6 b^6 + 3 a^4 b^6 M_1 + 6 a^4 b^4 M_1^2 - 4 a^2 b^4 M_1^3 \\ \quad - 5 a^2 b^3 M_1^4 + b^3 M_1^5 + M_1^6 ; \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

En outre, il conviendra d'observer que, en faisant

$$D' = \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{p_i} \right\} \cdot \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} \right\} - \frac{ab}{c^2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i}{M_i} \right)^2 ;$$

l'on a

$$(207) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_1(a, b, c)}{D} = \frac{b}{D'} \cdot \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{p_i} \right\} ; \\ \frac{f_1(b, a, c)}{D} = \frac{a}{D'} \cdot \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} \right\} ; \\ \frac{f_2(a, b, c)}{D} = -\frac{b^2}{c D'} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i}{M_i} ; \\ \frac{f_2(b, a, c)}{D} = -\frac{a^2}{c D'} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i}{M_i} . \end{array} \right.$$

L'inspection de ces formules démontre, que dans les valeurs de y et de z les coefficients de A et de B seront des nombres abstraits, c'est-à-dire, indépendans de l'unité de mesure que l'on choisira pour évaluer les trois lignes a , b , c .

§ XIX.

Pour mieux fixer les idées sur les formules générales (195) et (196) nous allons les développer dans deux cas distincts: 1.^o en négligeant (dans le résultat final) le cube de b ; 2.^o en négligeant les termes divisés par c^4 : ce qui pourra servir lorsque les rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{c}$, seront de petites fractions, et dans les cas où les deux rayons seront forts petits comparativement à la distance $c - a - b$ qui sépare les surfaces des deux sphères. Pour cela, il suffit de prendre;

$$f_1(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{b}{c^2 - b^2} + \frac{ab^2}{p_1} + \frac{a^2 b^3}{p_2};$$

$$f_1(b, a, c) = \frac{1}{b} + \frac{a}{c^2 - a^2} + \frac{ba^2}{\mu_1} + \frac{b^2 a^3}{\mu_2};$$

$$f_2(a, b, c) = -\frac{b}{ac} - \frac{b^2}{cM_1} - \frac{ab^3}{cM_2};$$

$$f_2(b, a, c) = -\frac{a}{bc} - \frac{a^2}{cM_1} - \frac{ba^3}{cM_2} - \frac{b^2 a^4}{cM_3};$$

d'où l'on tire (après les réductions)

$$D' = 1 + \frac{ab}{p_0} + \frac{a^2 b^2}{p_1} + \frac{a^2 b^2}{\mu_1} - \frac{a^2 b^2}{c^2(c^2 - a^2)} + \frac{ba^3}{c^2(c^2 - a^2)};$$

$$\frac{1}{D'} = 1 - \frac{ab}{c^2 - a^2}.$$

Cela posé, si l'on remarque que, dans le terme multiplié par $a^2 b^3$, il est permis de faire $p_1 = c^2 M_1$, et $p_0 = c^2$, $\mu_0 = M_1$, dans les termes multipliés par b , l'on trouvera que, en négligeant la totalité des termes multipliés par b^3 , la formule (195) donne

$$(208) \dots y = A + \frac{Bb^2}{a} \left\{ \frac{1}{c} - \frac{(c^2 - a^2)}{c^3} \left(1 - \frac{2a}{c} \cos. \theta + \frac{a^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right\}.$$

Maintenant, si l'on observe que, même en conservant dans l'expression de D' les termes multipliés par b^3 , l'on a

$$D' = 1 + \frac{ab}{\mu_0} + \frac{a^2 b^2}{\mu_1} + \frac{a^3 b^3}{\mu_2} + \frac{ab^3}{c^4},$$

$$D' = 1 + \frac{ab}{M_1} + \frac{a^2 b^2}{M_2} + \frac{a^3 b^3}{M_3} - \frac{ab^3}{\mu_0^2} + \frac{ab^3}{c^4};$$

l'on trouvera, que la formule (196), en y négligeant les termes qui seraient multipliés par b^3 , donne

$$\begin{aligned} z = & \frac{B}{D'} \left(1 + \frac{ab}{p_0} + \frac{a^2 b^2}{p_1} + \frac{a^3 b^2}{\mu_1} - \frac{a^2 b^2}{c^2 M_1} \right) + \frac{A a^2}{b c} + \frac{A a^3 b^2}{c^5} \\ & - A a^3 b^2 \left(\frac{c}{\mu_0^3} - \frac{p_0^2}{c^3 M_1^3} + \frac{a^2}{c M_3} - \frac{1}{c \mu_0^3} - \frac{a^2}{c \mu_2} + \frac{1}{c^5} \right) \\ & + \frac{B a b \mu_0^2}{D'} \left(1 + \frac{ab}{p_0} \right) (\mu_0^2 - 2 b c \mu_0 \cos \theta_1 + b^2 c^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & - \frac{B a b c}{D'} \left(1 + \frac{ab}{M_1} \right) (c^2 - 2 b c \cos \theta_1 + b^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & + \frac{A a^3 \mu_0^2}{c} (\mu_0^2 - 2 b c \mu_0 \cos \theta_1 + b^2 c^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & + \frac{A a^3 b \mu_1^2}{c} (\mu_1^2 - 2 b c \mu_1 M_1 \cos \theta_1 + b^2 c^2 M_1^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & - \frac{A a^2 (c^2 - b^2)}{b} (c^2 - 2 b c \cos \theta_1 + b^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & - A a^3 c^2 M_1^2 (c^2 M_1^2 - 2 b c M_1 p_0 \cos \theta_1 + b^2 p_0^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & - A a^3 c^2 b M_2^2 (c^2 M_2^2 - 2 b c M_2 p_1 \cos \theta_1 + b^2 p_1^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Comme dans cette équation l'on peut faire

$$\frac{bc}{\mu_0^3} = \frac{bcM_1}{\mu_1} = \frac{bp_1}{cM_1} = \frac{bc}{c^2 - a^2} ; \quad \frac{1}{cM_1} = \frac{1}{c\mu_0} \left(1 + \frac{b^2}{c^2 - a^2} \right) ;$$

$$1 + \frac{ab}{p_0} + \frac{a^2b^2}{p_1} + \frac{a^2b^2}{\mu_1} - \frac{a^2b^2}{c^2M_1} = D' - \frac{ba^3}{c^2(c^2 - a^2)} ,$$

il est clair qu'elle se réduit à celle-ci ;

$$\begin{aligned} z = & B + \frac{Aa^2}{bc} - \frac{Bba^3}{D'c^2(c^2 - a^2)} \\ & - Aa^3b^2 \left(\frac{c}{\mu_0^3} - \frac{p_0^2}{c^3M_1^3} + \frac{a^2}{cM_1} - \frac{1}{c\mu_0^2} - \frac{a^2}{c\mu_1} + \frac{1}{c\mu_0^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^3} \right) \\ & + \frac{Bab\mu_0^2}{D'} \left(1 + \frac{ab}{p_0} \right) (\mu_0^2 - 2bc\mu_0 \cos \theta_1 + b^2c^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & - \frac{Babbc}{D'} \left(1 + \frac{ab}{M_1} \right) (c^2 - 2bc \cos \theta_1 + b^2c^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & - \frac{Aa^2(c^2 - b^2)}{b} (c^2 - 2bc \cos \theta_1 + b^2)^{-\frac{3}{2}} ; \end{aligned}$$

ou bien à celle-ci ;

$$\begin{aligned} z = & B + \frac{Aa^2}{bc} - \frac{Bba^3}{D'c^2(c^2 - a^2)} \\ & + \frac{Bab\mu_0^2}{D'} (\mu_0^2 - 2bc\mu_0 \cos \theta_1 + b^2c^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & - \frac{Babbc}{D'} (c^2 - 2bc \cos \theta_1 + b^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & - \frac{Aa^2(c^2 - b^2)}{b} (c^2 - 2bc \cos \theta_1 + b^2)^{-\frac{3}{2}} , \end{aligned}$$

en observant que l'on a $\frac{1}{p_0\mu_0} - \frac{1}{c^2M_1} = 0$, et

$$\frac{c}{\mu_0^3} - \frac{p_0^2}{c^3M_1^3} + \frac{a^2}{cM_1} - \frac{1}{c\mu_0^2} - \frac{a^2}{c\mu_1} + \frac{1}{c\mu_0^2} = 0 .$$

En substituant pour $\frac{1}{D'}$ sa valeur $1 - \frac{ab}{c^2 - a^2}$, et remarquant que l'on a

$$B \left[\frac{a^4 b^2}{c^2 (c^2 - a^2)^2} - \frac{a^2 b^2}{(c^2 - a^2)^2} + \frac{a^2 b^2}{c^2 (c^2 - a^2)} \right] = 0,$$

il viendra

$$z = B + \frac{Aa^2}{bc} - \frac{Aa^2(c^2 - b^2)}{b} (c^2 - 2bc \cos \theta_1 + b^2)^{-\frac{3}{2}} \\ - \frac{Bab}{c^2(c^2 - a^2)} \left\{ \begin{aligned} & a^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2b}{c} \cos \theta_1 + \frac{b^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ & + c^2 \left(1 - \frac{2b}{c} \cos \theta_1 + \frac{b^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ & - c^2 \left(1 - \frac{2bc}{c^2 - a^2} \cos \theta_1 + \frac{b^2 c^2}{(c^2 - a^2)^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\};$$

où l'on a $\mu_0 = c^2 - a^2$.

Maintenant, si l'on développe les deux derniers termes, nous aurons

$$(209) \dots z = B + \frac{Aa^2}{b} \left\{ \frac{1}{c} - \frac{(c^2 - b^2)}{c^3} \left(1 - \frac{2b}{c} \cos \theta_1 + \frac{b^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right\} \\ + \frac{Aa^3 b^2}{c^5} - \frac{Aa^3 b^2}{c^5} - 3Bab^2 \left\{ \frac{1}{c^3} - \frac{c}{(c^2 - a^2)^2} \right\} \cos \theta_1.$$

Telle est la valeur de z , mathématiquement exacte jusqu'aux quantités de l'ordre b^2 inclusivement. En la comparant avec l'expression de y donnée par la formule (208) l'on voit, qu'elle ne résulte pas de cette dernière par une simple permutation entre les lettres; ce qui confirme la remarque faite, sur ce point, dans le § précédent.

En supprimant dans la dernière valeur de z les termes multipliés par b^2 , l'on aura

$$z = B + \frac{Aa^2}{bc} - \frac{Aa^2(c^2 - b^2)}{b(c^2 - 2bc \cos \theta_1 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or il est manifeste que l'on aurait, d'un coup, cette même expression de z en permutant les lettres A et B ainsi que a et b dans le second membre de l'équation (208). Mais il était nécessaire de démontrer, que cette dernière valeur de z n'est pas (comme celle de y) exacte jusqu'aux quantités de l'ordre b^2 , inclusivement. Au reste, si l'on y remplace le radical

$$\left(1 - \frac{2b}{c} \cos \theta_1 + \frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

par $1 + \frac{3b}{c} \cos \theta_1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{b^2}{c^2} + \frac{15}{2} \cdot \frac{b^3}{c^3} \cos^2 \theta_1$, l'on aura

$$z = B - \frac{3Aa^2}{c^2} \cos \theta_1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{Aa^2b}{c^3} - \frac{15}{2} \cdot \frac{Aa^2b}{c^3} \cos^2 \theta_1 ;$$

ce qui s'accorde avec la valeur de z que l'on voit dans la page 88 du premier Mémoire de Poisson. On sait maintenant, par la discussion que je viens d'exposer, que ce résultat est fantif, analytiquement parlant, puisque toutes les quantités d'un même ordre n'y sont pas conservées.

Dans le cas particulier où la sphère du rayon b est soumise (sans être préalablement électrisée) à l'influence de la sphère du rayon a , électrisée et isolée, l'on doit faire $B=0$. Alors, pour déterminer la position du cercle qui sépare les deux fluides contraires sur la surface de la sphère du rayon b , il faut établir l'équation $z=0$, laquelle, en employant la formule (209) se réduit à celle-ci ;

$$1 - \frac{2b}{c} \cos \theta_1 + \frac{b^2}{c^2} = \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} ;$$

d'où l'on tire en négligeant les termes multipliés par b^3 ;

$$(210) \dots\dots\dots \cos \theta_1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{b}{c} .$$

Cette formule s'accorde avec celle donnée par Poisson dans la dernière ligne de la page 89 ; mais cet accord cesserait d'avoir lieu, si l'on n'avait pas $B=0$.

Les mêmes formules (195) et (196), en négligeant les termes qui seraient divisés par c^4 , se réduisent d'abord à celles-ci ;

$$\begin{aligned}
D a y &= A f_1(b, a, c) - B f_2(a, b, c) - B \frac{ab}{p_0} f_3(a, b, c) - B \frac{ab^2}{c M_1} f_1(a, b, c) \\
&\quad + A f_1(b, a, c) \cdot \frac{ab}{p_0} \left(1 - \frac{2ac}{p_0} \cos \theta + \frac{a^2 c^2}{p_0^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + \frac{Ab}{c} f_2(b, a, c) \cdot \left(1 - \frac{2a}{c} \cos \theta + \frac{a^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad - \frac{Bb}{c} f_1(a, b, c) \cdot \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{2a}{c} \cos \theta + \frac{a^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} ; \\
D b z &= B f_1(a, b, c) - A f_2(b, a, c) - A \frac{ab}{\mu_0} f_3(b, a, c) - A \frac{a^2 b}{c \mu_1} f_1(b, a, c) \\
&\quad + B f_1(a, b, c) \cdot \frac{ab}{\mu_0} \left(1 - \frac{2bc}{\mu_0} \cos \theta_1 + \frac{b^2 c^2}{\mu_0^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + \frac{Ba}{c} f_2(a, b, c) \cdot \left(1 - \frac{2b}{c} \cos \theta_1 + \frac{b^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad - \frac{Aa}{c} f_1(b, a, c) \cdot \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{2b}{c} \cos \theta_1 + \frac{b^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} .
\end{aligned}$$

Mais nous avons $p_0 = c^2 - b^2$; $\mu_0 = c^2 - a^2$: donc en ayant égard aux équations (207), il viendra

$$\begin{aligned}
y &= \frac{A}{D'} \left\{ 1 + \frac{ab}{\mu_0} \right\} + \frac{Bb^2}{acD'} \left(1 + \frac{ab}{M_1} \right) + \frac{Bb^3}{c(c^2 - b^2)} - \frac{Bb^3}{cM_1} + \frac{Bab^2}{c^3} \\
&\quad + \left\{ \frac{Aab}{\mu_0} - \frac{Aab}{c^2} - \frac{Bb^2}{acD'} \left(1 + \frac{ab}{p_0} \right) \right\} \left(1 - \frac{2a}{c} \cos \theta + \frac{a^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} ; \\
z &= \frac{B}{D'} \left\{ 1 + \frac{ab}{p_0} \right\} + \frac{Aa^2}{bcD'} \left(1 + \frac{ab}{M_1} \right) + \frac{Aa^3}{c(c^2 - a^2)} - \frac{Aa^3}{cM_1} + \frac{Aba^2}{c^3} \\
&\quad + \left\{ \frac{Bab}{\mu_0} - \frac{Bab}{c^2} - \frac{Aa^2}{bcD'} \left(1 + \frac{ab}{\mu_0} \right) \right\} \left(1 - \frac{2b}{c} \cos \theta_1 + \frac{b^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} .
\end{aligned}$$

Et comme $\frac{1}{D'} = 1 - \frac{ab}{c^2 - a^2}$, il est clair que, en négligeant la totalité des termes qui seraient divisés par c^4 , l'on a ;

$$(211) \dots y = A + \frac{Bb^2}{ac} + \frac{Bab^2}{c^3} - \frac{Bb^2}{ac} \left(1 - \frac{2a}{c} \cos \vartheta + \frac{a^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} ;$$

$$(212) \dots z = B + \frac{Aa^2}{bc} + \frac{Ab a^2}{c^3} - \frac{Aa^2}{bc} \left(1 - \frac{2b}{c} \cos \vartheta_1 + \frac{b^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} .$$

Le rapprochement de ces formules avec celles désignées par (208) et (209), offre la véritable distinction existente entre les deux cas que nous venons d'examiner.

§ XX.

Les formules générales (195) et (196) subissent une modification remarquable, lorsque les surfaces des deux sphères électrisées, après avoir été mises d'abord en contact sont séparées pour être replacées à la même distance. Alors, le rapport des deux épaisseurs primitives A et B cesse d'être arbitraire : il devient une quantité nécessairement déterminée par les formules du § IX, ce qui donne pour y et z des expressions de la forme, $y = AP$, $z = AQ$; où P est une fonction des trois paramètres a , b , c et de la variable $\cos \vartheta$; et Q une fonction semblable de a , b , c , $\cos \vartheta_1$. Je vais analyser ce qui se passe dans cette circonstance dans un cas particulier fort simple.

En faisant $\vartheta_1 = 0$, la formule (209) donne

$$z = A \left\{ \frac{B}{A} - \frac{3ab^2}{c^3} \cdot \frac{B}{A} \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right)^{-2} \right] + \frac{a^2}{bc} - \frac{a^2}{bc} \left(1 + \frac{b}{c} \right) \left(1 - \frac{b}{c} \right)^{-2} \right\} ;$$

d'où l'on tire en développant et négligeant le cube de b ;

$$(213) \dots z = A \left\{ \begin{aligned} & \frac{B}{A} - \frac{3a^3}{c^3} - \frac{5a^2b}{c^3} - \frac{7a^3b^2}{c^6} \\ & - \frac{3ab^3}{c^3} \cdot \frac{B}{A} \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right)^{-2} \right] \end{aligned} \right\}.$$

Supposons maintenant, que les centres des deux sphères ont été amenés à la distance c , après avoir été électrisées et mises en contact. Alors, le rapport $\frac{B}{A}$ sera une quantité positive et déterminée, toujours comprise entre l'unité et $\frac{\pi^2}{6} = 1,6449$, ainsi que nous l'avons démontré dans le § X. Donc, la quantité qui multiplie A dans cette valeur de z sera négative pour toute valeur de c , telle que l'on ait

$$\frac{3a^2}{c^2} > \frac{B}{A} \left[1 - \frac{3ab^3}{c^3} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right)^{-2} \right) \right] :$$

ce qui aura lieu, en général, à une petite distance du contact. De sorte que, à cette distance, sur la sphère du rayon $b < a$, il y aura une électricité *contraire* à celle qui a lieu sur la sphère du rayon a au point qui répond à $\theta = 0$. En augmentant la distance c , la valeur négative de z diminuera, et il y aura un point où l'on aura $z = 0$, sans que l'on ait en même temps $y = 0$.

Pour déterminer, au moins par approximation, cette valeur très-remarquable de la distance c , il faudra résoudre une équation de la forme, $0 = a - x - \varphi(x)$; où l'on a, $\frac{a}{c} = \sqrt{x}$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{B}{A} = a$, et

$$\varphi(x) = \frac{5}{3} \cdot \frac{b}{a} x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^3}{a^3} \cdot \frac{B}{A} x^{\frac{3}{2}} \left[1 - (1-x)^{-2} \right].$$

Donc en appliquant ici la série de LAGRANGE, l'on aura, en négligeant le cube de b ;

$$x^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} \varphi(a) - \frac{1}{4} \cdot \frac{d}{da} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} \varphi(a) \right\};$$

d'où l'on tire

$$\frac{c}{a} = a^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} \varphi(a) - \frac{25}{24} \cdot \frac{b^2}{a^2} a^{\frac{1}{2}}.$$

En substituant pour $\varphi(a)$ et pour a sa valeur, il viendra

$$(214) \dots \frac{c}{a} = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}} + \frac{5}{6} \cdot \frac{b}{a} \\ + \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left\{ \frac{\sqrt[3]{3}}{4} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{3B}{A} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{B}{A}\right)^{-1} \right] \right\}.$$

D'après la série (81), nous avons

$$\frac{B}{A} = \frac{S_2 a^2}{(a+b)^2} + \frac{S_3 a^2 b}{(a+b)^3} + \frac{[S_4 + (S_2)^2] a^2 b^2}{(a+b)^4} + \text{etc.};$$

ce qui donne

$$\frac{B}{A} = H \left(1 + \frac{H'}{H} \cdot \frac{b}{a} + \frac{H''}{H} \cdot \frac{b^2}{a^2} \right),$$

en posant

$$H = S_2 = \frac{\pi^2}{6}; \quad H' = S_3 - 2S_2; \quad H'' = 3S_4 - 3S_3 + S_4 + (S_2)^2.$$

Il suit de là, que l'on peut faire $\frac{B}{A} = \frac{\pi^2}{6}$ dans les termes multipliés par $\frac{b^2}{a^2}$; et alors l'on a

$$(215) \dots \frac{c}{a} = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}} + \frac{5}{6} \cdot \frac{b}{a} \\ + \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left\{ \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi^2}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{\pi^2}{18}\right)^{-1} \right] \right\}.$$

Mais $S_4 = \frac{\pi^4}{90}$, et

$$\left(\frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{H'}{H} \cdot \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{H''}{H} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{H'}{H}\right)^2 \frac{b^2}{a^2} \right\};$$

donc en substituant cette valeur, et ordonnant suivant les puissances

de $\frac{b}{a}$ l'on trouvera ;

$$(216) \dots \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} + \frac{b}{a} \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{\pi} + \frac{5}{6} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \cdot \frac{S_3}{S_2} \right\} \\ - \frac{1}{12} \cdot \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{79\sqrt{2}}{20} \pi - \pi^2 - \frac{27\sqrt{2}}{2\pi} \left(\frac{S_3}{S_2} \right)^2 + \pi^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{18} \right)^{-2} \right\} ;$$

et par conséquent l'on a

$$(217) \dots c - a - b = a \left(\frac{3\sqrt{2}}{\pi} - 1 \right) + b \left(\frac{3\sqrt{2}}{\pi} - \frac{1}{6} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \cdot \frac{S_3}{S_2} \right) \\ - \frac{a}{12} \cdot \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{79\sqrt{2}}{20} \pi - \pi^2 - \frac{27\sqrt{2}}{2\pi} \left(\frac{S_3}{S_2} \right)^2 + \pi^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{18} \right)^{-2} \right\} ,$$

pour expression de la distance qui sépare les surfaces des deux sphère.

Comme l'on a

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.} = 1,2020569 ; \quad S_2 = 1,6449340 ,$$

l'on trouvera, en réduisant en nombres les coefficients,

$$(218) \dots c - a - b = a \left[(0,35048) + \frac{b}{a} (0,690375) - \frac{b^2}{a^2} (4,40080) \right] .$$

En appliquant cette formule à l'expérience de COULOMB, citée par POISSON à la page 13 de son premier Mémoire, pour laquelle l'on avait $a = 5,5$; $b = 1$, l'on obtient

$$c - a - b = 1,927400 + 0,690375 - 0,800144 = 1,817631 .$$

COULOMB avait trouvé $2 + \frac{5}{12} = 2,416667$; ce qui donne

$$2,416667 - 1,817631 = 0,599036$$

pour la différence entre l'observation et la théorie. Ainsi, cette différence

est à-peu-près la même que l'on aurait sans tenir compte du second et du troisième terme qui entre dans la valeur de $c-a-b$. Mais il est important de remarquer, que l'élimination de $\frac{B}{A}$, de l'équation (214), a influé sur la convergence de l'équation (217): car en calculant ce même exemple par la formule (214), où l'on a

$$\frac{B}{A} = 1,37999 ,$$

l'on trouve

$$c-a-b = 2,609365 - 0,166667 - 0,286927 = 2,155771 .$$

COULOMB rapporte dans la même page 450 (*) une autre expérience, où il avait $a=5,5$; $b=2$; et $c-a-b=2$. Notre formule (214), en y faisant $\frac{B}{A} = 1,23510$, donne

$$c-a-b = 3,071805 - 0,333333 - 0,19756 = 2,540912 .$$

Ainsi, il faudrait pousser plus loin la série pour diminuer ces différences entre l'observation et la théorie.

Tandis que l'on a $z=0$ au point où $\theta_1=0$, l'on a, en vertu de cette même équation, au point diamétralement opposé,

$$Z' = A \left\{ \frac{a^2}{bc} \left(1 + \frac{b}{c} \right) \left(1 - \frac{b}{c} \right)^{-2} - \frac{a^2}{bc} \left(1 - \frac{b}{c} \right) \left(1 + \frac{b}{c} \right)^{-2} \right\} \\ + 6 \frac{ab^2}{c^3} \cdot B \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right)^{-2} \right] ;$$

ou bien

$$Z' = 2A \frac{a^2}{c^2} \left(3 + 7 \frac{b^2}{c^2} \right) + A \frac{6B}{A} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{a}{c} \right)^3 \frac{((c^2 - a^2)^2 - c^4)}{(c^2 - a^2)^2} .$$

(*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1787.

De sorte que nous avons au point où $\cos \theta_1 = -1$;

$$Z' = 6A \frac{a^2}{c^2} + A \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{7\pi^2}{162} + A \frac{b^2}{a^2} \cdot \pi^2 \left(\frac{a}{c} \right)^3 \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right)^{-2} \right] .$$

En donnant à l'équation (216) la forme

$$\frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \left\{ 1 + \frac{b}{a} G - \frac{b^2}{12 \cdot a^2} G' \right\} ,$$

l'on aura

$$(219) \dots Z' = A \frac{\pi^2}{3} \left(1 - 2 G \frac{b}{a} \right) \\ + A \pi^2 \frac{b^2}{a^2} \left\{ G^2 + \frac{G'}{18} + \frac{7\pi^2}{162} - \frac{\sqrt{2}}{108} \pi^3 \left[\left(1 - \frac{\pi^2}{18} \right)^{-2} - 1 \right] \right\} .$$

D'après le calcul précédent l'on a

$$G = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} (1,690375) , \quad G' = 2\pi\sqrt{2} (4,4008) ;$$

et par conséquent

$$(220) \dots Z' = A \left\{ 3,28987 - \frac{b}{a} (8,2339) + \frac{b^2}{a^2} (25,4435) \right\} .$$

On voit donc que, sur la sphère du rayon b , l'épaisseur de la couche électrique pourra être deux fois et demi plus grande que sur la sphère du rayon a , pourvu que l'on ait $\frac{b}{a} = \frac{1}{10}$. Cependant cette épaisseur serait moindre que celle qui a lieu au même point pendant le contact des deux sphères: car en prenant $a=1$ et $b=\frac{1}{10}$, les formules (93) et (79) donnent

$$Z = A \frac{3,21145}{0,99955} = 3,21437 .$$

En rapprochant les équations (93) et (219) l'on en conclura que, en négligeant les termes multipliés par $\frac{b}{a}$, les intensités Z et Z' qui se

succèdent sur le point de la petite sphère opposé au contact sont entre elles dans le rapport constant

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{7}{4} \cdot \frac{S_3}{S_1} = 1,2788.$$

Pour savoir ce que devient la valeur γ' de γ , correspondante à $\vartheta=0$ et à la valeur de c ainsi déterminée, il suffira de faire $\frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}$ dans la formule (208), ce qui donnera

$$(221) \dots \gamma' = A \left[1 - \frac{\pi^4}{36} \cdot \frac{b^3}{a^3} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{18}\right)}{\left(1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\right)^3} \right];$$

et sur le point diamétralement opposé l'on aura

$$(222) \dots Y' = A \left[1 + \frac{\pi^4}{36} \cdot \frac{b^3}{a^3} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{18}\right)}{\left(1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\right)^3} \right];$$

et en réduisant en nombres il viendra

$$(223) \dots \gamma' = A \left(1 - \frac{b^3}{a^3} (30,2587) \right);$$

$$(224) \dots Y' = A \left(1 + \frac{b^3}{a^3} (1,11369) \right).$$

A l'aide de ces résultats numériques, il sera facile de comparer cette théorie avec l'observation dans les cas où la fraction $\frac{b}{a}$ ne surpassera pas $\frac{1}{10}$. Mais, lorsque la fraction $\frac{b}{a}$ sera fort approchante de $\frac{1}{3}$, il conviendra de remplacer les formules (221) et (222) par celles que l'on obtient immédiatement, sans l'élimination de $\frac{B}{A}$ et de $\frac{c}{a}$: c'est-à-dire que l'on prendra;

$$(225) \dots J = A \left\{ 1 - \frac{B}{A} \cdot \frac{b^3}{c} \cdot \frac{(3c-a)}{(c-a)^2} \right\} ;$$

$$(226) \dots I = A \left\{ 1 + \frac{B}{A} \cdot \frac{b^3}{c} \cdot \frac{(3c+a)}{(c+a)^2} \right\} .$$

Soit, par exemple, $a=1$, $b=\frac{1}{3}$: alors l'on a $\frac{B}{A}=1,25421$ et la formule (214) donne $c=1,69737$: partant nous avons par ces dernières formules

$$J' = A(0,309169) ; \quad Y' = A(1,068744) .$$

Pour avoir avec plus d'exactitude la valeur de J' , il serait nécessaire de tenir compte des termes multipliés par b^3 . Pour cela, il faudra développer la formule (200), laquelle donne, en y négligeant tous les termes multipliés par b^4 , ce résultat fort simple; savoir

$$(227) \dots J = A \left\{ 1 - \frac{B}{A} \cdot \frac{b^3}{c} \cdot \frac{(3c-a)}{(c-a)^2} \right\} - A \frac{ab^3}{c^3} \\ + A \frac{ab^3}{c^2(c-a)^3} \left(c + 3a - a \frac{B}{A} \right) .$$

De là l'on tire

$$J' = A \{ 0,309169 - 0,0044625 + 0,130512 = 0,435219 \} .$$

La formule (220) exige que l'on ait $\frac{b}{a} < \frac{1}{7}$ pour pouvoir négliger les termes suivans de la série. Mais, pour les valeurs de $\frac{b}{a}$ comprises entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{3}$ il conviendra de s'en tenir à la valeur de Z beaucoup plus convergente que l'on obtient en posant $\cos \theta_1 = -1$ dans la formule (209); ce qui donne

$$(228) \dots Z = B \left\{ 1 + \frac{A}{B} \cdot \frac{a^3}{c} \left[\frac{3c+b}{(c+b)^3} \right] + 3 \frac{b^3}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{c} \right)^3 \cdot \frac{(c^2-a^2)^2 - c^4}{(c^2-a^2)^2} \right\} .$$

Cette formule peut être appliquée avant et après le contact, parceque

les valeurs de $\frac{A}{B}$ et c conservent leur généralité primitive. En y faisant, comme dans l'exemple précédent,

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}; \quad \frac{B}{A} = 1,25421; \quad c = 1,69737;$$

l'on trouve,

$$Z' = B \left\{ 1 + 0,61801 - 0,091736 = 1,52627 \right\},$$

tandis que la formule (220) donne un résultat qui ne mérite aucune confiance eu égard à la grandeur du terme multiplié par $\frac{b^2}{a^2}$. Cela prouve seulement que l'élimination de $\frac{B}{A}$ et de $\frac{c}{a}$, à l'aide des équations (81) et (216), a contribué à rendre moins convergente la série formée par cette combinaison.

Je reprends la considération de l'équation (227) pour exposer ici les principaux points de sa démonstration. D'abord l'on trouvera, que la formule (200) donne (en négligeant tous les termes multipliés par b^4 et faisant $\frac{1}{D'} = 1$ dans ceux multipliés par b^3);

$$\begin{aligned} y = & \frac{A}{D'} \left\{ 1 + \frac{ab}{M_1} + \frac{a^2 b^2}{M_1^2} + \frac{a^3 b^3}{M_1^3} - \frac{ab^3}{M_1^2} \right\} + \frac{Bb^2}{acD'} \left(1 + \frac{ab}{M_1} \right) \\ & + \frac{Aab}{D'M_1} \left\{ 1 + \frac{a(a+c)}{M_1} \right\} \left\{ 1 + \frac{a(a-c)}{M_1} \right\}^{-2} \left(1 + \frac{2ab}{M_1} + \frac{3a^2 b^2}{M_1^2} \right) \\ & - \frac{Aab(c+a)}{cD'(c-a)^2} \left(1 + \frac{2ab}{M_1} + \frac{3a^2 b^2}{M_1^2} \right) \\ & - \frac{Bb^2(c+a)}{D'a(c-a)^2} \left(1 + \frac{2ab}{M_1} \right) + \frac{Bb^3}{cM_1} \left\{ 1 + \frac{a(a+c)}{M_1} \right\} \left\{ 1 + \frac{a(a-c)}{M_1} \right\}^{-2}. \end{aligned}$$

Relativement à la fonction $\frac{1}{D'}$, je placerai ici sa valeur développée jusqu'à la cinquième puissance de b inclusivement, parceque ce résultat

nous sera utile par la suite. D'après la formule posée dans le § XVIII l'on trouvera d'abord ;

$$D' = 1 + \frac{ab}{\mu_0} + \frac{a^2b^2}{\mu_1} + \frac{a^3b^3}{\mu_2} + \frac{a^4b^4}{\mu_3} + \frac{a^5b^5}{\mu_4} \\ + ab \left(\frac{1}{c^2 - a^2} - \frac{1}{c^2} \right) + \frac{a^2b^4}{c^4 M_1} + \frac{a^3b^5}{c^4 M_1^2} ;$$

et en substituant pour $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_4$ et M_1 leur valeur, l'on verra, que ;

$$D' = \left\{ 1 + \frac{ab}{c^2 - a^2} + \frac{a^2b^2}{(c^2 - a^2)^2} + \frac{a^3b^3}{(c^2 - a^2)^3} \right\} + \frac{ab^3}{c^4} \\ + \frac{a^2b^4}{c^4(c^2 - a^2)} \left\{ 1 + \frac{c^6}{(c^2 - a^2)^3} \right\} + \frac{ab^5}{c^6} \left\{ 1 + \frac{a^2c^2}{(c^2 - a^2)^2} + \frac{a^2c^6(4a^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)^5} \right\} ;$$

d'où l'on tire

$$(229) \dots \frac{1}{D'} = 1 - \frac{ab}{c^2 - a^2} - \frac{ab^3}{c^4} - a^4b^4 \frac{(2c^2 - a^2)}{c^4(c^2 - a^2)^3} \\ - ab^5 \left\{ \frac{(c^2 - a^2)^5 - a^2c^6(3c^2 - 5a^2)}{c^6(c^2 - a^2)^5} \right\} .$$

Cela posé, il n'y a plus aucune difficulté pour parvenir à l'équation (227), après avoir observé que l'on a ;

$$D' - \frac{ab^3}{c^4} = 1 + \frac{ab}{M_1} + \frac{a^2b^2}{M_1^2} + \frac{a^3b^3}{M_1^3} - \frac{ab^3}{M_1^2} .$$

§ XXI.

Il est actuellement facile de pousser plus loin l'analyse du cas que nous venons de considérer, et même de former l'équation générale de laquelle l'on doit tirer la valeur de c , telle, que, à la distance $c - a - b$ des deux surfaces sphériques, l'intensité de la couche électrique soit nulle sur la sphère du plus petit rayon b , au point correspondant à $\theta_1 = 0$. Pour cela, il suffit d'égaliser à zéro le second membre de l'équation (201), pris avec les signes supérieurs. De cette manière, en ayant égard aux

équations (207) l'on obtiendra une équation qui peut être écrite ainsi :
savoir

$$(228) \dots \left\{ \begin{aligned} & \frac{B}{3A} - \frac{a^2}{c^2} + G + G' - G'' - G''' \\ & + \frac{B}{A} G^{\text{iv}} - \frac{B}{A} G^{\text{v}} + \frac{B}{3A} \left(\frac{1}{D'} - 1 \right) + \frac{B}{3A} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} \end{aligned} \right\} = 0 ;$$

où l'on a fait, pour plus de simplicité ;

$$D'G = \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^2}{3cb} - \frac{a^2}{3cb} \cdot \frac{\left(1 + \frac{b}{c}\right)}{\left(1 - \frac{b}{c}\right)^2} - \frac{a^2}{c^2} (1 - D') ;$$

$$D'G' = \frac{a^2}{3bc} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ab)^i}{M_i} - \frac{a^2}{3cb} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ab)^i}{1} \cdot \frac{\left\{ \left(1 + \frac{b}{c}\right) M_i + \frac{ba^2}{c} M_{i-1} \right\}}{\left\{ \left(1 - \frac{b}{c}\right) M_i - \frac{ba^2}{c} M_{i-1} \right\}^2} ;$$

$$D'G'' = \frac{a^2}{3bc} \cdot \frac{\left(1 + \frac{b}{c}\right)}{\left(1 - \frac{b}{c}\right)^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} \\ - \frac{a^2}{3bc} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i}{M_i} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{c} \cdot \frac{\left\{ M_{i+1} + bc \left(1 + \frac{b}{c}\right) M_i \right\}}{\left\{ M_{i+1} - bc \left(1 - \frac{b}{c}\right) M_i \right\}^2} ;$$

$$D'G''' = \frac{a^2}{3bc} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ab)^i}{1} \cdot \frac{\left\{ \left(1 + \frac{b}{c}\right) M_i + \frac{ba^2}{c} M_{i-1} \right\}}{\left\{ \left(1 - \frac{b}{c}\right) M_i - \frac{ba^2}{c} M_{i-1} \right\}^2} ;$$

$$D'G^{\text{iv}} = \frac{1}{3} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} \right\} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{c} \cdot \frac{\left\{ M_{i+1} + bc \left(1 + \frac{b}{c}\right) M_i \right\}}{\left\{ M_{i+1} - bc \left(1 - \frac{b}{c}\right) M_i \right\}^2} ;$$

$$D'G^v = \frac{ab}{3c^3} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i}{M_i} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^i \left\{ \left(1 + \frac{b}{c}\right) M_i + \frac{ba^2}{c} M_{i-1} \right\}}{\left\{ \left(1 - \frac{b}{c}\right) M_i - \frac{ba^2}{c} M_{i-1} \right\}^2}.$$

Les fonctions $G, G', \dots, G^v$ sont, chacune, développables suivant les puissances entières et positives de b , sans qu'il y ait aucun terme indépendant de b . De sorte que l'on aura;

$$G = b\Pi_1(a, b, c); \quad G' = b\Pi_2(a, b, c);$$

$$G'' = b\Pi_3(a, b, c); \quad G''' = b\Pi_4(a, b, c);$$

$$G^{iv} = b\Pi_5(a, b, c); \quad G^v = b\Pi_6(a, b, c);$$

$$G^v = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{p_i} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{D'} - 1 \right) = b\Pi_7(a, b, c).$$

Maintenant, si l'on fait $a = \frac{B}{3A}$; $\frac{a}{c} = \sqrt{x}$, et

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot \varphi\left(\frac{b}{a}, \frac{a}{c}\right) &= \Pi_1(a, b, c) + \Pi_2(a, b, c) - \Pi_3(a, b, c) - \Pi_4(a, b, c) \\ &\quad + \frac{B}{A} \left\{ \Pi_5(a, b, c) - \Pi_6(a, b, c) + \Pi_7(a, b, c) \right\}, \end{aligned}$$

nous aurons l'équation

$$(231) \dots 0 = a - x + \frac{b}{a} \varphi\left(\frac{b}{a}, \sqrt{x}\right),$$

de laquelle l'on pourra tirer la valeur de $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{a}$ ordonnée suivant les puissances de $\frac{b}{a}$, à l'aide de la série de LAGRANGE; c'est-à-dire que l'on a;

$$\begin{aligned} (232) \dots \frac{c}{a} &= a^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{b}{a} \varphi\left(\frac{b}{a}, \sqrt{a}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{2a^3} \cdot \frac{d}{da} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} \varphi^2\left(\frac{b}{a}, \sqrt{a}\right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot a^3} \cdot \frac{d^2}{da^2} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} \varphi^3\left(\frac{b}{a}, \sqrt{a}\right) \right\} - \text{etc.}; \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
 (233) \quad \dots \quad \frac{c-a-b}{a} = & \left(a^{-\frac{1}{3}} - 1 \right) - \frac{b}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} \varphi \left(\frac{b}{a}, \sqrt{a} \right) \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{2a^2} \cdot \frac{d}{da} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} \varphi^2 \left(\frac{b}{a}, \sqrt{a} \right) \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot a^3} \cdot \frac{d^2}{da^2} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} \varphi^3 \left(\frac{b}{a}, \sqrt{a} \right) \right\} \\
 & - \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Après avoir exécutées les opérations indiquées dans le second membre de cette équation, il faudra remplacer a par $\frac{B}{3A}$; et comme la distance $c-a-b$ est celle qui a lieu après le contact des deux sphères électrisées, l'on pourra substituer pour $\frac{B}{3A}$ sa valeur en série, conformément à la formule (81). Mais il vaudra mieux s'abstenir de faire cette substitution parceque elle est nuisible à la convergence de la série.

En supprimant tous les termes multipliés par $\frac{b}{a}$ dans le second membre de cette équation l'on aurait

$$c-a-b = a \left(a^{-\frac{1}{3}} - 1 \right).$$

La limite vers laquelle converge a à mesure que b diminue est $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{6}$: donc en prenant $a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{6}$, il viendra

$$c-a-b = a \left(\sqrt{\frac{18}{\pi^3}} - 1 \right),$$

ou bien

$$c-a-b = a (\sqrt{1,82378} - 1).$$

Ce résultat se rapproche de celui de COULOMB, qui trouvait

$$c-a-b = a (\sqrt{2} - 1) \quad (*) :$$

(*) Voyez page 451 du Volume cité plus haut.

mais cette comparaison démontre seulement la distance immense qu'il y avait entre la véritable équation et celle établie par COULOMB.

En développant les fonctions G , G' , etc. suivant les puissances de $\frac{b}{a}$ jusqu'à la cinquième inclusivement, et faisant pour plus de simplicité,

$p = \frac{a}{b}$, $q = \frac{a}{c}$, $r = \frac{a^2}{M}$, l'on obtiendra les résultats suivans;

$$D'G = -p q^3 \left\{ \frac{5}{3} + \frac{7}{3} p q + 3 p^2 q^2 + \frac{11}{3} p^3 q^3 + \frac{13}{3} p^4 q^4 \right\} - q^3 (1 - D') ;$$

$$D'G' = -r p q^3 (1 + r)$$

$$-r p^3 q^3 \left\{ \frac{5}{3} q + r \left(1 + \frac{10}{3} q \right) + r^2 \left(1 + \frac{5}{3} q \right) \right\}$$

$$-r p^3 q^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{3} q^2 + r \left(\frac{5}{3} q + 7 q^2 \right) + r^2 \left(1 + \frac{10}{3} q + 7 q^2 \right) \\ + r^3 \left(1 + \frac{5}{3} q + \frac{7}{3} q^2 \right) \end{array} \right\}$$

$$-r p^3 q^2 \left\{ \begin{array}{l} 3 q^3 + r \left(\frac{7}{3} q^2 + 12 q^3 \right) + r^2 \left(\frac{5}{3} q + 7 q^2 + 18 q^3 \right) \\ + r^3 \left(2 + \frac{10}{3} q + 7 q^2 + 12 q^3 \right) \\ + r^4 \left(3 + \frac{5}{3} q + \frac{7}{3} q^2 + 3 q^3 \right) \end{array} \right\}$$

$$-r p^3 q^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{3} q^4 + r \left(3 q^3 + \frac{55}{3} q^4 \right) + r^2 \left(\frac{7}{3} q^2 + 12 q^3 + \frac{110}{3} q^4 \right) \\ + r^3 \left(\frac{10}{3} q + 7 q^2 + 18 q^3 + \frac{110}{3} q^4 \right) \\ + r^4 \left(3 + 10 q + 7 q^2 + 12 q^3 + \frac{55}{3} q^4 \right) \\ + r^5 \left(5 + \frac{20}{3} q + \frac{7}{3} q^2 + 3 q^3 + \frac{11}{3} q^4 \right) \end{array} \right\} ;$$

$$\begin{aligned}
 D'G'' = & \quad rp \left\{ q^2 - r \left(1 + \frac{1}{3}q \right) \right\} \\
 & + rp^2 \left\{ \frac{5}{3}q^3 + rq^2 - r^2 \left(2 + \frac{2}{3}q \right) - \frac{5}{3} \cdot \frac{r^2}{q} \right\} \\
 & + rp^3 \left\{ \begin{aligned} & \frac{7}{3}q^4 - r \left(q^3 - \frac{5}{3}q^3 \right) + r^2 \left(2 + \frac{1}{3}q + q^2 \right) \\ & - r^3 (3 + q) - \frac{r^3}{q^2} \left(\frac{7}{3} + \frac{10}{3}q \right) \end{aligned} \right\} \\
 & + rp^4 \left\{ \begin{aligned} & 3q^5 - r \left(\frac{5}{3}q^3 + \frac{7}{3}q^4 \right) - r^2 \left(q^2 - \frac{5}{3}q^3 \right) \\ & + r^3 \left(4 + \frac{2}{3}q + 2q^2 \right) - r^4 \left(6 + \frac{4}{3}q \right) \\ & + 5 \frac{r^3}{q} - \frac{r^4}{q^2} \left(3 + \frac{14}{3}q + 5q^2 \right) \end{aligned} \right\} \\
 & + rp^5 \left\{ \begin{aligned} & \frac{11}{3}q^6 - r \left(\frac{7}{3}q^4 - 3q^5 \right) - r^2 \left(-q^2 + \frac{5}{3}q^3 - \frac{7}{3}q^4 \right) \\ & - r^3 \left(3 + \frac{2}{3}q + q^2 - \frac{10}{3}q^3 \right) + r^4 \left(6 + 2q + 3q^2 \right) \\ & - r^5 \left(10 + \frac{5}{3}q \right) + \frac{r^4}{q^2} \left(\frac{28}{3} + 10q \right) \\ & - \frac{r^5}{q^4} \left(\frac{11}{3} + 6q + 7q^2 + 11q^3 \right) \end{aligned} \right\} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D'G''' = & \quad r^2 p q \left(\frac{1}{3} \right) \\
 & + r^2 p^2 q \left\{ q(1+r) + \frac{2}{3}r \right\} \\
 & + r^2 p^3 q \left\{ \frac{5}{3}q^2(1+r)^2 + 2qr(1+r) - \frac{1}{3}r + r^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$+r^3 p^4 q \left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{3} q^3 (1+r)^3 + \frac{10}{3} q^3 r (1+r)^2 - q r (1+r) \\ + 3 q r^3 (1+r) - \frac{2}{3} r^3 + 2 r^3 \end{array} \right\}$$

$$+r^2 p^5 q \left\{ \begin{array}{l} 3 q^4 (1+r)^4 + \frac{14}{3} q^3 r (1+r)^3 - \frac{5}{3} q^2 r^2 (1+r)^2 \\ - 2 q r^3 (1+r) + 6 q r^3 (1+r) + q r^4 \\ + \frac{1}{3} r^2 - r^3 + \frac{11}{3} r^4 + 5 q^2 r^2 (1+r)^2 \end{array} \right\} ;$$

$$D' G'' = p \left(\frac{1}{3} r \right)$$

$$+ p^2 \left\{ \frac{1}{3} r^3 + \frac{r^2}{q} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r^2}{1+r} \right\}$$

$$+ p^3 \left\{ -\frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{3} r^3 + \frac{r^3}{q^2} \left(\frac{5}{3} + q \right) + \frac{r^3}{q(1+r)} \left(1 + \frac{2}{3} q \right) \right\}$$

$$+ p^4 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} r^3 + \frac{2}{3} r^4 - \frac{2r^3}{q} + \frac{r^4}{q} + \frac{r^4}{q^2} \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{3} q \right) \\ + \frac{r^3}{q^2(1+r)} \left(\frac{5}{3} + 2r^2 q - \frac{1}{3} r q^2 + r^2 q^2 \right) \end{array} \right\}$$

$$+ p^5 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{3} r^4 + r^5 - \frac{r^4}{q^3} (1+2q) + \frac{r^5}{q^4} \left(\frac{4}{3} + 2q + \frac{5}{3} q^2 + 3q^3 \right) \\ - \frac{2}{3} \cdot \frac{r^4}{1+r} + \frac{5}{3} \cdot \frac{r^5}{1+r} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^6}{1+r} - \frac{2r^4}{q(1+r)} \\ + \frac{r^5}{q^3(1+r)} \left(\frac{7}{3} + \frac{10}{3} q + 3q^2 \right) \end{array} \right\} ;$$

$$\begin{aligned}
 D' G' &= p q^2 \left(\frac{1}{3} \right) \\
 &+ p^3 q^2 \left(q + \frac{2}{3} r \right) \\
 &+ p^3 q^2 \left\{ \frac{5}{3} q^2 + 2 q r + (1 + q) r^2 \right\} \\
 &+ p^4 q^2 \left\{ 7 q^3 + \frac{10}{3} q^2 r + r^2 \left(3 q + \frac{10}{3} q^2 \right) + r^3 \left(\frac{4}{3} + 2 q + \frac{5}{3} q^2 \right) \right\} \\
 &+ p^5 q^2 \left\{ \begin{aligned} &3 q^4 + \frac{14}{3} q^3 r + r^2 (5 q^2 + 7 q^3) \\ &+ r^3 \left(4 q + \frac{20}{3} q^2 + 7 q^3 \right) + r^4 \left(2 + 3 q + \frac{10}{3} q^2 + \frac{7}{3} q^3 \right) \end{aligned} \right\}; \\
 D' G'' &= \frac{p r}{3(1+r)} \left\{ \begin{aligned} &1 + p r + p^2 r^2 + 2 p^3 r^3 \\ &+ 3 p^4 r^4 - \frac{p^3 r^4}{1+r} - \frac{p^4 r^5}{1+r} \end{aligned} \right\} + \frac{1}{3} (1 - D');
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{D'} = 1 - \frac{p q^2}{1 - q^2} - p^3 q^4 - \frac{p^4 q^8 (2 - q^2)}{(1 - q^2)^3} - p^5 q^6 \frac{\{ (1 - q^2)^5 - q^2 (3 - 5 q^2) \}}{(1 - q^2)^5}.$$

Il suit de là que nous avons

$$D' (G + G' - G'' - G''') = -q^2 (1 - D') + p Q_1 + p^2 Q_2 + p^3 Q_3 + p^4 Q_4 + p^5 Q_5;$$

$$D' (G^{iv} - G^v + G^vi) = \frac{1}{3} (1 - D') + p Q_1' + p^2 Q_2' + p^3 Q_3' + p^4 Q_4' + p^5 Q_5';$$

en posant pour plus de simplicité ;

$$Q_1 = -\frac{5}{3} q^3 - 2 r q^2 + r^2 (1 - q^2);$$

$$Q_2 = -\frac{7}{3} q^4 - \frac{10}{3} r q^3 - r^2 q^2 \left(3 + \frac{10}{3} q \right) + r^3 \left(2 - 2 q^2 - \frac{5}{3} q^3 \right) + \frac{5}{3} \frac{r^4}{q};$$

$$Q_3 = -3q^5 - \frac{14}{3}rq^4 - r^2(-q^2 + 5q^3 + 7q^4)$$

$$-r^3\left(2 + 4q^2 + \frac{20}{3}q^3 + 7q^4\right)$$

$$+r^4\left(3 - 3q^2 - \frac{10}{3}q^3 - \frac{7}{3}q^4\right) + \frac{r^4}{q^2}\left(\frac{7}{3} + \frac{10}{3}q\right);$$

$$Q_4 = -\frac{11}{3}q^6 - 6rq^5 + r^2\left(\frac{5}{3}q^3 - \frac{7}{3}q^4 - 12q^5\right)$$

$$+r^3\left(2q^2 - \frac{20}{3}q^3 - 14q^4 - 18q^5\right)$$

$$-r^4(4 + 6q^2 + 10q^3 + 14q^4 + 12q^5)$$

$$+r^5\left(6 - \frac{2}{3}q - 6q^2 - 5q^3 - \frac{14}{3}q^4 - 3q^5\right)$$

$$-5\frac{r^4}{q} + \frac{r^5}{q^3}\left(3 + \frac{14}{3}q + 5q^2\right);$$

$$Q_5 = -\frac{13}{3}q^7 - \frac{22}{3}rq^6 + r^2\left(\frac{7}{3}q^4 - 9q^5 - \frac{55}{3}q^6\right)$$

$$-r^3\left(q^2 - \frac{10}{3}q^3 + \frac{28}{3}q^4 + 24q^5 + \frac{110}{3}q^6\right)$$

$$+r^4\left(3 + \frac{1}{3}q + 3q^2 - \frac{25}{3}q^3 - 21q^4 - 36q^5 - \frac{110}{3}q^6\right)$$

$$-r^5\left(6 + q + 10q^2 + \frac{55}{3}q^3 + 21q^4 + 24q^5 + \frac{55}{3}q^6\right)$$

$$+r^6\left(10 - 2q - 12q^2 - \frac{35}{3}q^3 - 7q^4 - 6q^5 - \frac{11}{3}q^6\right)$$

$$- \frac{r^5}{q}\left(\frac{28}{3} + 10q\right) + \frac{r^6}{q^3}\left(\frac{11}{3} + 6q + 7q^2 + 11q^3\right);$$

$$Q_1' = -\frac{1}{3}q^2 + \frac{1}{3}r + \frac{1}{3} \cdot \frac{r}{1+r} ;$$

$$Q_2' = -q^3 - \frac{2}{3}rq^2 + \frac{1}{3}r^2 + \frac{r^2}{q} + \frac{2}{3} \cdot \frac{r^2}{1+r} ;$$

$$Q_3' = -\frac{5}{3}q^4 - 2rq^3 - r^2 \left(\frac{1}{3} + q^2 + q^3 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{r^4}{1+r} \\ + \frac{r^3}{q} \left(\frac{5}{3} + q + \frac{1}{3}q^3 \right) + \frac{r^3}{q(1+r)} \left(1 + \frac{2}{3}q \right) ;$$

$$Q_4' = -7q^5 - \frac{10}{3}rq^4 - r^2 \left(3q^3 + \frac{10}{3}q^4 \right) - r^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}q^2 + 2q^3 + \frac{5}{3}q^4 \right) \\ + \frac{2}{3}r^4 - \frac{2r^3}{q} + \frac{r^4}{q^3} \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{3}q + q^2 \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3}{1+r} \\ + \frac{5}{3} \cdot \frac{r^4}{1+r} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^5}{(1+r)^2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{r^3}{q^2(1+r)} + \frac{2r^4}{q(1+r)} ;$$

$$Q_5' = -3q^6 - \frac{14}{3}rq^5 - r^2(5q^4 + 7q^5) + r^3 \left(\frac{1}{3} - 4q^3 - \frac{20}{3}q^4 - 7q^5 \right) \\ - r^4 \left(\frac{1}{3} + 2q^2 + 3q^3 + \frac{10}{3}q^4 + \frac{7}{3}q^5 \right) + r^5 - \frac{r^4}{q^2} (1 + 2q) \\ + \frac{r^5}{q^4} \left(\frac{4}{3} + 2q + \frac{5}{3}q^2 + 3q^3 \right) - \frac{r^4}{q(1+r)} \left(2 + \frac{2}{3}q \right) \\ + \frac{r^5}{q^3(1+r)} \left(\frac{7}{3} + \frac{10}{3}q + 3q^2 + \frac{5}{3}q^3 \right) \\ - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^6}{1+r} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^6}{(1+r)^2} + \frac{8}{3} \cdot \frac{r^5}{1+r} .$$

Cela posé, afin d'éliminer r de ces expressions, il faut observer que l'on a :

$$r = \frac{a^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{q^2}{1 - q^2 - p^2 q^2} ;$$

d'où l'on tire en développant ;

$$\begin{array}{l|l}
 r = \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{p^2 q^4}{(1-q^2)^2} + \frac{p^4 q^6}{(1-q^2)^3} ; & \frac{r^4}{1+r} = \frac{q^8}{(1-q^2)^3} ; \\
 \frac{r}{1+r} = q^2 + p^2 q^4 + p^4 q^6 ; & \frac{r^5}{1+r} = \frac{q^{10}}{(1-q^2)^4} ; \\
 \frac{r^2}{1+r} = \frac{q^4}{1-q^2} + \frac{p^2 q^6 (2-q^2)}{(1-q^2)^2} ; & \frac{r^6}{1+r} = \frac{q^{12}}{(1-q^2)^5} ; \\
 \frac{r^3}{1+r} = \frac{q^6}{(1-q^2)^2} + \frac{p^2 q^8 (3-q^2)}{(1-q^2)^3} ; & \frac{r^7}{(1+r)^2} = \frac{q^{12}}{(1-q^2)^4} .
 \end{array}$$

En substituant ces valeurs l'on trouvera

$$\begin{array}{l|l}
 Q_1 = R_1 + 0 \cdot p^2 + R_1'' p^4 ; & Q_1' = T_1 + T_1' p^2 + T_1'' p^4 ; \\
 Q_2 = R_2 + R_2' p^2 ; & Q_2' = T_2 + T_2' p^2 ; \\
 Q_3 = R_3 + R_3' p^2 ; & Q_3' = T_3 + T_3' p^2 ;
 \end{array}$$

après avoir fait ;

$$\begin{aligned}
 R_1 &= -\frac{5}{3} q^3 - \frac{q^4}{1-q^2} ; & R_1'' &= \frac{q^8}{(1-q^2)^3} ; \\
 R_2 &= -\frac{7}{3} q^4 - \frac{5}{3} \cdot \frac{q^5}{1-q^2} - \frac{q^6}{(1-q^2)^2} ; \\
 R_2' &= -\frac{10}{3} \cdot \frac{q^7}{(1-q^2)^2} + \frac{5 q^7 (3-q^2)}{3(1-q^2)^3} ; \\
 R_3 &= -3 q^5 - \frac{14}{3} \cdot \frac{q^6}{1-q^2} + q^6 \frac{(3-5q-21q^2)}{3(1-q^2)^2} \\
 &\quad + \frac{q^6 (1+4q^2-14q^4)}{3(1-q^2)^3} ;
 \end{aligned}$$

$$R_3' = -\frac{14}{3} \cdot \frac{q^8}{(1-q^2)^2} - \frac{q^8(-2+10q+14q^2)}{(1-q^2)^3} \\ + \frac{q^8(10+40q+28q^2-20q^3+35q^4)}{3(1-q^2)^4} ;$$

$$T_1' = \frac{1}{3} \cdot \frac{q^1}{1-q^2} ; \quad T_1'' = \frac{1}{3} q^1 + \frac{q^4}{3(1-q^2)^2} ; \quad T_1''' = \frac{1}{3} q^6 + \frac{q^6}{3(1-q^2)^3} ;$$

$$T_2 = -q^3 + \frac{q^3\left(1+\frac{1}{3}q\right)}{(1-q^2)^2} ; \quad T_2' = \frac{2}{3} \cdot \frac{q^6}{1-q^2} + \frac{q^5\left(2+\frac{2}{3}q\right)}{(1-q^2)^3} ;$$

$$T_3 = -\frac{5}{3}q^5 - \frac{2q^5}{1-q^2} - \frac{q^4\left(\frac{1}{3}-q+q^3\right)}{(1-q^2)^2} + \frac{q^4\left(\frac{5}{3}+q+\frac{1}{3}q^3\right)}{(1-q^2)^3} ;$$

$$T_3' = -\frac{2q^7}{(1-q^2)^2} - \frac{q^4\left(\frac{2}{3}+2q^2-q^3-3q^4+q^5+q^6\right)}{(1-q^2)^3} \\ + \frac{q^6(5+3q+q^2)}{(1-q^2)^4} .$$

Donc en désignant par $\overline{Q}_4$, $\overline{Q}_5$; $\overline{Q}_4'$, $\overline{Q}_5'$ ce que deviennent les valeurs précédentes de Q_4 , Q_5 ; Q_4' , Q_5' après y avoir remplacé r par $\frac{q^2}{1-q^2}$, l'on trouvera, en substituant pour $\frac{r}{D}$ sa valeur, les deux équations suivantes; savoir :

$$G + G' - G'' - G''' = H_1 p + H_2 p^2 + H_3 p^3 + H_4 p^4 + H_5 q^5 ;$$

$$G'' - G' + G''' = -H_2' p^2 - H_3' p^3 - H_4' p^4 - H_5' q^5 ;$$

où l'on a

$$H_1 = -\frac{5}{3}q^3; \quad H_2 = -\frac{7}{3}q^4; \quad H_3 = q^6 + R_3 - \frac{q^2 R_2}{1-q};$$

$$H_4 = \overline{Q}_4 + R_4' - q^4 R_1 - \frac{q^2 R_3}{1-q^2} + \frac{q^{10}(2-q^2)}{(1-q^2)^3};$$

$$H_5 = q^8 + \overline{Q}_5 + R_5'' + R_3' - q^4 R_2 - \frac{q^2(\overline{Q}_4 + R_4')}{1-q^2} \\ - \frac{q^8(2-q^2)R_1}{(1-q^2)^2} - \frac{q^{10}(3-5q^2)}{(1-q^2)^5};$$

$$H_2' = q^3 \left\{ 1 - (1-q^2)^{-2} \right\}; \quad H_3' = \frac{1}{3}q^4 - T_3 - T_1' + \frac{q^2 T_2'}{1-q};$$

$$H_4' = q^4 T_1 - \overline{Q}_4' - T_2' + \frac{q^2(T_3 + T_1')}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{q^8(2-q^2)}{(1-q^2)^3};$$

$$H_5' = \frac{1}{3}q^6 - \overline{Q}_5' - T_1'' - T_3' + q^4 T_2 + \frac{q^2}{1-q^2}(\overline{Q}_4' + T_2') \\ + \frac{q^8(2-q^2)T_1'}{(1-q^2)^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{q^8(3-5q^2)}{(1-q^2)^5}.$$

Il suit de là, que après avoir remplacé q par $\sqrt{a}$ dans l'expression des coefficients H_1, H_2 etc., l'on aura l'équation

$$\frac{b}{a} z \left(\frac{b}{a}, \sqrt{a} \right) = \frac{b}{a} H_1 + \frac{b^2}{a^2} \left(H_2 - \frac{B}{A} H_2' \right) + \frac{b^3}{a^3} \left(H_3 - \frac{B}{A} H_3' \right) \\ + \frac{b^4}{a^4} \left(H_4 - \frac{B}{A} H_4' \right) + \frac{b^5}{a^5} \left(H_5 - \frac{B}{A} H_5' \right) + \text{etc.}$$

En substituant cette valeur dans le second membre de l'équation (233) il viendra;

$$(234) \dots\dots \frac{c-a-b}{a} = \left(a^{-\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

$$- \frac{b}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{2} H_1 a^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$- \frac{b^2}{2a^2} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} \left(H_2 - \frac{B}{A} H_2' \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{da} \left(H_1^2 a^{-\frac{3}{2}} \right) \right\}$$

$$- \frac{b^3}{2a^3} \left\{ \begin{aligned} & a^{-\frac{5}{2}} \left(H_3 - \frac{B}{A} H_3' \right) + \frac{d}{da} \left(a^{-\frac{3}{2}} H_1 H_2 \right) \\ & - \frac{B}{A} \cdot \frac{d}{da} \left(a^{-\frac{1}{2}} H_1 H_2' \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{d^2}{da^2} \left(H_1^3 a^{-\frac{3}{2}} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$- \frac{b^4}{2a^4} \left\{ \begin{aligned} & a^{-\frac{3}{2}} \left(H_4 - \frac{B}{A} H_4' \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{da} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} (2 H_1 H_3 + H_2^2) \right\} \\ & - \frac{B}{A} \cdot \frac{d}{da} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} (H_1 H_3' + H_2 H_2') \right\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{d}{da} \left(a^{-\frac{3}{2}} H_2'^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{da^2} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} H_1^2 H_2 \right\} - \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{d^2}{da^2} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} H_1^2 H_2' \right\} \\ & + \frac{1}{24} \cdot \frac{d^3}{da^3} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} H_1^4 \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$- \frac{b^5}{2a^5} \left\{ \begin{aligned} & a^{-\frac{3}{2}} \left(H_5 - \frac{B}{A} H_5' \right) + \frac{d}{da} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} (H_1 H_4 + H_2 H_3) \right\} \\ & - \frac{B}{A} \cdot \frac{d}{da} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} (H_1 H_4' + H_3 H_2' + H_2 H_3') \right\} \\ & + \frac{B^2}{A^2} \cdot \frac{d}{da} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} H_2' H_3' \right\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{da^2} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} (H_3 H_1^2 + H_1 H_2) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{d^2}{da^2} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} (H_3' H_1^2 + H_1 H_2') \right\} + \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3}{da^3} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} H_2 H_1^3 \right\} \\ & - \frac{1}{6} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{d^3}{da^3} \left\{ a^{-\frac{3}{2}} H_2' H_1^3 \right\} + \frac{1}{120} \cdot \frac{d^4}{da^4} \left\{ H_1^5 a^{-\frac{3}{2}} \right\} \end{aligned} \right\}$$

— etc.

Mais nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{B}{A} &= 3a ; \quad H_1 = -\frac{5}{3}a^{\frac{3}{2}} ; \quad H_2 = -\frac{7}{3}a^3 ; \\
 H_3 &= -3a^{\frac{5}{2}} - \frac{a^3(4+3a)}{3(1-a)} + \frac{a^3(4-17a+7a^2)}{3(1-a)^3} ; \\
 H_4 &= -\frac{11}{3}a^3 + \frac{5}{3}a^{\frac{7}{2}} - \frac{(8a^{\frac{7}{2}} - 5a^4 - 15a^{\frac{9}{2}})}{(1-a)^2} \\
 &\quad + \frac{(15a^{\frac{7}{2}} - 20a^{\frac{9}{2}} - 15a^5 - 54a^{\frac{11}{2}})}{3(1-a)^3} \\
 &\quad - \frac{(6a^{\frac{7}{2}} - a^4 - 2a^{\frac{9}{2}} - 32a^5 + 6a^{\frac{11}{2}} + 14a^6 + 27a^{\frac{13}{2}})}{3(1-a)^4} \\
 &\quad - \frac{2}{3} \cdot \frac{a^{\frac{11}{2}}}{(1-a)^5} ; \\
 H_5 &= -\frac{13}{3}a^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}a^4 - \frac{(11a^4 - 5a^{\frac{9}{2}})}{3(1-a)} - \frac{(7a^4 + 9a^{\frac{9}{2}} + 52a^5)}{3(1-a)^2} \\
 &\quad - \frac{(-6a^4 + 35a^{\frac{9}{2}} + 63a^5 + 26a^{\frac{11}{2}} + 110a^6 + 5a^{\frac{13}{2}})}{3(1-a)^3} \\
 &\quad + \frac{(19a^4 + 26a^{\frac{9}{2}} + 31a^5 - 20a^{\frac{11}{2}} + 20a^6 - 18a^{\frac{13}{2}} - 100a^7)}{3(1-a)^4} \\
 &\quad - \frac{(28a^4 + 6a^{\frac{9}{2}} + 8a^5 - 6a^{\frac{11}{2}} - 10a^6 + 22a^{\frac{13}{2}} + 14a^7 + 27a^{\frac{15}{2}} + 55a^8)}{3(1-a)^5} \\
 &\quad + \frac{(11a^4 + 18a^{\frac{11}{2}} + 12a^6 - 4a^{\frac{13}{2}} - 18a^7 - 20a^{\frac{15}{2}} - 11a^8)}{3(1-a)^6} ;
 \end{aligned}$$

$$H_1' = a^{\frac{3}{2}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}}{(1-a)^2} ;$$

$$H_2' = \frac{5}{3}a^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{3} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{(1-a)^3} ;$$

$$H_3' = -\frac{5}{3}a - \frac{5}{3}a^{\frac{3}{2}} + 7a^{\frac{5}{2}} + \frac{(a^3 + 3a^{\frac{7}{2}} + 10a^{\frac{9}{2}})}{3(1-a)^2}$$

$$- \frac{(7a^{\frac{5}{2}} + 6a^3 + 6a^{\frac{7}{2}} - a^4 - 3a^{\frac{9}{2}} - 5a^5)}{3(1-a)^3}$$

$$+ \frac{(5a^3 + 3a^{\frac{7}{2}} - a^4)}{3(1-a)^4} ;$$

$$H_4' = 3a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{7}{2}} - \frac{7}{3} \cdot \frac{a^{\frac{7}{2}}}{(1-a)} + \frac{(5a^3 + 9a^{\frac{7}{2}} + 8a^{\frac{9}{2}} + 21a^{\frac{11}{2}})}{3(1-a)^2}$$

$$+ \frac{(2a^3 + 4a^{\frac{3}{2}} + 3a^{\frac{7}{2}} - 8a^{\frac{9}{2}} + 6a^{\frac{11}{2}} + 13a^5 + 21a^{\frac{13}{2}})}{3(1-a)^3}$$

$$- \frac{(12a^3 + 10a^{\frac{7}{2}} + 11a^{\frac{9}{2}} + 3a^{\frac{11}{2}} + 4a^5 - 3a^{\frac{13}{2}} - 4a^6 - 7a^{\frac{15}{2}})}{3(1-a)^4}$$

$$- \frac{(4a^3 - a^{\frac{7}{2}} + 3a^{\frac{9}{2}} + a^{\frac{11}{2}} + a^5 - a^6)}{3(1-a)^5} .$$

Donc en substituant ces valeurs l'on trouvera

$$(235) \dots \frac{c-a-b}{a} = L' - \frac{1}{6} \cdot \frac{b}{a} - L'' \frac{b^2}{a^2} + L''' \frac{b^3}{a^3} - L^{iv} \frac{b^4}{a^4} + L^v \frac{b^5}{a^5} - \text{etc.} ;$$

où l'on a fait pour plus de simplicité :

$$L' = a^{-\frac{1}{2}} - 1 ; \quad L'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2(2-a)}{(1-a)^2} - \frac{1}{8} V_a^- ;$$

$$L''' = \frac{7}{4} \cdot \frac{a^2 V_a^-(4-3a+a^2)}{(1-a)^3} - \frac{2}{27} a ;$$

$$L'''' = 20 + \frac{59}{12} a^{\frac{1}{2}} + 12a - \frac{11861}{3456} a^{\frac{3}{2}} - \frac{28}{3} a^2 + \frac{27}{8} a^{\frac{5}{2}}$$

$$- \frac{(21 + 20 V_a^-)}{(1-a)} - \frac{(8 - \frac{619}{24} V_a^-)}{(1-a)^2} + \frac{(\frac{32}{3} + \frac{21}{4} V_a^-)}{(1-a)^3}$$

$$- \frac{(\frac{4}{3} + \frac{539}{24} V_a^-)}{(1-a)^4} - \frac{(\frac{1}{3} - 9 V_a^-)}{(1-a)^5} ;$$

$$L' = \frac{1844}{9} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{50317}{96} a^{\frac{1}{2}} - \frac{1897}{18} a + \frac{11579}{72} a^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{169}{54} a^2 + \frac{19973}{288} a^{\frac{5}{2}} + 12a^3 + \frac{70}{3} a^4 \end{array} \right\}$$

$$- \frac{(\frac{8279}{18} - \frac{76519}{72} V_a^-)}{(1-a)} + \frac{(\frac{13009}{18} - \frac{19787}{32} V_a^-)}{(1-a)^2}$$

$$- \frac{(\frac{9419}{9} + \frac{10685}{144} V_a^-)}{(1-a)^3} + \frac{(\frac{16115}{18} + \frac{401}{2} V_a^-)}{(1-a)^4}$$

$$- \frac{(\frac{2291}{6} + \frac{124}{3} V_a^-)}{(1-a)^5} + \frac{(\frac{127}{2} - \frac{16}{9} V_a^-)}{(1-a)^6} .$$

Si l'on voulait vérifier les expressions des deux coefficients L'' et L' , il faudra faire attention, que, par la substitution immédiate des coefficients H_1 , H_2 , etc. dans l'équation (234), l'on obtient d'abord ;

$$L^{\text{iv}} = \frac{5}{2} a^{\frac{1}{2}} - \frac{3221}{3456} a^{\frac{3}{2}} - \frac{41}{6} a^2 + \frac{27}{8} a^{\frac{5}{2}}$$

$$+ \frac{\left(\frac{10}{3} a^2 + \frac{10}{3} a^3\right)}{(1-a)}$$

$$+ \frac{\left(\frac{3}{2} a^2 - \frac{19}{4} a^{\frac{5}{2}} + \frac{64}{9} a^3 - 5 a^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{6} a^4\right)}{(1-a)^2}$$

$$+ \frac{\left(-\frac{17}{3} a^2 + 3 a^{\frac{5}{2}} + \frac{329}{9} a^3 - 12 a^{\frac{7}{2}} - \frac{189}{9} a^4 - \frac{5}{2} a^{\frac{9}{2}}\right)}{(1-a)^3}$$

$$+ \frac{\left(-a^2 + \frac{25}{24} a^{\frac{5}{2}} - 17 a^3 + \frac{35}{6} a^{\frac{7}{2}} + \frac{77}{3} a^4 - \frac{7}{3} a^{\frac{9}{2}} - \frac{31}{3} a^5\right)}{(1-a)^4}$$

$$+ \frac{\left(9 a^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3} a^4\right)}{(1-a)^5};$$

$$L^{\text{v}} = -\frac{35}{18} - \frac{15}{16} a^{\frac{1}{2}} + \frac{25}{6} a - \frac{1645}{54} a^2 - \frac{17999}{288} a^{\frac{5}{2}} - \frac{33}{2} a^3 - \frac{70}{3} a^4$$

$$+ \frac{\left(\frac{395}{36} a^{\frac{5}{2}} - \frac{21}{3} a^3 + \frac{191}{16} a^{\frac{7}{2}} - 6 a^4\right)}{(1-a)}$$

$$+ \frac{\left(\frac{15}{16} a^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} a^{\frac{3}{2}} + \frac{1109}{32} a^{\frac{5}{2}} + \frac{211}{6} a^3 + \frac{233}{6} a^{\frac{7}{2}} + \frac{233}{36} a^{\frac{9}{2}} - \frac{149}{6} a^4 - \frac{3}{2} a^5\right)}{(1-a)^2}$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{16} a^{\frac{3}{2}} + 15 a^2 - \frac{449}{48} a^{\frac{5}{2}} + \frac{103}{3} a^3 + \frac{2747}{16} a^{\frac{7}{2}} - \frac{17}{2} a^4 + \frac{4321}{48} a^{\frac{9}{2}} - \frac{121}{3} a^5 + \frac{25}{18} a^{\frac{11}{2}}\right)}{(1-a)^3}$$

$$+ \frac{\left(-\frac{373}{18} a^3 - \frac{481}{16} a^{\frac{7}{2}} + \frac{892}{9} a^4 + \frac{4091}{18} a^{\frac{9}{2}} - \frac{112}{3} a^5 - \frac{2477}{18} a^{\frac{11}{2}} - \frac{3}{2} a^6\right)}{(1-a)^4}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\frac{8}{3}a^{\frac{5}{2}} - \frac{39}{2}a^3 - \frac{41}{6}a^{\frac{7}{2}} - \frac{215}{2}a^4 - \frac{592}{9}a^{\frac{9}{2}} + \frac{451}{18}a^5 + \frac{427}{6}a^{\frac{11}{2}} - \frac{199}{18}a^6 - \frac{725}{18}a^{\frac{13}{2}} \right)}{(1-a)^5} \\
& + \frac{\left(-\frac{11}{6}a^{\frac{5}{2}} + \frac{69}{2}a^4 - 2a^{\frac{7}{2}} + \frac{259}{6}a^5 + \frac{2}{9}a^{\frac{11}{2}} - \frac{85}{6}a^6 + \frac{11}{6}a^{\frac{13}{2}} \right)}{(1-a)^6} ;
\end{aligned}$$

et que l'on transforme ces expressions dans les précédentes, beaucoup plus simples, en remplaçant les puissances entières de a par les puissances du binôme $1-(1-a)$, et en réunissant les parties ainsi formées.

§ XXII.

Appliquons maintenant l'équation (235) à quelques cas particuliers afin de mieux découvrir la marche de la fonction dont le second membre offre le développement. Soit d'abord $a=1$ et $b=\frac{1}{6}$. Alors ; le rapport

$\frac{B}{A}=1,39664$ sera celui des épaisseurs électriques qui s'établit au contact des deux sphères, ce qui donne $a=\frac{1}{3} \cdot \frac{B}{A}=0,46555$. Cela posé, l'on trouvera

$$L'=0,465605 ; \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{b}{a}=0,027778 ;$$

$$\frac{b^2}{a^2} L''=0,0461441 ; \quad \frac{b^3}{a^3} L'''=0,0219734 ;$$

$$\frac{b^4}{a^4} L''''=0,0134774 ; \quad \frac{b^5}{a^5} L''''''=0,003467 ;$$

d'où l'on tire ; $c-a-b=(0,403646)a$, pour la distance à laquelle il faut éloigner les surfaces des deux sphères, suivant la ligne des centres, pour que l'intensité électrique soit de nouveau nulle au même point de la plus petite des deux sphères, qui, auparavant, avait été mis en contact avec la plus grande. Ce résultat est fourni, comme l'on voit, par le calcul d'une série dont la convergence, depuis le troisième

terme, est manifeste: et l'on peut regarder la fraction 0,40365 comme exacte à un centième près au moins.

Si l'on remarque actuellement, que la formule (218) démontre que l'on doit avoir $c-a-b=0,35048$, lorsque $a=1$ et que le rapport $\frac{b}{a}$ devient une quantité infiniment petite, l'on en conclura que la distance, dont il est ici question, est plus grande de cinq centièmes environ pour deux globes ayant le rapport de leurs rayons exprimé par la fraction finie $\frac{1}{6}$, que pour deux globes dont le même rapport serait exprimé par une fraction évanouissante. Au reste, les idées seront mieux fixées sur ce point, en observant que si l'on prend $a=1$ et $b=\frac{1}{99}$, l'on a, d'après le calcul exposé vers la fin du § X,

$$a = \frac{1,62421}{3} = 0,54144 ;$$

et par conséquent ;

$$L' = 0,35900 ; \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{b}{a} = 0,00168 ;$$

$$\frac{b^2}{a^2} L'' = 0,00302 ; \quad \frac{b^3}{a^3} L''' = 0,00001073 ;$$

$$\frac{b^4}{a^4} L'''' = 0,0000006 ; \quad c-a-b = 0,35703 .$$

Ce résultat met en évidence, que l'accroissement de la distance $c-a-b$ est très-lent depuis $\frac{b}{a}=0$ jusqu'à $\frac{b}{a}=\frac{1}{99}$.

Dans l'expérience citée au § XX l'on avait,

$$a=1, \quad b=\frac{2}{11} ; \quad a=0,459997 .$$

D'après cela, nos formules donnent

$$L' = 0,474430 ; \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{b}{a} = 0,030303 ;$$

$$\frac{b^2}{a^2} L'' = 0,052609 ; \quad \frac{b^3}{a^3} L''' = 0,026939 ;$$

$$\frac{b^4}{a^4} L^{iv} = 0,017545 ; \quad \frac{b^5}{a^5} L^v = 0,020980 .$$

Et comme, ici, le sixième terme surpasse le cinquième, il faut regarder cette série comme une de celles que LEGENDRE a nommées *demi-convergentes*, et s'arrêter au cinquième terme; c'est-à-dire prendre

$$c-a-b=(0,400912)a .$$

Donc en prenant $a=66$, l'on aura, en lignes du pouce français, $c-a-b=26^{\text{lig}}, 46$, tandis que COULOMB trouvait 29 lignes. Mais il est au moins permis de douter que cette expérience ait été faite avec des moyens capables de rendre inadmissible une différence, en excès, de trois lignes environ entre l'observation et la théorie. D'ailleurs, si l'on calcule par la formule (201) l'intensité électrique z , qui doit avoir lieu à la distance $c-a-b=(0,43939)a$, où COULOMB voyait le passage du négatif au positif, on la trouve *positive* et égale à la *vingtième* partie de l'intensité moyenne A qui se manifesterait à la surface de la plus grande sphère. Ainsi, il est naturel de penser, que cette force était trouvée nulle, parceque, elle échappait par sa petitesse aux moyens employés pour la mesurer. De sorte que, on ne saurait tirer de là aucun argument contraire à la théorie mathématique de ces phénomènes.

Pour $a=1$ et $b=\frac{1}{3}$ l'on obtient directement à l'aide de l'équation (201),

$$c-a-b=(0,36000)a .$$

La distance que nous trouvons ainsi *a priori*, sera donc, pour $a=66^{\text{lig}}$ et $b=22^{\text{lig}}$, de $66.0,36000=23^{\text{lig}}, 76$. Et COULOMB, dans un cas fort approchant de celui-ci, où il avait $a=66^{\text{lig}}$, et $b=24^{\text{lig}}$, trouvait $c-a-b=24^{\text{lig}}$. (*).

(*) Voyez page 450 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1787.

Pour comparer avec plus de précision le résultat de cette expérience avec celui de la théorie, j'ai calculé par la formule (201) l'intensité z

qui, pour $a=1$ et $\frac{b}{a}=\frac{4}{11}$, répond à

$$c-a-b=0,39 \quad \text{et à} \quad c-a-b=0,40.$$

J'ai trouvé, pour la première, l'équation

$$z = \frac{11}{4} A \left\{ \frac{B}{A}(0,435416) - 0,54357 \right\};$$

et, pour la seconde, l'équation

$$z = \frac{11}{4} A \left\{ \frac{B}{A}(0,436059) - 0,44119 \right\}.$$

Maintenant, si l'on fait ici $\frac{B}{A}=1,23435$, l'on obtient ces deux valeurs de *signe contraire*; savoir $z=-A(0,01683)$; $z=A(0,26871)$. Ainsi, il est manifeste que la véritable valeur de $c-a-b$ est comprise entre 0,39 et 0,40, et qu'elle se rapproche davantage de 0,39: d'après cela nous avons fait $c-a-b=a(0,392)$; ce qui donne $c-a-b=25^{\text{lg}}, 87$ pour le cas de l'expérience de COULOMB. Mais il faut avouer, que l'on n'a pas la certitude, que ces expériences de COULOMB aient été faites avec la précision convenable pour être comparées, jusqu'à ce point, aux résultats de la théorie.

Toutefois, je ne puis admettre entièrement les doutes énoncés par POISSON dans les pages 13 et 14 du préambule de son premier Mémoire, au sujet de l'expérience relative aux deux sphères dont les rayons étaient de 66 et 12 lignes. Car, sur ce point, il est essentiel de remarquer, que la distance

$$c-a-b=66\left(\frac{3\sqrt{2}}{\pi}-1\right)=23^{\text{lg}}, 13$$

était calculée par POISSON, en supposant infiniment petit le rapport $\frac{b}{a}$ des deux rayons: ce qui est absolument inadmissible dans le cas ac-

tuel où $\frac{b}{a}=\frac{2}{11}$. De sorte que, l'argument employé par POISSON en

l'avantage de son résultat perd toute sa force dès que l'on arrête (comme il l'a fait) le calcul au *seul* premier terme de la série.

Cette expérience de COULOMB étant fort importante sous le rapport de la comparaison entre la théorie et l'observation, j'ai senti la nécessité de développer au moins les *six* premiers termes de la série (235) afin d'acquiescer la certitude, que malgré la lenteur de la convergence de la série l'on pouvait adopter avec confiance le résultat qu'elle donne dans un cas aussi défavorable pour une déduction *a priori*. Et pour écarter tous les doutes, il suffira de dire que la valeur de $c-a-b$ ainsi trouvée rend sensiblement nul le second membre de l'équation (201), ainsi que je m'en suis assuré par le calcul. L'on a par là une explication complète des motifs qui m'ont déterminé à pousser jusqu'à son dernier terme la solution de l'équation (233) pour obtenir le résultat définitif exprimé par l'équation (235). Ce résultat (que j'ai eu le soin de vérifier plusieurs fois) est étonnant par sa simplicité, si l'on veut bien méditer sur l'excessive complication des calculs intermédiaires. Il est, à mon avis, d'autant plus remarquable en ce qu'il présente la solution d'un problème qui avait échappé aux recherches profondes de POISSON : car il s'exprime ainsi en parlant de la distance $c-a-b$ dont il est ici question : « il paraît difficile de déterminer cette distance *a priori*, » lorsque les rayons des deux sphères que l'on sépare sont donnés ».

La série (235) donne cette distance, par approximation, même dans plusieurs cas où elle devient divergente, pourvu que l'on ait l'attention de la terminer là où commence la divergence. C'est de quoi l'on a une preuve frappante en l'appliquant au second cas extrême ; c'est-à-dire à celui des deux sphères égales. Alors l'on sait *a priori* que, $c-a-b=0$, est l'unique distance où l'intensité électrique puisse être nulle. Or, en appliquant ici nos formules générales, il faut prendre $a=1$, $b=1$, $a=\frac{1}{3}$: ce qui donne

$$L' = \sqrt{3} - 1 = 0,732050 ; \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{b}{a} = 0,166667 ;$$

$$L'' = \frac{5}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}} = 0,552831 ; \quad L''' = \frac{49}{24\sqrt{3}} - \frac{2}{81} = 1,15407 .$$

Donc, en rejetant L''' et prenant seulement les trois premiers termes, l'on aura

$$c - a - b = 0,73205 - 0,16667 - 0,552831 = 0,01216 ;$$

c'est-à-dire une distance qui n'est pas très-éloignée de la véritable.

Au reste l'on comprendra mieux cette remarque par l'application suivante qui m'est suggérée par une autre expérience effectivement faite par

COULOMB. Soit $a = 1$, $b = \frac{8}{11}$: alors l'on a

$$\frac{B}{A} = 1,07219 ; \quad a = 0,357297 .$$

De là l'on tire ,

$$L' = 0,67272 ; \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{b}{a} = 0,12121 ; \quad \frac{b^2}{a^2} L'' = 0,363595 ;$$

$$\frac{b^3}{a^3} L''' = 0,146886 ; \quad \frac{b^4}{a^4} L^{iv} = 1,0546 ;$$

done en excluant le terme multiplié par L^{iv} , nous aurons

$$c - a - b = 0,67272 - 0,12121 - 0,36359 + 0,146886 = 0,33486 .$$

Maintenant, pour prouver que cette valeur offre au moins une approximation, j'ai calculé par la formule (201) l'intensité z qui répond à

$$c = a + b + 0,3348 = 2,0621 ,$$

et j'ai trouvé

$$\frac{bz}{A} = \frac{B}{A} (1,197718) - 1,00038 ;$$

d'où l'on tire (en prenant $\frac{B}{A} = 1,07219$) ,

$$z = +A(0,39022) .$$

Le signe positif de z nous indique que la distance 0,33486 est trop grande pour avoir $z = 0$: mais en la réduisant à 0,27, et refaisant ensuite le même calcul, j'ai trouvé l'équation

$$\frac{bz}{A} = \frac{B}{A} (1,28837) - 1,40561 ;$$

laquelle donne $z = -A(0,03331)$. Il suit de là que la distance c des

deux centres qui rend de nouveau nulle l'intensité électrique est telle que l'on a

$$c < a + b + (0,33486)a ; \quad c > a + b + (0,27)a :$$

en prenant la moyenne, l'on aurait

$$c - a - b = (0,30241)a .$$

De sorte que pour le cas de $a = 66^{\text{lis}}$ et $b = 48^{\text{lis}}$ l'on devrait avoir $c - a - b = 19^{\text{lis}}, 96$, et non $c - a - b = 12^{\text{lis}}$ comme COULOMB le dit dans la page 450 citée plus haut. Ici il y a un écart sensible entre la théorie et l'observation; mais il faudrait répéter cette expérience avec toutes les précautions qui sont nécessaires pour en assurer l'exactitude, avant de vouloir prononcer qu'elle a assez de force pour infirmer une théorie solidement assise, et d'ailleurs en harmonie avec d'autres expériences du même Physicien.

Ces calculs doivent toujours être exécutés de manière à pouvoir garantir l'exactitude du résultat à un centième près au moins. Et à cet égard, sur le calcul fait par POISSON pour $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$, $c - a - b = \frac{1}{3}$, il faut observer que notre formule (201) donne

$$z = B(1,234704) - A(1,63668) ;$$

et par conséquent $z = -A(0,11811) = -B(0,09026)$, lorsque l'on prend $\frac{B}{A} = 1,25421$, qui est le rapport entre les intensités moyennes qui s'établit au contact des deux sphères. POISSON trouvait

$$z = -B(0,0704) ,$$

parceque il n'a pas poussé assez loin le calcul de la série (*).

A l'aide de l'équation (201) j'ai fait un calcul semblable pour $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$; $a = 1$, $b = \frac{5}{8}$; $a = 1$, $b = \frac{7}{8}$, et quelques autres cas où l'emploi de l'équation (235) n'était pas admissible. Je regrette de ne pouvoir trouver place dans ce Mémoire pour y consigner les détails des calculs que j'ai exécutés sur ce point: l'on y verrait mieux le degré de convergence qui répond à chaque cas particulier. Mais voici du moins, dans leur ensemble les résultats que j'ai trouvés :

* Voyez page 41 de son second Mémoire.

Valeur du rapport $\frac{b}{a}$ des rayons des deux sphères	Valeur correspondante de $\frac{c-a-b}{a}$ pour rendre nulle l'intensité électrique sur la plus petite des deux sphères	Valeur du rapport $\frac{b}{a}$ des rayons des deux sphères	Valeur correspondante de $\frac{c-a-b}{a}$ pour rendre nulle l'intensité électrique sur la plus petite des deux sphères
zéro	0,35048	$\frac{3}{10} = 0,3000$	0,36239
$\frac{1}{99} = 0,0101$	0,35703	$\frac{1}{3} = 0,3333$	0,36000
$\frac{1}{80} = 0,0125$	0,35843	$\frac{4}{11} = 0,3636$	0,39200
$\frac{1}{60} = 0,0167$	0,36077	$\frac{2}{5} = 0,4000$	0,40418
$\frac{1}{40} = 0,0250$	0,36499	$\frac{6}{13} = 0,4615$	0,50229
$\frac{1}{20} = 0,0500$	0,37400	$\frac{1}{2} = 0,5000$	0,53101
$\frac{1}{10} = 0,1000$	0,39382	$\frac{3}{5} = 0,6000$	0,49547
$\frac{1}{9} = 0,1111$	0,39546	$\frac{5}{8} = 0,6250$	0,47000
$\frac{1}{8} = 0,1250$	0,40326	$\frac{7}{10} = 0,7000$	0,35700
$\frac{1}{7} = 0,1429$	0,40622	$\frac{8}{11} = 0,7272$	0,30241
$\frac{1}{6,5} = 0,1538$	0,40992	$\frac{4}{5} = 0,8000$	0,20500
$\frac{1}{6} = 0,1667$	0,40365	$\frac{7}{8} = 0,8750$	0,23500
$\frac{1}{5,5} = 0,1818$	0,40091	$\frac{9}{10} = 0,9000$	0,18500
$\frac{1}{5} = 0,2000$	0,39960	1	zéro
$\frac{1}{4} = 0,2500$	0,39137		

Cette petite table est propre à mettre en évidence la marche de la courbe qui aurait $\frac{b}{a}$ pour abscisse et $c-a-b$ pour ordonnée, depuis $\frac{b}{a}=0$ jusqu'à $\frac{b}{a}=1$. Elle suffit même pour faire connaître pour toute valeur donnée de $\frac{b}{a}$ la valeur approchée de $c-a-b$. Et si l'on voulait un plus grand degré d'approximation l'on y parviendrait à l'aide de l'équation (201), en essayant deux valeurs de c capables de donner pour $\frac{z}{A}$ deux valeurs fort petites et de signe contraire, afin de pouvoir prendre ensuite la valeur moyenne. S'il s'agissait d'expériences d'une extrême délicatesse, ce serait le cas d'employer la méthode des approximations successives de NEWTON pour obtenir le degré de précision qui serait exigé pour une comparaison tout-à-fait exacte entre la valeur théorique et la valeur observée de $c-a-b$.

Relativement aux valeurs de $c-a-b$, correspondantes à des valeurs de $\frac{b}{a}$ comprises entre $\frac{b}{a}=0,9$ et $b=1$, leur calcul devient plus pénible: mais si l'on se contente d'une première approximation, on pourra les calculer par la formule fort simple,

$$c-a-b=0,205-\left(\frac{b}{a}-0,8\right)0,20-\left(\frac{b}{a}-0,8\right)\left(\frac{b}{a}-0,9\right)8,25,$$

que l'on obtient, à la manière ordinaire, par la considération d'un arc parabolique.

En général, lorsque la distance $c-a-b$ devient fort petite, et même évanouissante, les développemens précédens deviennent illusoires. Alors, l'on ne saurait calculer les épaisseurs électriques y et z à l'aide des formules (195) et (196) sans les transformer convenablement. Pour opérer cette importante transformation il est d'abord nécessaire d'avoir, sous forme finie, les expressions de y et z ; et c'est à quoi l'on parvient par l'analyse que je vais exposer dans le § suivant.

§ XXIII.

Pour sommer les suites infinies que l'on voit dans le second membre de l'équation (178), il faut d'abord remarquer que nous avons cette formule générale ;

$$(136) \dots \frac{1}{1-p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\text{Log } p} - 2 \int_0^{\infty} \frac{dt \sin(t \text{Log } p)}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Pour la démontrer, je reprends l'équation

$$\sum_1^{\infty} \frac{\pi t}{(\pi n)^2 + (\pi t)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi t} + \frac{1}{e^{2\pi t} - 1},$$

trouvée dans le § VIII, et j'observe que l'on a

$$\frac{\pi t}{(\pi n)^2 + (\pi t)^2} = \int_0^{\infty} dy e^{-\pi n y} \sin(\pi t y);$$

et par conséquent

$$\sum_1^{\infty} \frac{\pi t}{(\pi n)^2 + (\pi t)^2} = \int_0^{\infty} dy \sin(\pi t y) \cdot \sum_1^{\infty} e^{-\pi n y}.$$

Mais,

$$\sum_1^{\infty} e^{-\pi n y} = \frac{e^{-\pi y}}{1 - e^{-\pi y}} = \frac{1}{e^{\pi y} - 1};$$

donc en remplaçant y par $2y$ (ce qui ne change pas les limites) nous aurons

$$\sum_1^{\infty} \frac{\pi t}{(\pi n)^2 + (\pi t)^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dy \sin(2\pi t y)}{e^{2\pi y} - 1};$$

ce qui revient à dire que l'on a

$$2 \int_0^{\infty} \frac{dy \sin(2\pi ty)}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi t} + \frac{1}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Maintenant, si l'on fait $e^{2\pi t} = p$, l'on aura l'équation (236) après avoir remplacé y par t sous le signe intégral.

L'application immédiate de la formule (236) suppose que la quantité p est positive, afin d'éviter les quantités imaginaires. L'inspection de l'équation (174) suffit pour démontrer que $\gamma = \frac{b}{a}$ est toujours une quantité positive: mais le coefficient H pouvant être positif ou négatif, il semble, au premier coup d'œil, que les deux cas que présente la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1 - H\gamma^{2n}},$$

ne puissent pas être compris dans une seule et même formule. Cependant, si l'on observe que l'on a

$$\frac{\gamma^n}{1 - H\gamma^{2n}} = \gamma^n + H\gamma^{3n} + H^2\gamma^{5n} + H^3\gamma^{7n} + \text{etc.},$$

et par conséquent

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1 - H\gamma^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n + H \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{3n} + H^2 \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{5n} + \text{etc.},$$

l'on en conclura que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1 - H\gamma^{2n}} = \frac{1}{1 - \gamma} + \frac{H}{1 - \gamma^3} + \frac{H^2}{1 - \gamma^5} + \text{etc.};$$

ce qui revient à dire que l'on a

$$(237) \dots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1 - H\gamma^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{1 - \gamma^{2n+1}}.$$

Donc, par la combinaison des formules (236) et (237) nous avons l'équation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1-H\gamma^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H^n - \frac{1}{\text{Log} \gamma} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{2n+1} \\ - 2 \int_0^{\infty} \frac{dt \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H^n \sin \left\{ (2n+1)t \text{Log} \gamma \right\}}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Or il est facile de voir que l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} H^n = 1 + H + H^2 + \text{etc.} = \frac{1}{1-H}; \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{2n+1} = \int_0^1 dt (1 + Ht^2 + H^2 t^4 + \text{etc.}) = \int_0^1 \frac{dt}{1-Ht^2}; \\ \sum_{n=0}^{\infty} H^n \sin \left\{ (2n+1)t\delta \right\} = \cos(t\delta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H^n \sin(2nt\delta) \\ + \sin(t\delta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H^n \cos(2nt\delta);$$

après avoir fait, pour plus de simplicité, et conformément aux dénominations du § XVIII,

$$(238) \dots \delta = \text{Log} \gamma = \text{Log} \left\{ \frac{2ab}{M_1 + \sqrt{N}} \right\}.$$

Donc en appliquant ici les deux formules générales

$$(239) \dots \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos.n\varphi = \frac{1 - q \cos \varphi}{1 - 2q \cos \varphi + q^2},$$

$$(240) \dots \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin.n\varphi = \frac{q \sin \varphi}{1 - 2q \cos \varphi + q^2};$$

l'on aura ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1-H\gamma^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-H} - \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1-Ht^2} \\ - 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \left\{ \frac{\sin(t\delta) + H \sin(t\delta)}{1 - 2H \cos(2t\delta) + H^2} \right\},$$

ou bien

$$(241) \dots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1-H\gamma^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-H} - \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1-Ht^2} \\ - 2(1+H) \int_0^{\infty} \frac{dt \sin(t\delta)}{(e^{2\pi t} - 1)(1 - 2H \cos(2t\delta) + H^2)}.$$

Cette expression deviendra un peu plus simple en l'écrivant ainsi;

$$(242) \dots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{1-H\gamma^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-H} - \frac{1}{\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1-Ht^2} \\ - 2(1+H) \int_0^{\infty} \frac{dt \sin(t\delta)}{(e^{2\pi t} - 1) \left\{ (1-H)^2 + 4H \sin^2(t\delta) \right\}}.$$

En appliquant cette formule à l'équation (178) et remarquant que l'on a;

$$1-H = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \alpha - cx}; \quad 1-H' = \frac{(\alpha - \alpha')(c - ax)}{\alpha(c - ax - \alpha'x)},$$

$$1+H = \frac{\alpha + \alpha' + 2(a - cx)}{\alpha + \alpha - cx};$$

$$1+H' = \frac{(\alpha + \alpha')(c - ax) - 2b^2x}{2(c - ax - \alpha'x)},$$

l'on trouvera ,

$$\begin{aligned}
 (243) \dots f(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{g b}{a(c - a x)} \\
 &- \frac{h(\alpha - \alpha')}{a \delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{(a + \alpha - c x) - (a + \alpha' - c x) t^2} \\
 &+ \frac{g \gamma (\alpha - \alpha')}{a \delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{(c - a x - \alpha' x) - (c - a x - \alpha x) \gamma^2 t^2} \\
 &- \frac{2h}{a} \cdot \frac{(\alpha - \alpha') \left[(\alpha + \alpha' + 2a - 2c x) \right]}{(a + \alpha - c x)^3} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt \sin(t \delta)}{(e^{2\pi t} - 1) \left\{ (1 - H)^2 + 4H \sin^2(t \delta) \right\}} \\
 &+ \frac{2g \gamma}{2a} \cdot \frac{(\alpha - \alpha') \left[(c - a x)(\alpha + \alpha') - 2b^2 x \right]}{(c - a x - \alpha' x)^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt \sin(t \delta)}{(e^{2\pi t} - 1) \left\{ (1 - H')^2 + 4H' \sin^2(t \delta) \right\}} .
 \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on fait pour un moment

$$X_1 = (a + \alpha - c x)(a + \alpha' - c x) ;$$

$$X_{11} = (c - a x - \alpha x)(c - a x - \alpha' x) ,$$

l'on aura

$$(a + \alpha - c x)^2 \cdot \left\{ (1 - H)^2 + 4H \sin^2(t \delta) \right\} = (\alpha - \alpha')^2 + 4X_1 \sin^2(t \delta) ;$$

$$(c - a x - \alpha' x)^2 \cdot \left\{ (1 - H')^2 + 4H' \sin^2(t \delta) \right\}$$

$$= \frac{(\alpha - \alpha')^2 (c - a x)^2 + 4b^2 X_{11} \sin^2(t \delta)}{\alpha^2} .$$

En faisant le produit des deux facteurs qui donnent les valeurs de X_1 et X_{11} , l'on trouvera que, en vertu des équations

$$\alpha\alpha' = b^2 ; \quad \alpha + \alpha' = k - a ; \quad ak = c^2 - b^2 ,$$

l'on a

$$(244) \dots\dots X_i = X_{ii} = c^2 - \frac{cx}{a}(c^2 + a^2 - b^2) + c^2 x^2 .$$

Donc en posant $X_i = X_{ii} = m$,

$$Y_i' = (\alpha - \alpha') [\alpha + \alpha' + 2a - 2cx] ,$$

$$Y_i'' = (\alpha - \alpha') [(\alpha + \alpha')(c - ax) - 2b^2 x] ;$$

et se rappelant que $\gamma\alpha = b$, l'on aura pour $f(x)$ l'expression suivante ; savoir

$$(245) \dots\dots\dots f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{gb}{a(c - ax)}$$

$$- \frac{h(\alpha - \alpha')}{a\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{(a + \alpha - cx) - (a + \alpha' - cx)t}$$

$$+ \frac{g\gamma(\alpha - \alpha')}{a\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{(c - ax - \alpha'x) - (c - ax - \alpha x)\gamma^2 t}$$

$$- \frac{2h}{a} Y_i' \int_0^\infty \frac{dt \sin(t\delta)}{(e^{2\pi t} - 1) \left\{ (\alpha - \alpha')^2 + 4m \sin^2(t\delta) \right\}}$$

$$+ \frac{2gb}{a} Y_i'' \int_0^\infty \frac{dt \sin(t\delta)}{(e^{2\pi t} - 1) \left\{ (\alpha - \alpha')^2 (c - ax)^2 + 4b^2 m \sin^2(t\delta) \right\}} .$$

En exécutant les deux premières intégrations indiquées, l'on trouverait que cette formule s'accorde avec celle que l'on voit dans la page 70 du second Mémoire de Poisson. Au reste, cela devient manifeste en observant que ces deux intégrales définies peuvent être évaluées dans tous les cas par la double formule

$$(246) \dots \int_0^1 \frac{dt}{p - qt^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{pq}} \text{Log.} \left(\frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} \right) = \frac{1}{\sqrt{-pq}} \text{arc.} \left[\text{tang.} = \frac{\sqrt{-pq}}{p} \right].$$

Sur cela il importe d'observer, que la valeur de x étant toujours comprise entre $+1$ et -1 , les deux quantités $(a + \alpha - cx)$, $(c - ax - \alpha')$ seront toujours positives. En effet, nous avons $\alpha' < \alpha$, et

$$(247) \dots c^2 = b^2 + ak = (a + \alpha)a + \alpha' :$$

ce qui exige que l'on ait

$$c < a + \alpha ; \quad c > a + \alpha' .$$

Comme nous supposons $c > a + b$, et par conséquent

$$c^2 - a^2 - b^2 > 2ab ,$$

il résulte de l'équation (174) que la quantité $\gamma = \frac{b}{\alpha}$ est toujours inférieure à l'unité; ce qui rend $\text{Log.} \gamma = \delta$ un nombre *négligé*.

Cela prouve aussi, que la quantité $m = X_1$ sera *positive* depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{a + \alpha'}{c} = \frac{c}{a + \alpha}$; et *négligé* depuis $x = \frac{a + \alpha}{c}$ jusqu'à $x = 1$.

Pour avoir l'expression de $F(x)$ il suffit de faire, dans le second membre de l'équation (245), la permutation démontrée dans le § VI. On obtiendra, en posant

$$(248) \dots m' = \left(b + \alpha \frac{a}{b} - cx \right) \left(b + \alpha' \frac{a}{b} - cx \right)$$

$$= c^2 - \frac{cx}{b} (c^2 + b^2 - a^2) + c^2 x^2 ;$$

$$X_1' = a(a + \alpha') + 2b^2 - 2bcx ;$$

$$X_n' = (a + \alpha')(c - bx) - 2abx ;$$

$$\begin{aligned}
 (249) \dots F(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{b} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ha}{b(c-bx)} \\
 &- \frac{ga}{b\delta} (\alpha - \alpha') \int_0^1 \frac{dt}{(b^2 + \alpha a - bcx) - (b^2 + \alpha' a - bcx)t^2} \\
 &+ \frac{ha\gamma(\alpha - \alpha')}{b\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{(bc - b^2x - \alpha'ax) - (bc - b^2x - \alpha ax)\gamma^2 t^2} \\
 &- \frac{2ga}{b} (\alpha - \alpha') X'_i \int_0^\infty \frac{dt \sin.t\delta}{(e^{2\pi t} - 1) \left[a^2 (\alpha - \alpha')^2 + 4m'b^2 \sin^2.t\delta \right]} \\
 &+ \frac{2ha}{b} (\alpha - \alpha') X''_i \int_0^\infty \frac{dt \sin.t\delta}{(e^{2\pi t} - 1) \left[(\alpha - \alpha')^2 (c - bx)^2 + 4m'b^2 \sin^2.t\delta \right]}
 \end{aligned}$$

En décomposant les deux derniers termes des expressions de $f(x)$ et $F(x)$ que nous venons de trouver de manière que les diviseurs en x soient du premier degré seulement, et faisant ensuite pour plus de simplicité;

$N' = c^2 - b^2 + a^2 ;$	$\bar{N}' = c^2 - a^2 + b^2 ;$
$U = N'(1 - t^2) + (1 + t^2) \sqrt{N} ;$	$\bar{U} = \bar{N}'(1 - t^2) + (1 + t^2) \sqrt{\bar{N}} ;$
$U' = N'(1 - \gamma^2 t^2) - (1 + \gamma^2 t^2) \sqrt{N} ;$	$\bar{U}' = \bar{N}'(1 - \gamma^2 t^2) - (1 + \gamma^2 t^2) \sqrt{\bar{N}} ;$
$a U'' = N + 2b^2 N' \sin^2. \delta t ;$	$b \bar{U}'' = \bar{N} + 2a^2 \bar{N}' \sin^2. \delta t ;$
$T = (N + 4c^2 b^2 \sin^2. \delta t) \frac{a}{c^2} ;$	$\bar{T} = (\bar{N} + 4c^2 a^2 \sin^2. \delta t) \frac{b}{c^2} ;$
$a W' = c^2 M_1 T' - a^2 \bar{N}' U'' ;$	$b \bar{W}' = c^2 M_1 \bar{T}' - b^2 N' \bar{U}'' ;$
$W'^2 = (N + 4a^2 b^2 \sin^2. \delta t) \frac{c^2}{a} T' ;$	$\bar{W}'^2 = (\bar{N} + 4a^2 b^2 \sin^2. \delta t) \frac{c^2}{b} \bar{T}' ;$
$R^2 = (W' + a U'') (W' - a U'') ;$	$\bar{R}^2 = (\bar{W}' + b \bar{U}'') (\bar{W}' - b \bar{U}'') ;$

l'on trouvera qu'en écrivant, comme précédemment ;

$$f(x) = hf_1(x, a, b, c) + gf_2(x, a, b, c) ,$$

$$F(x) = gf_1(x, b, a, c) + hf_2(x, b, a, c) ,$$

l'on a ;

$$(250) \dots f_1(x, a, b, c) = \frac{1}{2a} - \frac{2\sqrt{N}}{a\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{U - 2ac(1-t^2)x} \\ - \frac{\sqrt{N}}{a} \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t} - 1)(N' \sin \delta t + \sqrt{N} \cdot \sqrt{-1} \cdot \cos \delta t - 2acx \cdot \sin \delta t)} \\ - \frac{\sqrt{N}}{a} \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t} - 1)(N' \sin \delta t - \sqrt{N} \cdot \sqrt{-1} \cdot \cos \delta t - 2acx \cdot \sin \delta t)} ;$$

$$(251) \dots f_2(x, a, b, c) = -\frac{b}{2a} \cdot \frac{1}{c - ax} + \frac{2\gamma\sqrt{N}}{a\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{2ac(1-\gamma^2 t^2) - U'x} \\ + \frac{b\sqrt{N} \cdot \sqrt{-1}}{ac} \cdot \int_0^\infty \frac{(W - \overline{N}' R \cdot \sqrt{-1}) dt \cdot \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1) R(aU'' + R \cdot \sqrt{-1} - cT \cdot x)} \\ - \frac{b\sqrt{N} \cdot \sqrt{-1}}{ac} \cdot \int_0^\infty \frac{(W + \overline{N}' R \cdot \sqrt{-1}) dt \cdot \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1) R(aU'' - R \cdot \sqrt{-1} - cT \cdot x)} ;$$

$$(252) \dots f_1(x, b, a, c) = \frac{1}{2b} - \frac{2\sqrt{N}}{b\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\overline{U} - 2bc(1-t^2)x} \\ - \frac{\sqrt{N}}{b} \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t} - 1)(\overline{N}' \sin \delta t + \sqrt{N} \cdot \sqrt{-1} \cdot \cos \delta t - 2bcx \cdot \sin \delta t)} \\ - \frac{\sqrt{N}}{b} \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{(e^{2\pi t} - 1)(\overline{N}' \sin \delta t - \sqrt{N} \cdot \sqrt{-1} \cdot \cos \delta t - 2bcx \cdot \sin \delta t)} ;$$

$$\begin{aligned}
 (253) \dots f_2(x, b, a, c) = & -\frac{a}{2b} \cdot \frac{1}{c-bx} + \frac{2\gamma\sqrt{N}}{b\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{2bc(1-\gamma^2 t^2) - U^2 x} \\
 & + \frac{a\sqrt{N} \cdot \sqrt{-1}}{bc} \cdot \int_0^\infty \frac{(\overline{W} - N'\overline{R} \cdot \sqrt{-1}) dt \cdot \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)\overline{R}(b\overline{U}^n + \overline{R} \cdot \sqrt{-1} - cTx)} \\
 & - \frac{a\sqrt{N} \cdot \sqrt{-1}}{bc} \cdot \int_0^\infty \frac{(\overline{W} + N'\overline{R} \cdot \sqrt{-1}) dt \cdot \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)\overline{R}(b\overline{U}^n - \overline{R} \cdot \sqrt{-1} - cTx)} .
 \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on fait $x=0$, l'on trouvera, après avoir fait disparaître les quantités imaginaires ;

$$\begin{aligned}
 (254) \dots\dots f_1(a, b, c) = & \frac{1}{2a} - \frac{2\sqrt{N}}{a\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{U} \\
 & - \frac{2N'\sqrt{N}}{a} \cdot \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(N + 4a^2 c^2 \sin^2 \delta t)} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (255) \dots\dots f_2(a, b, c) = & -\frac{b}{2ac} + \frac{\gamma\sqrt{N}}{ca^2\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1-\gamma^2 t^2} \\
 & + \frac{2bM'\sqrt{N}}{ac} \cdot \int_0^\infty \frac{dt \cdot \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(N + 4a^2 b^2 \sin^2 \delta t)} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (256) \dots\dots f_1(b, a, c) = & \frac{1}{2b} - \frac{2\sqrt{N}}{b\delta} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\overline{U}} \\
 & - \frac{2\overline{N}' \cdot \sqrt{N}}{b} \cdot \int_0^\infty \frac{dt \cdot \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(N + 4b^2 c^2 \sin^2 \delta t)} ;
 \end{aligned}$$

$$(257) \dots f_1(b, a, c) = -\frac{a}{2bc} + \frac{\gamma\sqrt{N}}{cb^2\partial} \int_0^1 \frac{dt}{1-\gamma^2 t^2} \\ + \frac{2aM_1\sqrt{N}}{bc} \int_0^\infty \frac{dt \cdot \sin \partial t}{(e^{2\pi t} - 1)(N + 4a^2 b^2 \sin^2 \partial t)}.$$

Cela posé, si l'on applique aux différens termes des équations (250), (251), (252) et (253) la formule (120) pour passer des équations (245) et (249) à celles qui déterminent les épaisseurs γ et z , l'on trouvera, qu'en faisant

$$T' = N' \sin \partial t + \sqrt{N} \cdot \sqrt{-1} \cdot \cos \partial t ;$$

et

$$\frac{T'^2 - 4a^2 c^2 \sin^2 \partial t}{(T'^2 - 4ac \sin \partial t \cdot T' \cos \partial + 4a^2 c^2 \sin^2 \partial t)^{\frac{3}{2}}} = G + H \cdot \sqrt{-1} ;$$

$$\frac{\{N' - \sqrt{N} \cdot \sqrt{-1}\} \left\{ (aU'' + R \cdot \sqrt{-1})^2 - c^2 T'^2 \right\}}{\{ (aU'' + R \cdot \sqrt{-1})^2 - 2cT'(aU'' + R \cdot \sqrt{-1}) \cos \partial + c^2 T'^2 \}^{\frac{3}{2}}} = G' + H' \cdot \sqrt{-1} ;$$

$$T'' = \frac{U^2 - 4a^2 c^2 (1 - t^2)^2}{\left\{ U^2 - 4acU(1 - t^2) \cos \partial + 4a^2 c^2 (1 - t^2)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$T''' = \frac{4a^2 c^2 (1 - \gamma^2 t^2)^2 - U^2}{\left\{ 4a^2 c^2 (1 - \gamma^2 t^2)^2 - 4acU(1 - \gamma^2 t^2) \cos \partial + U^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$T^{iv} = \frac{\bar{U}^2 - 4b^2 c^2 (1 - t^2)^2}{\left\{ \bar{U}^2 - 4bc\bar{U}(1 - t^2) \cos \partial + 4b^2 c^2 (1 - t^2)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$T^{v} = \frac{4b^2 c^2 (1 - \gamma^2 t^2)^2 - \bar{U}^2}{\left\{ 4b^2 c^2 (1 - \gamma^2 t^2)^2 - 4bc(1 - \gamma^2 t^2) \bar{U} \cos \partial + \bar{U}^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} ;$$

l'on a ;

$$(258) \quad \dots \quad 2aD.y = Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\{Af_2(b, a, c) - Bf_1(a, b, c)\} b(c^2 - a^2)}{(c^2 - 2ac \cdot \cos \theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 & - 4 \cdot \sqrt{N} \left\{ Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c) \right\} \int_0^\infty \frac{G dt}{e^{2\pi t} - 1} \\
 & + 4b \cdot \sqrt{N} \left\{ Af_2(b, a, c) - Bf_1(a, b, c) \right\} \int_0^\infty \frac{dt \cdot H' \sin \delta t}{R(e^{2\pi t} - 1)} \\
 & - \frac{4 \cdot \sqrt{N}}{\delta} \left\{ Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c) \right\} \int_0^1 T'' dt \\
 & - \frac{4\gamma \cdot \sqrt{N}}{\delta} \left\{ Af_2(b, a, c) - Bf_1(a, b, c) \right\} \int_0^1 T''' dt ;
 \end{aligned}$$

$$(259) \quad \dots \quad 2bD.z = Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\{Bf_2(a, b, c) - Af_1(b, a, c)\} a(c^2 - b^2)}{(c^2 - 2bc \cdot \cos \theta + b^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 & - 4 \cdot \sqrt{N} \left\{ Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c) \right\} \int_0^\infty \frac{\bar{G} dt}{e^{2\pi t} - 1} \\
 & + 4a \cdot \sqrt{N} \left\{ Bf_2(a, b, c) - Af_1(b, a, c) \right\} \int_0^\infty \frac{dt \cdot \bar{H}' \sin \delta t}{R(e^{2\pi t} - 1)} \\
 & - \frac{4 \cdot \sqrt{N}}{\delta} \left\{ Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c) \right\} \int_0^1 T'' dt \\
 & - \frac{4\gamma \cdot \sqrt{N}}{\delta} \left\{ Bf_2(a, b, c) - Af_1(b, a, c) \right\} \int_0^1 T''' dt ;
 \end{aligned}$$

où la signification de la lettre D est conforme à l'équation (190), et les lettres $\bar{c}$, $\bar{H}$ désignent ce que deviennent G et H' par la permutation des deux lettres a et b entr'elles, après avoir écrit θ_i au lieu de θ .

Relativement aux trois intégrales

$$\int_0^1 \frac{dt}{U}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{\bar{U}}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{1-\gamma^2 t^2},$$

il faudra se rappeler que l'on a

$$(260) \dots\dots\dots \int_0^1 \frac{dt}{U} =$$

$$-\frac{1}{4ac} \text{Log.} \left\{ \frac{V\bar{N}}{(c+a)^2 - b^2} \right\} = -\frac{1}{8ac} \text{Log.} \left\{ \frac{(c-a)^2 - b^2}{(c+a)^2 - b^2} \right\};$$

$$(261) \dots\dots\dots \int_0^1 \frac{dt}{\bar{U}} =$$

$$-\frac{1}{4bc} \text{Log.} \left\{ \frac{V\bar{N}}{(c+b)^2 - a^2} \right\} = -\frac{1}{8bc} \text{Log.} \left\{ \frac{(c-b)^2 - a^2}{(c+b)^2 - a^2} \right\};$$

$$(262) \dots\dots\dots 2\gamma \int_0^1 \frac{dt}{1-\gamma^2 t^2} =$$

$$\text{Log.} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) = \text{Log.} \left(\frac{2+b}{2-b} \right) = \text{Log.} \left(\frac{\alpha + V\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'}}{\alpha - V\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'}} \right)$$

$$= -\text{Log.} \left(\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \alpha' + 2 \cdot V\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'}} \right) = -\text{Log.} \left(\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \alpha' + 2b} \right)$$

$$= -\text{Log.} \left\{ \frac{V\bar{N}}{c^2 - (a-b)^2} \right\} = -\frac{1}{2} \text{Log.} \left\{ \frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \right\};$$

et surtout observer, dès ce moment, que chacune d'elles est susceptible

de croître indéfiniment à mesure que la distance $c - a - b$, qui sépare les surfaces des deux sphères, devient plus petite. Cette circonstance exige un examen spécial, soit du numérateur, soit du dénominateur commun D , qui entre dans l'expression de γ et de z , pour voir, si, effectivement, les intensités peuvent devenir infinies par le rapprochement graduel des deux sphères électrisées. Il suffit d'avoir, ici, indiquée l'existence de ce cas singulier qui sera analysé ci-après.

Je ferai en outre remarquer qu'en posant, pour plus de simplicité,

$$\Pi_1(b, a, c, \theta) = -\frac{4V\bar{N}}{\delta} \cdot \int_0^1 T^n dt - 4V\bar{N} \cdot \int_0^\infty \frac{G dt}{e^{2\pi t} - 1};$$

$$\Pi_2(b, a, c, \theta) = -\frac{4\gamma V\bar{N}}{b\delta} \cdot \int_0^1 T^m dt + 4V\bar{N} \cdot \int_0^\infty \frac{dt \cdot H' \sin \cdot \delta t}{R(e^{2\pi t} - 1)};$$

$$\Pi_1(a, b, c, \theta) = -\frac{4V\bar{N}}{\delta} \cdot \int_0^1 T^{nv} dt - 4V\bar{N} \cdot \int_0^\infty \frac{\bar{G} dt}{e^{2\pi t} - 1};$$

$$\Pi_2(a, b, c, \theta) = -\frac{4\gamma V\bar{N}}{a\delta} \cdot \int_0^1 T^n dt + 4V\bar{N} \cdot \int_0^\infty \frac{dt \cdot \bar{H}' \sin \cdot \delta t}{\bar{R}(e^{2\pi t} - 1)};$$

l'on aura;

$$(263) \dots 2aD\gamma = Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c)$$

$$+ \frac{\{Ab \cdot f_1(b, a, c) - Bbf_1(a, b, c)\} (c^2 - a^2)}{(c^2 - 2ac \cdot \cos \theta + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ Af_1(b, a, c) \cdot \Pi_1(b, a, c, \theta) + Abf_2(b, a, c) \cdot \Pi_2(b, a, c, \theta)$$

$$- Bf_2(a, b, c) \cdot \Pi_1(b, a, c, \theta) - Bbf_1(a, b, c) \cdot \Pi_2(b, a, c, \theta);$$

$$\begin{aligned}
 (264) \dots 2bD.z &= Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c) \\
 &+ \frac{\{Baf_2(a, b, c) - Aaf_1(a, b, c)\} (c^2 - b^2)}{(c^2 - 2bc \cos \theta + b^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &+ Bf_1(a, b, c) \cdot \Pi_1(a, b, c, \theta) + Baf_2(a, b, c) \cdot \Pi_2(a, b, c, \theta) \\
 &- Af_2(b, a, c) \cdot \Pi_1(a, b, c, \theta) - Aaf_1(b, a, c) \cdot \Pi_2(a, b, c, \theta).
 \end{aligned}$$

Maintenant par le seul rapprochement de ces équations avec celles désignées par (195) et (196) l'on voit aussitôt que, en ayant égard aux équations (284) qui seront définies ci-après, l'on a ;

$$(265) \dots \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ab)^{i+1} \{p_i^2 - a^2 c^2 M_i^2\}}{\{p_i^2 - 2ac p_i M_i \cos \theta + a^2 c^2 M_i^2\}^{\frac{3}{2}}} = \Pi_1(b, a, c, \theta),$$

$$(266) \dots \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ab)^i \{c^2 M_i^2 - a^2 \mu_{i-1}^2\}}{\{c^2 M_i^2 - 2ac M_i \mu_{i-1} \cos \theta + a^2 \mu_{i-1}^2\}^{\frac{3}{2}}} = \Pi_2(b, a, c, \theta);$$

et deux autres équations semblables que l'on obtient par la permutation des deux lettres a, b dans les deux membres de ces deux dernières équations.

Telles sont les formules générales qui expriment, sous forme réelle et finie, l'intensité électrique à la surface des deux sphères. Elles deviennent illusoires, lorsque l'on y fait $c=a+b$, et par conséquent $\theta=0$. Mais ce cas particulier, qui est celui du contact des deux sphères, doit être traité à part, ainsi que nous l'avons fait: autrement, il faut entreprendre plusieurs transformations, qui, à certains égards, augmentent la difficulté de la question.

Analytiquement parlant, ces formules sont très-remarquables par la symétrie de leur forme, et même par leur simplicité: ce qui est une propriété fort éloignée des idées de Poisson sur ce résultat. Il n'a pas entrepris de pousser jusqu'à son dernier terme la solution de ce problème, et laissa intacte la difficulté que présentait l'exécution d'un calcul, qui lui paraissait devoir conduire à des expressions *très-complicquées*. Certes en énonçant cette pensée, dans la page 79 de son second Mémoire, il ne prévoyait pas que la complication existait seulement dans les expressions *intermédiaires* et non dans le résultat final.

§ XXIV.

Les formules du précédent paragraphe se simplifient considérablement, lorsqu'on les applique à l'un ou à l'autre des quatre points placés sur la ligne des centres. Alors l'on a $\cos \theta = \pm 1$; $\cos \theta_1 = \pm 1$; ce qui donne

$$\begin{aligned} T'' &= \frac{U \pm 2ac(1-t^2)}{[U \mp 2ac(1-t^2)]^2} ; & T''' &= \frac{\bar{U} \pm 2bc(1-t^2)}{[\bar{U} \mp 2bc(1-t^2)]^2} ; \\ T'''' &= \frac{2ac(1-\gamma^2 t^2) \pm U'}{[2ac(1-\gamma^2 t^2) \mp U']^2} ; & T'''' &= \frac{2bc(1-\gamma^2 t^2) \pm \bar{U}'}{[2bc(1-\gamma^2 t^2) \mp \bar{U}']^2} ; \\ G + H \cdot \sqrt{-1} &= \frac{(N' \pm 2ac) \sin \partial t + \sqrt{N} \cdot \sqrt{-1} \cdot \cos \partial t}{\{(N' \mp 2ac) \sin \partial t + \sqrt{N} \cdot \sqrt{-1} \cdot \cos \partial t\}^2} ; \\ G' + H' \cdot \sqrt{-1} &= \frac{(N' - \bar{N}' R \cdot \sqrt{-1})(aU'' \pm cT + R \cdot \sqrt{-1})}{\{aU'' \mp cT + R \cdot \sqrt{-1}\}^2} ; \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on observe, que la valeur de N peut être mise sous la forme

$$(267) \dots N = [(c-a)^2 - b^2][(c+a)^2 - b^2] ,$$

l'on trouvera que à l'aide de ces deux dernières équations l'on obtient,

$$\begin{aligned} (268) \dots \int_0^\infty \frac{G dt}{e^{2\pi t} - 1} = \\ \frac{1}{K'^{1/2}} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin \partial t \cdot (K + K''' \sin^2 \partial t) dt}{(e^{2\pi t} - 1)(K'' \mp 4ac \sin^2 \partial t)^2} = \frac{1}{K'^{1/2}} \cdot \int_0^\infty \frac{dt Q \cdot \sin \partial t}{e^{2\pi t} - 1} ; \\ (269) \dots \int_0^\infty \frac{dt H' \sin \partial t}{R(e^{2\pi t} - 1)} = \frac{1}{2c} \cdot \int_0^\infty \frac{dt Q' \cdot \sin \partial t}{e^{2\pi t} - 1} = \\ \int_0^\infty \frac{\sin \partial t (NK'''' \mp 4a^2 b^2 K'^2 \sin^2 \partial t) dt}{(e^{2\pi t} - 1)(K'' \mp 4ac b^2 \sin^2 \partial t)^2} ; \end{aligned}$$

après avoir substitué pour T , W , etc. leurs valeurs, et fait, pour abréger,

$$\begin{array}{l|l}
 K = N(N' \mp 6ac) ; & K^v = (c \mp a)^2 K'' ; \\
 K' = (c \mp a)^2 - b^2 ; & K^{vi} = (c \mp a) \frac{K''}{K'} ; \\
 K'' = (c \pm a)^2 - b^2 ; & K^{vii} = K'' K^{iv} ; \\
 K''' = K'' K'^2 - K ; & K^{viii} = (c \mp a)^3 \frac{K''}{K'^2} - \frac{K^{iv}}{K'} ; \\
 K^{iv} = 2(c \mp a)(c \pm a)^2 ; & K^{ix} = \frac{c}{a} K^{vi} ;
 \end{array}$$

Si l'on remplace G et H' par $\bar{G}$ et $\bar{H}'$, il suffira d'échanger entr'elles les deux lettres a et b .

Conformément à ces dénominations, l'on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 T'' dt &= \int_0^1 \frac{\{(K'' + V\bar{N}) - (K'' - V\bar{N})t^2\} dt}{\{(K' + V\bar{N}) - (K' - V\bar{N})t^2\}^2} ; \\
 \int_0^1 T''' dt &= \pm \int_0^1 \frac{\{(K'' - V\bar{N}) - \gamma^2(K'' + V\bar{N})t^2\} dt}{\{(K' - V\bar{N}) - \gamma^2(K' + V\bar{N})t^2\}^2} ;
 \end{aligned}$$

pourvu que l'on ait l'attention de se rappeler que, dans cette dernière équation, ainsi que dans la précédente, le signe ambigu $\pm$ ne comporte que deux combinaisons que l'on forme en prenant toujours, soit en dehors soit en dedans du signe intégral le signe *supérieur*, pour $\cos\theta = +1$, et le signe *inférieur*, pour $\cos\theta = -1$.

En évaluant ces intégrales définies par les formules

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dx}{(p - qx^2)^2} &= \frac{1}{2p(p-q)} + \frac{1}{2p} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{p - qx^2} , \\
 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(p - qx^2)^2} &= \frac{1}{2q(p-q)} - \frac{1}{2q} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{p - qx^2} ,
 \end{aligned}$$

L'on trouve

$$\int_0^1 T'' dt = \frac{K' - K''}{2(K'^2 - N)},$$

$$\int_0^1 T''' dt = \frac{\pm(K'' - K')V\overline{N}}{(K'^2 - N)\{K'(1 - \gamma^2) - (1 + \gamma^2)V\overline{N}\}},$$

en observant que l'équation identique, $K'K'' - N = 0$, fait disparaître, sans exécuter l'intégration, le terme qui serait affecté du signe intégral dans chacune de ces expressions. Et comme $\gamma^2 = \frac{\alpha'}{\alpha}$, il est facile de voir que, en ayant égard aux équations (174). et (175), l'on a ce résultat fort simple, savoir

$$(270) \dots V\overline{N} \int_0^1 T'' dt = \frac{V\overline{N}}{2K'} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{K}''}{\overline{K}'}};$$

$$\int_0^1 T''' dt = \frac{M_1 + V\overline{N}}{4a K'(c \mp a)}.$$

D'après l'équation $\gamma = \frac{b}{\alpha}$, et l'équation (238) l'on peut écrire

$$(271) \dots \gamma V\overline{N} \int_0^1 T''' dt = \frac{bV\overline{N}}{2(c \mp a)K'} = \frac{b}{2(c \mp a)} \cdot \sqrt{\frac{\overline{K}''}{\overline{K}'}}.$$

Maintenant, si l'on décompose les fractions Q et Q' , dont la définition est donnée par les équations (268) et (269), on trouvera, après les réductions qui se présentent;

$$(272) \dots \int_0^\infty \frac{dt \cdot Q \sin \delta t}{e^{2\pi t} - 1} = -K'K'' \cdot \Pi_1'(b, a, c) + 2K''K'^2 \cdot \Pi_1''(b, a, c);$$

$$(273) \dots \int_0^\infty \frac{dt Q' \sin \delta t}{e^{2\pi t} - 1} = K'' \cdot \Pi_1'(b, a, c) - K'' \cdot \Pi_1''(b, a, c);$$

où l'on a fait ;

$$(274) \dots \left\{ \begin{aligned} \Pi_1'(b, a, c) &= \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1) (\overline{K''} \mp 4ac \sin^2 \delta t)} ; \\ \Pi_1''(b, a, c) &= \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1) (K'' \mp 4ac \sin^2 \delta t)} ; \\ \Pi_2'(b, a, c) &= \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1) (K''(c \mp a)^2 \mp 4ac b^2 \sin^2 \delta t)} ; \\ \Pi_2''(b, a, c) &= \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1) (K''(c \mp a)^2 \mp 4ac b^2 \sin^2 \delta t)} . \end{aligned} \right.$$

Il suit de là et des formules (265) et (266) que l'on a ces deux équations ; savoir

$$(275) \dots \sum_0^\infty \frac{(ab)^{i+1} \{M_{i+1} \pm a(c \mp c) M_i\}}{\{M_{i+1} \pm a(c \mp c) M_i\}^2} = \frac{2\sqrt{\overline{K''}}}{\sqrt{\overline{K'}} \cdot \text{Log.} \left(\frac{M_i + \sqrt{N}}{2ab} \right)} \\ + 4K'' \sqrt{\frac{\overline{K''}}{\overline{K'}}} \Pi_1'(b, a, c) - 8K' K'' \sqrt{\frac{\overline{K''}}{\overline{K'}}} \Pi_2'(b, a, c) ;$$

$$(276) \dots \sum_0^\infty \frac{(ab)^{i+1} \{(c \pm a) M_i \pm ab^2 M_{i-1}\}}{\{(c \mp a) M_i \mp ab^2 M_{i-1}\}^2} = \frac{2\sqrt{\overline{K''}}}{\sqrt{\overline{K'}} (c \mp a) \text{Log.} \left(\frac{M_i + \sqrt{N}}{2ab} \right)} \\ + 4(c \mp a) K'' \sqrt{\frac{\overline{K''}}{\overline{K'}}} \Pi_1'(b, a, c) - 8(c \mp a)^2 K' K'' \sqrt{\frac{\overline{K''}}{\overline{K'}}} \Pi_2''(b, a, c) .$$

Cela posé il est clair que les formules générales (258) et (259) se réduisent dans le cas particulier dont il est ici question à celles-ci ; où les lettres $\overline{K'}$, $\overline{K''}$, $\overline{K^{iv}}$, $\overline{K^{vi}}$, surmontées d'un trait horizontal, désignent ce que deviennent K' , K'' , K^{iv} , K^{vi} , après la permutation des deux lettres a et b ; savoir

$$\begin{aligned}
 (277) \dots 2aD.y = & \left\{ Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c) \right\} \left(1 - \frac{2\sqrt{K''}}{\delta\sqrt{K'}} \right) \\
 & + \left\{ Af_2(b, a, c) - Bf_1(a, b, c) \right\} \frac{b(c \pm a)}{(c \mp a)^2} \\
 & - \left\{ Af_2(b, a, c) - Bf_1(a, b, c) \right\} \frac{2b\sqrt{K''}}{\delta(c \mp a)\sqrt{K'}} \\
 & + \left\{ Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c) \right\} \frac{4K''\sqrt{K''}}{\sqrt{K'}} \Pi_1'(b, a, c) \\
 & - \left\{ Af_1(b, a, c) - Bf_2(a, b, c) \right\} \frac{8K'K''\sqrt{K''}}{\sqrt{K'}} \Pi_1''(b, a, c) \\
 & + \left\{ Af_2(b, a, c) - Bf_1(a, b, c) \right\} 4bK'' \cdot \sqrt{N} \Pi_2'(b, a, c) \\
 & - \left\{ Af_2(b, a, c) - Bf_1(a, b, c) \right\} 4bK''K'' \cdot \sqrt{N} \Pi_2''(b, a, c);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (278) \dots 2bD.z = & \left\{ Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c) \right\} \left(1 - \frac{2\sqrt{K''}}{\delta\sqrt{K'}} \right) \\
 & + \left\{ Bf_2(a, b, c) - Af_1(b, a, c) \right\} \frac{a(c \pm b)}{(c \mp b)^2} \\
 & - \left\{ Bf_2(a, b, c) - Af_1(b, a, c) \right\} \frac{2a\sqrt{K''}}{\delta(c \mp b)\sqrt{K'}} \\
 & + \left\{ Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c) \right\} \frac{4K''\sqrt{K''}}{\sqrt{K'}} \Pi_1'(a, b, c) \\
 & - \left\{ Bf_1(a, b, c) - Af_2(b, a, c) \right\} \frac{8K'K''\sqrt{K''}}{\sqrt{K'}} \Pi_1''(a, b, c) \\
 & + \left\{ Bf_2(a, b, c) - Af_1(b, a, c) \right\} 4aK'' \cdot \sqrt{N} \Pi_2'(a, b, c) \\
 & - \left\{ Bf_2(a, b, c) - Af_1(b, a, c) \right\} 4aK''K'' \cdot \sqrt{N} \Pi_2''(a, b, c).
 \end{aligned}$$

En divisant ces équations par $2D$, l'on aura les valeurs de ay et bz . Mais, pour présenter ce résultat d'une manière plus explicite, il faudra se rappeler que, conformément aux équations (190), (254), (255), (256), (257), (260), (261), (262), si l'on fait

$$(279) \dots \left\{ \begin{aligned} \Pi_1'''(a, b, c) &= \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(N + 4a^2 c^2 \sin^2 \delta t)} , \\ \Pi_2'''(b, a, c) &= \int_0^1 \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(N + 4a^2 b^2 \sin^2 \delta t)} ; \end{aligned} \right.$$

$$(280) \dots \psi_1(a, b, c) = 1 + \frac{V\bar{N}}{2ac\delta} \text{Log.} \left[\frac{(c-a)^2 - b^2}{(c+a)^2 - b^2} \right] - 4N'V\bar{N} \cdot \Pi_1'''(a, b, c) ;$$

$$(281) \dots \psi_1(b, a, c) = 1 + \frac{V\bar{N}}{2bc\delta} \text{Log.} \left[\frac{(c-b)^2 - a^2}{(c+b)^2 - a^2} \right] - 4N'V\bar{N} \cdot \Pi_1'''(b, a, c) ;$$

$$(282) \dots \psi_2(a, b, c) = 1 + \frac{V\bar{N}}{2ab\delta} \text{Log.} \left[\frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \right] - 4M'V\bar{N} \cdot \Pi_2'''(b, a, c) ;$$

$$(283) \dots D' = \psi_1(a, b, c) \cdot \psi_1(b, a, c) - \frac{ab}{c^2} \left\{ \psi_2(a, b, c) \right\}^2 ,$$

l'on a les équations;

$$f_1(a, b, c) = \frac{1}{2a} \psi_1(a, b, c) ; \quad f_2(a, b, c) = -\frac{b}{2ac} \psi_2(a, b, c) ;$$

$$f_1(b, a, c) = \frac{1}{2b} \psi_1(b, a, c) ; \quad f_2(a, b, c) = -\frac{a}{2bc} \psi_2(a, b, c) ;$$

lesquelles donnent;

$$(284) \dots \left\{ \begin{aligned} \frac{f_1(a, b, c)}{2D} &= \frac{b\psi_1(a, b, c)}{D'} ; \\ \frac{f_1(b, a, c)}{2D} &= \frac{a\psi_1(b, a, c)}{D'} ; \\ \frac{f_2(a, b, c)}{2D} &= -\frac{b^2}{cD'} \psi_2(a, b, c) ; \\ \frac{f_2(b, a, c)}{2D} &= -\frac{a^2}{cD'} \psi_2(a, b, c) . \end{aligned} \right.$$

Sur cela, il importe de faire observer que les fonctions $f_1(a, b, c)$, $f_2(a, b, c)$ qui entrent dans les formules précédentes, ne sont pas absolument identiques avec celles, qui, dans le § XVIII, ont été employées pour établir les équations (189). Mais, par le rapprochement des équations (195), (196), (263), (264), et des équations (207), (284), il est clair que l'on a

$$(285) \dots \left\{ \begin{array}{l} \psi_1(a, b, c) = 1 + \sum_0^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{\rho_i} , \\ \psi_1(b, a, c) = 1 + \sum_0^{\infty} \frac{(ab)^{i+1}}{\mu_i} , \\ \psi_2(a, b, c) = \sum_0^{\infty} \frac{(ab)^i}{M_i} . \end{array} \right.$$

De sorte que les suites infinies qui composent le second membre de ces équations sont, par cette transformation, sommées par des intégrales définies.

Quoique les formules que nous venons de trouver soient ainsi réduites autant que possible, lorsque l'on veut conserver la généralité à l'égard de la distance qui sépare les deux sphères, il est absolument nécessaire de les développer d'une manière spéciale pour mettre en évidence les lois remarquables que présente l'état électrique de deux sphères conductrices isolées dans leur rapprochement indéfini, et leur écartement après le contact. Tel est le but du Chapitre suivant.

CHAPITRE QUATRIÈME

LOIS DE LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ
 À LA SURFACE DE DEUX SPHÈRES CONDUCTRICES
 SÉPARÉES PAR UN PETIT INTERVALLE

§ XXV.

La première remarque que l'on doit faire pour traiter cette question en modifiant convenablement les formules générales consiste en cela, que la quantité δ sera d'autant plus petite, que les deux sphères seront plus rapprochées. Car, en faisant $c = a + b + \Delta$ dans l'équation (238) l'on obtient pour δ une série ordonnée suivant les puissances de Δ , de laquelle, en retenant seulement le premier terme, il viendra

$$(286) \dots\dots \delta = -\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab}} \cdot \sqrt{\Delta}.$$

De sorte que, pour examiner de plus près le cas particulier où les deux sphères sont fort rapprochées, il est d'abord nécessaire de développer suivant les puissances de δ , les équations (280), (281), (282), et (283), afin de pouvoir ensuite composer les expressions des épaisseurs électriques γ et z .

Pour cela je commence par observer que les équations $\alpha = \frac{b}{\gamma}$, $\alpha' = \frac{b^2}{\alpha} = b\gamma$, trouvées dans le § XVII, donnent $\alpha - \alpha' = b(\gamma^{-1} - \gamma)$: et comme l'on a par les séries, en vertu de l'équation (238);

$$\gamma^{-1} = 1 - \delta + \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{2.3}\delta^3 + \text{etc.},$$

$$\gamma = 1 + \delta + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2.3}\delta^3 + \text{etc.},$$

il est clair que l'équation $\alpha(\alpha - \alpha') = \sqrt{N}$, donne

$$(287) \dots\dots V\overline{N} = -2ab\delta(1 + \delta^2\Pi),$$

en posant

$$\Pi = \frac{1}{2.3} + \frac{\delta^2}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Pour développer de même la valeur de c , j'observe que l'équation (247) donne

$$c^2 = (a + b\gamma)(a + b\gamma^{-1}) = (a + b)^2 + ab(\gamma - 2 + \gamma^{-1}) :$$

d'où l'on tire

$$(288) \dots c^2 = (a + b)^2 + ab\delta^2 \left(1 + \frac{\delta^2}{3.4} + \frac{\delta^4}{3.4.5.6} + \frac{\delta^6}{3.4.5.7.8} + \text{etc.} \right) ;$$

$$\frac{ab}{c^2} = \frac{ab}{(a+b)^2} \left\{ 1 - \frac{ab}{(a+b)^2} \delta^2 + \text{etc.} \right\}.$$

Donc, en prenant la racine carrée et ordonnant suivant les puissances de δ^2 nous aurons une série de cette forme

$$c = a + b + \frac{ab}{2(a+b)} \delta^2 \left\{ 1 + A_{(1)}\delta^2 + A_{(2)}\delta^4 + A_{(3)}\delta^6 + \text{etc.} \right\},$$

où l'on a

$$A_{(1)} = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} ;$$

$$A_{(2)} = \frac{1}{360} - \frac{1}{24} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{a^2b^2}{(a+b)^4} ;$$

$$A_{(3)} = \frac{1}{3.4.5.6.7.8} - \frac{1}{320} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{1}{32} \cdot \frac{a^2b^2}{(a+b)^4} - \frac{5}{64} \cdot \frac{a^3b^3}{(a+b)^6} ;$$

etc.

Mais, pour plus de simplicité, nous ferons

$$\Pi' = 1 + A_{(1)}\delta^2 + A_{(2)}(\delta^4) + \text{etc.},$$

ce qui donne

$$(289) \dots\dots c = a + b + \frac{ab \cdot \delta^2 \Pi'}{2(a+b)}.$$

Maintenant, si l'on considère que dans le second membre de l'équation (277) il y a des termes multipliés par $\frac{V\overline{K''}}{\delta \cdot \sqrt{K'}} = \frac{K''}{\delta \cdot \sqrt{N}}$, et que par les séries que nous venons de trouver l'on a; d'abord

$$\frac{V\overline{K''}}{\delta \cdot \sqrt{K'}} = \frac{b^2 - a^2 - c^2 \mp 2ac}{2ab\delta^2(1 + 11\delta^2)},$$

et ensuite

$$(289) \dots\dots\dots \frac{V\overline{K''}}{\delta \cdot \sqrt{K'}} =$$

$$-\frac{(a+b)[1 \pm 1]}{b\delta^2(1+11\delta^2)} - \frac{\left(1 + \frac{1}{12}\delta^2 + \text{etc.}\right)}{2(1+11\delta^2)} \mp \frac{a11'}{2(a+b)(1+11\delta^2)},$$

l'on en conclura, que le cas où l'on prend le signe supérieur des termes ambigus mérite une attention spéciale. Car, à raison de la présence du terme $-\frac{2(a+b)}{b\delta^2}$ il y aura un abaissement de deux unités dans les exposans des fonctions multipliées par ce terme et développées suivant les puissances de δ . En conséquence, il faudra conserver au moins les termes multipliés par δ^2 dans le développement des fonctions $\psi_1(a, b, c)$, $\psi_2(a, b, c)$ afin d'avoir un résultat exact relativement aux deux premiers termes des épaisseurs électriques γ et z fournies par les équations (277) et (278). D'après cette considération, et à l'aide des équations

$$\text{Log.} \left[\frac{(c-a)^2 - b^2}{(c+a)^2 - b^2} \right] = 2 \text{Log.} \left\{ \frac{V\overline{N}}{(c+a)^2 - b^2} \right\},$$

$$\text{Log.} \left[\frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \right] = 2 \text{Log.} \left\{ \frac{V\overline{N}}{c^2 - (a-b)^2} \right\},$$

nous avons formé, en négligeant les termes multipliés par δ^4 , les équations suivantes; savoir

$$M_1 = ab(2 + \delta^2); \quad M_1 V\overline{N} = -4a^2b^2\delta \left(1 + \frac{2}{3}\delta^2\right),$$

$$N' = 2a(a+b) + ab\delta^2; \quad N' V\overline{N} = -2ba^2 \left\{ 2(a+b) + (4b+a)\frac{\delta^2}{3} \right\} \delta;$$

$$\frac{V\bar{N}}{2ab.\delta} = -1 - \frac{\delta^2}{6};$$

$$\frac{V\bar{N}}{2ac.\delta} = -\frac{b}{a+b} - \frac{b(a^2+b^2-ab)}{6(a+b)^3}\delta^2;$$

$$\text{Log.} \left[\frac{c^2-(a+b)^2}{c^2-(a-b)^2} \right] = -2 \text{Log.} 2 + 2 \text{Log.} (-\delta) - \frac{\delta^2}{6};$$

$$\text{Log.} \left[\frac{(c-a)^2-b^2}{(c+a)^2-b^2} \right] = -2 \text{Log.} 2 \left(1 + \frac{a}{b} \right) + 2 \text{Log.} (-\delta) + \frac{\delta^2}{3} - \frac{b(2a+b)}{2(a+b)^3}\delta^2.$$

Il suit de là que ,

$$(290) \dots \frac{V\bar{N}}{2ac.\delta} \text{Log.} \left[\frac{(c-a)^2-b^2}{(c+a)^2-b^2} \right] = \frac{2b}{a+b} \left\{ \text{Log.} 2 \left(1 + \frac{a}{b} \right) - \text{Log.} (-\delta) \right\} \\ - \frac{\delta^2}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{a+b} - \frac{3}{2} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} \right. \\ \left. - \frac{(a^2+b^2-ab)}{(a+b)^2} \left[\text{Log.} 2 \left(1 + \frac{a}{b} \right) - \text{Log.} (-\delta) \right] \right\};$$

$$(291) \dots \frac{V\bar{N}}{2ab.\delta} \text{Log.} \left[\frac{c^2-(a+b)^2}{c^2-(a-b)^2} \right] = 2 \text{Log.} 2 - 2 \text{Log.} (-\delta) \\ + \frac{\delta^2}{6} \left\{ 1 + 2 \text{Log.} 2 - 2 \text{Log.} (-\delta) \right\}.$$

Chacune des intégrales qui entre dans le second membre des équations (280), (281), (282) s'y trouvant multipliée par $V\bar{N}$, on aura à considérer un produit de la forme

$$(292) \dots H = G\delta. \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(p^2 \delta^2 + q^2 \sin^2 \delta t)}.$$

Or, en faisant pour plus de simplicité, $\frac{p}{q} = \varepsilon$, et

$$\frac{\sin. \partial t}{\partial t} = 1 - \partial^2 U ; \quad \frac{t^2}{\partial^2} - \frac{\sin^2. \partial t}{\partial^4} = \frac{t^4}{3} (1 + R \partial^2) ,$$

il est facile d'établir l'équation

$$H = \frac{G}{q^2} \cdot \int_0^\infty \frac{t dt (1 - U \partial^2)}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + \varepsilon^2)} \left\{ 1 - \frac{\partial^2 t^4}{3} \cdot \left(\frac{1 + R \partial^2}{t^2 + \varepsilon^2} \right) \right\} ,$$

par laquelle l'on reconnait aussitôt, que la fonction H est développable suivant les puissances de ∂^2 . De sorte que, en négligeant les termes multipliés par ∂^4 , il suffit de prendre $U = \frac{t^2}{6}$, $R = 0$. Alors, en développant $\frac{G}{q^2}$, et faisant $\frac{G}{q^2} = G' + G'' \partial^2$, il viendra

$$H = (G' + G'' \partial^2) \int_0^\infty \frac{t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + \varepsilon^2)} \\ - \frac{G' \partial^2}{6} \cdot \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + \varepsilon^2)} + \frac{G' \partial^2}{3} \cdot \int_0^\infty \frac{t^5 dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + \varepsilon^2)} .$$

Maintenant, si l'on remplace; $t^3 dt$ par $t dt \{ (t^2 + \varepsilon^2) - \varepsilon^2 \}$, $t^5 dt$ par $t dt \{ (t^2 + \varepsilon^2) - \varepsilon^2 \}^2$, et si l'on a égard à l'équation

$$\int_0^\infty \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{1}{24} \quad (*) ,$$

(*) Cette équation se démontre facilement en observant que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} = \int_0^\infty \frac{t dt \cdot e^{-2\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}} = \int_0^\infty t dt \cdot e^{-2\pi t} (1 + e^{-2\pi t} + e^{-4\pi t} + \text{etc.}) \\ = \frac{1}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} \right) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{24} .$$

l'on obtiendra cette expression de H ; savoir

$$H = \frac{G' \delta^2}{144} + \left\{ G' + \left(G'' - \frac{G' \varepsilon^2}{2} \right) \delta^2 \right\} \int_0^\infty \frac{t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + \varepsilon^2)} \\ + \frac{G' \varepsilon^4 \delta^2}{3} \int_0^\infty \frac{t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + \varepsilon^2)^2} ;$$

où la seconde intégrale est immédiatement connue par le coefficient différentiel de la première, pris par rapport au paramètre ε . Et comme, d'un autre côté (*), l'on a la formule

$$\int_0^\infty \frac{t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + \varepsilon^2)} = \frac{1}{2}C - \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}\text{Log.}\varepsilon + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt(t^{\varepsilon-1} - 1)}{1-t} ,$$

dans laquelle C représente la transcendante numérique 0,577216.... déjà rencontrée dans le § IX, il est clair que l'on a ;

$$\int_0^\infty \frac{t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(t^2 + \varepsilon^2)^2} = -\frac{(1 + 2\varepsilon)}{8\varepsilon^3} - \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 \frac{dt.t^{\varepsilon-1}\text{Log.}t}{1-t} .$$

Donc en substituant ces valeurs, et remplaçant ε par $\frac{p}{q}$, il viendra

$$(293) \dots H = \frac{G'}{2} \left\{ C + \text{Log.}\frac{p}{q} - \frac{q}{2p} + \frac{\delta^2}{72} + \frac{\delta^2}{6} \cdot \frac{p}{q} \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right\} \\ - \frac{\delta^2}{4} \left\{ G'' \frac{q}{p} - \left(2G'' - G' \frac{p^2}{q^2} \right) \left(C + \text{Log.}\frac{p}{q} \right) \right\} \\ + \left\{ \frac{G'}{2} + \left(\frac{G''}{2} - \frac{G' p^2}{4q^2} \right) \delta^2 \right\} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{\frac{p}{q}-1} - 1 \right)}{1-t} \\ - \frac{G' p^3}{12 \cdot q^3} \delta^2 \int_0^1 \frac{dt.t^{\frac{p}{q}-1}\text{Log.}t}{1-t} .$$

(*) Voyez les pages 154 et 190 du second Volume des Exercices de Calcul Intégral de LEGENDRE.

En différenciant les deux membres de cette équation par rapport à p , et posant

$$(294) \dots H' = G \delta^1 \cdot \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(p^2 \delta^2 + q^2 \sin^2 \delta t)^2},$$

l'on trouvera

$$(295) \dots H' = -\frac{G'}{4p^2} \left\{ 1 + \frac{q}{2p} + \frac{\delta^2}{6} \cdot \left(\frac{p}{q} - \frac{2p^2}{q^2} \right) \right\} \\ - \frac{\delta^2}{8p^2} \left\{ G'' \frac{q}{p} + 2G'' - G' \frac{p^2}{q^2} - 2G' \frac{p^2}{q^2} \left(C + \text{Log.} \frac{p}{q} \right) \right\} \\ - \frac{1}{4pq} \left\{ G' + \left(G'' - G' \frac{p^2}{q^2} \right) \delta^2 \right\} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{\frac{p}{q}-1} \cdot \text{Log.} t}{1-t} \\ + \frac{G' \delta^2}{4q^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{\frac{p}{q}-1} - 1 \right)}{1-t} + \frac{G' p^2 \delta^2}{24 \cdot q^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{\frac{p}{q}-1} \cdot \text{Log.}^2 t}{1-t}.$$

Supposons maintenant que l'on ait en développant p et q les équations $p = p' + \beta' \delta^2$, $q = q' + \beta'' \delta^2$; et par conséquent $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} + \beta \delta^2$, en faisant $\beta = \frac{\beta'}{q'} - \frac{\beta'' p'}{q'^2}$. Alors, en désignant par $[H]$ et par $[H']$ les valeurs de H et H' , formées en prenant $p = p'$, $q = q'$, l'on aura

$$(296) \dots H = [H] + \frac{G' \beta \delta^2}{2} \cdot \left\{ \frac{q'}{p'} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q'^2}{p'^2} + \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{\frac{p'}{q'}-1} \cdot \text{Log.} t}{1-t} \right\};$$

$$(297) \dots H' = [H'] - \frac{G' \delta^2}{8p'^2} \left(\beta'' - 4\beta' - 3\beta' \frac{q'}{p'} \right) \\ + \frac{G' \delta^2}{4p'q'} \cdot \left\{ \left(\frac{\beta'}{p'} + \frac{\beta''}{q'} \right) \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{\frac{p'}{q'}-1} \cdot \text{Log.} t}{1-t} - \beta \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{\frac{p'}{q'}-1} \cdot \text{Log.}^2 t}{1-t} \right\}.$$

Cette dernière formule devient nécessaire pour développer les termes affectés des intégrales $\Pi_1''(b, a, c)$, et $\Pi_2''(b, a, c)$, qui entrent dans la valeur de γ , lorsque l'on prend le signe *inférieur* des termes ambigus. Tel est le motif pour lequel je l'ai préparée ici par anticipation.

En appliquant la formule (296) au dernier terme de l'équation (282), pour lequel on a ;

$$p^2 = 4a^2b^2 \left(1 + \frac{1}{3}\delta^2\right) ; \quad q^2 = 4a^2b^2 ;$$

$$G' = 4 ; \quad G'' = \frac{8}{3} ; \quad \frac{p'}{q'} = 1 ; \quad \beta = \frac{1}{6} ,$$

l'on obtient ce résultat fort simple; savoir

$$(298) \dots -4M_1\sqrt{N} \cdot \Pi_2'''(b, a, c) = 2C - 1 + \left(C - \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{\delta^2}{3} .$$

Pour appliquer la même formule au dernier terme de l'équation (280), il faut prendre

$$p^2 = 4a^2b^2 \left(1 + \frac{1}{3}\delta^2\right) ; \quad q^2 = 4a^2c^2 ;$$

$$G' = \frac{4b}{a+b} ; \quad G'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{b(a^2 + 4b^2 - ab)}{(a+b)^3} ;$$

d'où l'on tire d'abord ;

$$p' = 2ab ; \quad q' = 2a(a+b) ; \quad \beta' = \frac{1}{3}ab ;$$

$$\beta'' = \frac{ba^2}{a+b} ; \quad \frac{p'}{q'} = \frac{b}{a+b} ; \quad \beta = \frac{1}{6} \cdot \frac{b}{a+b} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab^2}{(a+b)^3} ;$$

et ensuite

$$(299) \dots - 4N' \sqrt{N} \cdot \Pi_1'''(a, b, c) =$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{2b}{a+b} \text{Log} \left(1 + \frac{a}{b} \right) + \frac{2bC}{a+b} \left\{ 1 + \frac{\partial^2}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \partial^2 \right\} \\ &+ \frac{\partial^2}{3} \cdot \frac{b}{(a+b)^3} \cdot \left\{ \left(\frac{13}{12} a^2 - \frac{5}{12} b^2 - \frac{4}{3} ab \right) - (a^2 + b^2 - ab) \text{Log} \left(1 + \frac{a}{b} \right) \right\} \\ &+ 2aA' \left(1 + \frac{\partial^2}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \partial^2 \right) + \frac{\partial^2}{3} \cdot \frac{ba^2(a-b)}{(a+b)^3} E'; \end{aligned}$$

après avoir fait

$$A' = \frac{b}{a(a+b)} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{a}{a+b}} - 1 \right)}{1-t}; \quad E' = \frac{b}{a(a+b)} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{a}{a+b}} \text{Log} t}{1-t}.$$

Maintenant, par le rapprochement des équations (290) et (299) l'on voit aussitôt que l'équation (280) est réduite à celle-ci;

$$(300) \dots \psi_1(a, b, c) = 2af_1(a, b, c) =$$

$$\begin{aligned} &2aA' \left(1 + \frac{\partial^2}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \partial^2 \right) + \frac{\partial^2}{3} \cdot \frac{ba^2(a-b)}{(a+b)^3} \cdot E' \\ &+ \frac{b}{a+b} \left\{ 1 + \frac{\partial^2}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \partial^2 \right\} \left\{ 2C + \text{Log} \frac{4}{\partial^2} \right\} + \left(\frac{1}{6} - \frac{ab}{(a+b)^2} \right) \cdot \frac{b\partial^2}{6(a+b)}; \end{aligned}$$

de laquelle l'on tire immédiatement $\psi_1(b, a, c)$ par la permutation des deux lettres a et b .

Relativement à la fonction $\psi_2(a, b, c)$, il est évident que, par le rapprochement des équations (282), (291) et (298), l'on a;

$$(301) \dots \psi_2(a, b, c) = \left(1 + \frac{\partial^2}{6} \right) \left\{ 2C + \text{Log} \frac{4}{\partial^2} \right\} + \frac{\partial^2}{36}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par

$$-\frac{b}{2ac} = -\frac{b}{2a(a+b)} + \frac{b^2}{4(a+b)^2} \partial^2,$$

nous aurons (conformément aux équations (284)) l'expression de la fonction $f_2(a, b, c)$; c'est-à-dire que l'on a;

$$(302) \dots f_2(a, b, c) = -\frac{b}{2a(a+b)} \left\{ 1 + \frac{\partial^2}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \partial^2 \right\} \left\{ {}^2C + \text{Log.} \left(\frac{4}{\partial^2} \right) \right\} - \frac{b}{a(a+b)} \cdot \frac{\partial^2}{72}.$$

Mais nous avons

$$f_1(a, b, c) = \frac{1}{2a} \psi_1(a, b, c);$$

donc, par la combinaison des équations (300) et (302) l'on fera disparaître à la fois les termes affectés de $\text{Log.} \frac{4}{\partial^2}$, et ceux multipliés par la

transcendante numérique C , c'est-à-dire, qu'en posant $D'' = \frac{D'}{2ab}$, et

$$(303) \dots A'' = -\frac{b^2}{12(a+b)^3} + \left(\frac{1}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \right) A' + \frac{ab(a-b)}{6(a+b)^3} E';$$

l'on a l'équation

$$(304) \dots \frac{f_1(a, b, c) + f_2(a, b, c)}{{}_2D} = \frac{(A' + A'' \partial^2)}{D''}.$$

Et en désignant par F' , B' , B'' ce que deviennent E' , A' , A'' , après la permutation des deux lettres a et b , l'on tire de là l'équation

$$(305) \dots \frac{f_1(b, a, c) + f_2(b, a, c)}{{}_2D} = \frac{(B' + B'' \partial^2)}{D''}.$$

Les mêmes équations (300) et (302) donnent

$$(306) \dots \frac{f_1(a, b, c) - f_2(a, b, c)}{{}_2D} = \frac{1}{D''} \left\{ A' + \frac{b}{a(a+b)} \left\{ 1 + \frac{\partial^2}{6} - \frac{ab \partial^2}{2(a+b)^2} \right\} \left\{ {}^2C + \text{Log.} \left(\frac{4}{\partial^2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \partial^2 \left\{ \frac{A'}{6} - \frac{ab A'}{2(a+b)^2} + \frac{b}{36a(a+b)} - \frac{ab(a-b)E'}{6(a+b)^3} - \frac{b^2}{12(a+b)^3} \right\} \right\}.$$

Cela posé, la formation de l'équation (282) ne présente plus aucune difficulté, et l'on trouve, en négligeant toujours les termes multipliés par δ^4 ;

$$(307) \dots D'' = 2A'B' + \frac{(a^2A' + b^2B')}{ab(a+b)} \left[2C + \text{Log.} \left(\frac{4}{\delta^2} \right) \right] + F.\delta^2,$$

où l'on a fait, pour plus de simplicité,

$$\begin{aligned} F = & \frac{2(a^2A' + b^2B')}{ab(a+b)} \cdot \left\{ \frac{1}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \right\} \left\{ 2C + \text{Log.} \frac{4}{\delta^2} \right\} \\ & + \left\{ \frac{(a-b)(a^2E' - b^2F')}{6(a+b)^3} - \frac{ab}{6(a+b)^4} \right\} \left\{ 2C + \text{Log.} \frac{4}{\delta^2} \right\} \\ & + \frac{(a^2A' + b^2B')}{6ab(a+b)} \cdot \left\{ \frac{1}{6} - \frac{ab}{(a+b)^2} \right\} + \frac{ab(a-b)}{3(a+b)^3} (B'E' - A'F') \\ & + 4A'B' \left\{ \frac{1}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Maintenant, afin d'écrire l'équation (277) d'une manière plus expressive, nous ferons d'abord observer, que, d'après les équations (284), l'on a

$$\frac{f_1(a, b, c)}{2D} = \frac{f_1(a, b, c)}{D''}; \quad \frac{f_2(a, b, c)}{2D} = \frac{f_2(a, b, c)}{D''};$$

ensuite, nous ferons

$$\lambda = \frac{b}{c \mp a}; \quad \lambda' = \frac{c \pm a}{c \mp a}; \quad \lambda'' = 1 - \frac{2K''}{\delta \sqrt{N}};$$

$$\lambda''' = (\lambda \lambda' - 1) + \frac{2\sqrt{N}}{\delta(c \mp a)[(c \mp a + b)]};$$

$$(308) \dots \left\{ \begin{aligned} \Pi_3'(b, a, c) &= \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1) (K'' \mp 4ac\lambda^2 \sin^2 \delta t)}; \\ \Pi_3''(b, a, c) &= \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1) (K'' \mp 4ac\lambda^2 \sin^2 \delta t)^2}; \end{aligned} \right.$$

ce qui revient à dire, que, après avoir substitué pour K'' et K''' leurs valeurs, l'équation (277) est équivalente à celle-ci ;

$$\begin{aligned}
 (309) \dots a D'' . y = & \lambda'' \left\{ A \left[f_1(b, a, c) + f_2(b, a, c) \right] - B \left[f_1(a, b, c) + f_2(a, b, c) \right] \right\} \\
 & + \lambda''' \left\{ A f_2(b, a, c) - B f_1(a, b, c) \right\} \\
 & + \frac{4 K''^2}{V \sqrt{N}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[A f_1(b, a, c) - B f_2(a, b, c) \right] \Pi_1'(b, a, c) \\ & + \lambda \left[A f_2(b, a, c) - B f_1(a, b, c) \right] \Pi_3'(b, a, c) \end{aligned} \right\} \\
 & - 8 K'' . V \sqrt{N} \left\{ \begin{aligned} & \left[A f_1(b, a, c) - B f_2(a, b, c) \right] \Pi_1''(b, a, c) \\ & + \lambda \lambda^2 \left[A f_2(b, a, c) - B f_1(a, b, c) \right] \Pi_3''(b, a, c) \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Nous nous dispenserons d'écrire l'expression de $b D'' . z$ que l'on tire de cette formule par la permutation des lettres $A, B; a, b$, conformément à l'équation (278).

Mais ces formules deviendront plus symétriques, en posant

$$(310) \dots \Gamma(a, b, c) = f_1(a, b, c) + f_2(a, b, c) ;$$

$$(311) \dots \Gamma'(a, b, c) = f_1(a, b, c) - f_2(a, b, c) ;$$

et en introduisant les fonctions Γ, Γ' , dont l'expression est, ainsi qu'on vient de le voir, plus simple que celle des fonctions f_1 et f_2 . Alors, en faisant

$$\begin{aligned}
 (312) \dots \Omega(b, a, c) = & \lambda'' + \frac{\lambda'''}{2} + \frac{2 K''^2}{V \sqrt{N}} \left\{ \Pi_1'(b, a, c) + \lambda . \Pi_3'(b, a, c) \right\} \\
 & - 4 K'' V \sqrt{N} \left\{ \Pi_1''(b, a, c) + \lambda \lambda^2 . \Pi_3''(b, a, c) \right\} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (313) \dots \Omega'(b, a, c) = & \frac{\lambda'''}{2} - \frac{2 K''^2}{V \sqrt{N}} \left\{ \Pi_1'(b, a, c) - \lambda . \Pi_3'(b, a, c) \right\} \\
 & + 4 K'' V \sqrt{N} \left\{ \Pi_1''(b, a, c) - \lambda \lambda^2 . \Pi_3''(b, a, c) \right\} ;
 \end{aligned}$$

l'on aura, pour déterminer les épaisseurs électriques qui ont lieu sur les quatre points des surfaces sphériques placés sur la ligne des centres, ces deux équations; savoir

$$(314) \dots a D'' x = \left\{ A\Gamma(b, a, c) - B\Gamma(a, b, c) \right\} \Omega(b, a, c) \\ - \left\{ A\Gamma'(b, a, c) + B\Gamma'(a, b, c) \right\} \Omega'(b, a, c) ;$$

$$(315) \dots b D'' z = \left\{ B\Gamma(a, b, c) - A\Gamma(b, a, c) \right\} \Omega(a, b, c) \\ - \left\{ B\Gamma'(a, b, c) + A\Gamma'(b, a, c) \right\} \Omega'(a, b, c) .$$

Parvenu à ce point, il devient nécessaire de séparer les deux cas qui, jusqu'ici, ont été réunis par l'ambiguïté du signe $\pm$. Toutefois, il est remarquable que l'on puisse ainsi conduire l'analyse de manière, que les deux cas opposés soient exprimés par des formules ambiguës, où il y a plusieurs facteurs qui leurs sont communs. De sorte que, toute la diversité tombe uniquement sur la valeur différente que prennent les deux fonctions $\Omega(a, b, c)$, $\Omega'(a, b, c)$, suivant que l'on considère l'un ou l'autre point placé sur la ligne des centres. J'ajouterai encore, que le calcul des deux fonctions

$$\frac{A\Gamma(b, a, c) - B\Gamma(a, b, c)}{D''} ; \quad \frac{A\Gamma'(b, a, c) + B\Gamma'(a, b, c)}{D''} ;$$

a, en outre, l'avantage d'être commun aux formules générales (263), (264) par lesquelles l'on détermine les épaisseurs électriques de la couche relatives à un point quelconque de la surface des deux sphères. Car, en posant

$$(316) \dots \Omega(b, a, c, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Pi_1(b, a, c, \theta) + \frac{b}{2} \Pi_2(b, a, c, \theta) \\ + \frac{b(c^2 - a^2)}{2(c^2 - 2ac \cos \theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$(317) \dots \Omega'(b, a, c, \theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Pi_1(b, a, c, \theta) + \frac{b}{2} \Pi_2(b, a, c, \theta) \\ + \frac{b(c^2 - a^2)}{2(c^2 - 2ac \cos \theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

il est évident que les deux équations (263), (264) deviennent équivalentes à celles-ci ; savoir

$$(318) \dots a D'' y = \left\{ A \Gamma(b, a, c) - B \Gamma(a, b, c) \right\} \Omega(b, a, c, \theta) \\ - \left\{ A \Gamma'(b, a, c) + B \Gamma'(a, b, c) \right\} \Omega'(b, a, c, \theta) ;$$

$$(319) \dots b D'' z = \left\{ B \Gamma(a, b, c) - A \Gamma(b, a, c) \right\} \Omega(a, b, c, \theta) \\ - \left\{ B \Gamma'(a, b, c) + A \Gamma'(b, a, c) \right\} \Omega'(a, b, c, \theta) .$$

Mais, pour pousser plus loin les développemens dont il est ici question, il est indispensable de distinguer les deux cas, et nous commencerons par celui où l'on prend le signe *supérieur* dans les termes ambigus.

§ XXVI.

*Expression des épaisseurs électriques y et z
qui ont lieu sur les deux points des surfaces sphériques les plus rapprochés,
placés sur la ligne des centres.*

Avant tout, je remarque que nous avons ici

$$\lambda = \frac{b}{c-a} = 1 - \frac{a}{2(a+b)} \delta^2 ; \\ \lambda \lambda' = \frac{b(c+a)}{(c-a)^2} = \frac{2a+b}{b} - \frac{a(4a+b)}{2b(a+b)} \delta^2 ; \\ \frac{2\sqrt{N}}{\delta(c-a)(c-a+b)} = -\frac{2a}{b} + \frac{a(7a-2b)}{6b(a+b)} \delta^2 ;$$

et par conséquent

$$\lambda''' = -\frac{5}{6} \cdot \frac{a}{b} \delta^2 .$$

Ensuite j'observe que, en négligeant les termes multipliés par δ^4 il suffit de prendre

$$1 - \lambda \lambda'^2 = 1 - \left(\frac{2a+b}{b} \right)^2 = -\frac{4a(a+b)}{b^2} ;$$

$$\frac{K''}{\delta} \left\{ \Pi_1'(b, a, c) - \lambda \Pi_3'(b, a, c) \right\} = (1 - \lambda) \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} ;$$

$$\frac{K''\delta}{\delta} \left\{ \Pi_1''(b, a, c) - \lambda \lambda'^2 \Pi_3''(a, b, c) \right\} = -\frac{4a(a+b)}{b^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} ;$$

$$\frac{K''\delta}{V\bar{N}} = -\frac{2(a+b)}{b} ; \quad \frac{\delta V\bar{N}}{K''} = -\frac{b}{2(a+b)} \delta^2 ;$$

ce qui donne

$$\Omega'(b, a, c) = \left\{ \frac{-5}{12} \cdot \frac{a}{b} + \frac{a+b}{b} \cdot \frac{a}{12(a+b)} + \frac{2b}{a+b} \cdot \frac{a(a+b)}{6b^2} \right\} \delta^2 = 0 \cdot \delta^2 .$$

Ainsi, il est démontré par là, que la valeur actuelle de la fonction $\Omega'(b, a, c)$ est, au moins, de l'ordre des quantités multipliées par δ^4 . De sorte qu'il est permis de la négliger dans cette approximation, et de considérer seulement la fonction $\Omega(b, a, c)$. Mais comme, en prenant les signes supérieurs, l'équation (289^{us}) donne, en négligeant les termes multipliés par δ^2 ;

$$\lambda'' = \frac{4(a+b)}{b\delta^2} + \left\{ \frac{4b-2a}{3b} + \frac{a}{a+b} \right\} ;$$

on voit qu'il aurait fallu tenir compte des termes multipliés par δ^4 dans le développement de la fonction $\Gamma(b, a, c)$, afin d'avoir exactement les termes multipliés par δ^2 dans le second membre des deux équations

$$(320) \dots a D'' . y = \left\{ A \Gamma(b, a, c) - B \Gamma(a, b, c) \right\} \Omega(b, a, c) ,$$

$$(321) \dots b D'' . z = \left\{ B \Gamma(a, b, c) - A \Gamma(b, a, c) \right\} \Omega(a, b, c) ,$$

auxquelles on peut ici réduire les formules générales (314), (315). Cela posé il est clair que la valeur actuelle de $\Omega(b, a, c)$ doit être formée sans avoir égard au terme multiplié par $-4K''V\bar{N}$, et en prenant seulement

$$\frac{K''}{\delta} \left\{ \Pi_1'(b, a, c) + \lambda \Pi_3'(b, a, c) \right\} = 2 \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{1}{12} ;$$

ce qui donne

$$\Omega(b, a, c) = \lambda'' - \frac{(a+b)}{3b} = \frac{4(a+b)}{b\delta^2} + \frac{b-a}{b} + \frac{a}{a+b}.$$

Il suit de là, et des équations (304), (305), que nous avons

$$aD'' \cdot \gamma = \{ A(B' + B''\delta^2) - B(A' + A''\delta^2) \} \Omega(b, a, c);$$

$$bD'' \cdot z = \{ B(A' + A''\delta^2) - A(B' + B''\delta^2) \} \Omega(a, b, c);$$

d'où l'on tire

$$(322) \dots\dots \gamma =$$

$$\frac{(AB' - BA')}{D''} \left\{ \frac{4(a+b)}{ab\delta^2} + \frac{b-a}{ab} + \frac{1}{a+b} \right\} + \frac{4(AB'' - BA'')(a+b)}{ab \cdot D''};$$

$$(323) \dots\dots z =$$

$$-\frac{(AB' - BA')}{D''} \left\{ \frac{4(a+b)}{ab\delta^2} + \frac{a-b}{ab} + \frac{1}{a+b} \right\} - \frac{4(AB'' - BA'')(a+b)}{ab \cdot D''};$$

pour la valeur, mathématiquement exacte, des deux premiers termes du développement de γ et z ordonné suivant les puissances de δ .

Mais, pour rendre ces formules plus immédiatement comparables avec l'observation, il convient d'en éliminer δ^2 . Pour cela, remarquons que l'équation (289) donne

$$\frac{2}{\Delta} = \frac{4(a+b)}{ab\delta^2(1 + A_{(1)}\delta^2)} = \frac{4(a+b)}{ab \cdot \delta^2} - \frac{4(a+b)A_{(1)}}{ab},$$

où $\Delta = c - a - b$: et en y substituant pour $A_{(1)}$ sa valeur, nous aurons

$$\frac{2}{\Delta} = \frac{4(a+b)}{ab\delta^2} - \frac{(a+b)}{3ab} + \frac{1}{a+b}.$$

Ainsi il est clair que les valeurs précédentes de γ et z sont équivalentes à celles-ci;

$$(324) \dots \gamma = \frac{(AB' - BA')}{D''} \left\{ \frac{2}{\Delta} + \frac{4b-2a}{3ab} \right\} + \frac{4(AB'' - BA'')(a+b)}{ab \cdot D''},$$

$$(325) \dots z = -\frac{(AB' - BA')}{D''} \left\{ \frac{2}{\Delta} + \frac{4a-2b}{3ab} \right\} - \frac{4(AB'' - BA'')(a+b)}{ab \cdot D''};$$

où il suffira de faire, conformément aux équations (286) et (307);

$$(326) \dots D'' = 2 A' B' + \frac{(a^2 A' + b^2 B')}{ab(a+b)} \left\{ 2 C + \text{Log.} \left(\frac{2ab}{(a+b)\Delta} \right) \right\},$$

en se rappelant que l'emploi de cette formule exige que $\frac{(a+b)\Delta}{2ab}$ soit une petite fraction.

Ce résultat très-remarquable n'est pas fort différent de celui trouvé par POISSON dans la page 89 de son second Mémoire. Pour rendre l'accord parfait il faut d'abord corriger dans cette page deux fautes d'impression: c'est-à-dire, lire $4b-2a$ au lieu de $4a-2b$ dans la valeur de y , et *viceversa* $4a-2b$ dans celle de z . En outre, il faut observer que le dénominateur Δ de POISSON (duquel il donne les deux premiers termes dans la page 102) deviendra égal à celui que nous avons désigné par D'' , en y remplaçant $-2 \text{Log.} \delta^2$ par $-\text{Log.} \delta^2$. C'est, par méprise, que POISSON a doublé à la fois le logarithme du nombre 2 et celui de δ^2 .

On voit par ces formules, que leur premier terme étant divisé par la distance Δ qui sépare les deux surfaces sphériques, peut croître indéfiniment à mesure que l'on diminue cet intervalle, et qu'il devient infini au contact. Mais cette circonstance capitale du phénomène, qui amène la rupture de l'équilibre et l'apparition de l'étincelle, n'aura pas lieu, si les épaisseurs initiales A et B étaient telles que l'on eût $AB' - BA' = 0$, puisque cette équation entraîne la disparition du terme susceptible de croître jusqu'à l'infini. Or cette équation, qu'il est assez difficile de réaliser expérimentalement *sans* le contact, est précisément celle qui s'établit nécessairement au contact des deux sphères: car nous avons déjà démontré (Voyez les équations (64) et (65)) que, alors, il y a entre les épaisseurs moyennes A et B un rapport tel que $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$. Donc, *après* le contact, et à la petite distance Δ entre les deux surfaces, les formules qu'il faudra employer pour déterminer les intensités électriques y et z seront celles-ci;

$$(327) \dots y = \frac{4(A'B'' - B'A'')(a+b)}{ab.A'D''} A;$$

$$(328) \dots z = -\frac{4(A'B'' - B'A'')(a+b)}{ab.B'D''} B;$$

abstraction faite des autres termes ordonnés suivant les puissances de δ^2 qui suivent ce premier et principal terme.

Ainsi, c'est à l'aide de ces formules que l'on pourra déterminer *a priori* l'intensité de l'électricité qui afflue sur chacun des deux points en regard au moment de la séparation des deux sphères. Et comme on démontrera ci-après que le coefficient $A'B'' - B'A''$ est toujours positif, si la différence $a - b$ des deux rayons est elle-même positive, on tire de là, et de ce que les quantités A' , B' et D'' sont évidemment positives, la conséquence, que: « à l'instant de la séparation de deux sphères conductrices et isolées, l'électricité qui afflue aux points par lesquels elles » se touchaient, est d'égale intensité et d'espèce différente: mais, toujours, » de même espèce sur la plus grande et d'espèce contraire sur la plus » petite, relativement à l'électricité totale dont A et B expriment, respectivement, les épaisseurs moyennes ».

Mais cette conclusion n'est pas vraie en général: il y a un cas d'exception, soit à l'égard des dernières formules soit à l'égard de la conséquence. Ce cas est celui de deux sphères de même rayon et également électrisées. Alors l'on a $A = B$, $A' = B'$, $A'' = B''$; et en général

$$A\Gamma(b, a, c) = B\Gamma(a, b, c) :$$

et comme il est manifeste que, dans cet état d'égalité, l'on a $\gamma = z$, il faudra, pour déterminer γ partir de l'équation

$$\gamma = -\frac{2A}{a} \cdot \frac{\Gamma'(a, a, c)}{D''} \cdot \Omega'(a, a, c) ,$$

à laquelle se réduisent les formules (314) et (315). Or il est clair, par les équations (306) et (307), que le premier terme du rapport

$$\frac{\Gamma'(a, a, c)}{D''} = \frac{2A' + 2C + \text{Log.} \left(\frac{4}{\delta^2} \right)}{4A'^2 + 2A' \left[2C + \text{Log.} \frac{4}{\delta^2} \right]} ,$$

est égal à $\frac{1}{2A'}$; du moins cela est vrai en négligeant dans cette valeur de γ la quantité

$$\frac{2A' \cdot \Omega'(a, a, c)}{2C + \text{Log.} \left(\frac{4}{\delta^2} \right)} ,$$

dont le numérateur (déjà de l'ordre de δ^4) est en outre diminué par la grandeur du dénominateur: donc, puisque pour $a=b$, nous avons

$${}_aA' = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dt (t^{-\frac{1}{2}} - 1)}{1-t} = \text{Log. } 2 ,$$

la question consiste à déterminer au moins le premier terme de la fonction $\mathcal{Q}'(a, a, c)$, pour en faire ensuite la substitution dans l'équation

$$(329) \dots \mathcal{J} = - \frac{A \cdot \mathcal{Q}'(a, a, c)}{\text{Log. } 2} .$$

Cela posé, voici toutes les principales parties de ce calcul. D'abord on trouve que, dans le cas de $b=a$, l'on a

$$\lambda\lambda' - 1 = 2 - \frac{5}{4}\delta^2 + \frac{79}{192}\delta^4 ; \quad \frac{2\sqrt{N}}{2c(c-a)} = -2 + \frac{5}{12}\delta^2 - \frac{91}{960}\delta^4 ,$$

et par conséquent

$$(330) \dots \frac{\lambda'''}{2} = -\frac{5}{12}\delta^2 + \frac{19}{120}\delta^4 .$$

Ensuite pour avoir la partie de $\mathcal{Q}'(a, a, c)$ qui, conformément à la formule (313), dépend des intégrales définies il faudra prendre

$$-\frac{2K''\delta}{\sqrt{N}} = 8 + \frac{\delta^2}{6} ; \quad \frac{4\delta\sqrt{N}}{K''} = -\delta^2 + \frac{\delta^4}{48} ;$$

$$\lambda = 1 - \frac{\delta^2}{4} + \frac{11}{192}\delta^4 ; \quad \lambda\lambda' = 9 - \frac{21}{4}\delta^2 .$$

Mais pour un motif qui sera expliqué ci-après je m'abstiens, pour un moment, de continuer de faire $b=a$; et j'observe que ayant, en général,

$$\frac{4ac}{K''} = 1 - \frac{b^2}{4(a+b)^2}\delta^2 ;$$

$$\frac{4ac\lambda^2}{K''} = 1 - \frac{(4a^2 + 4ab + b^2)}{4(a+b)^2}\delta^2 ;$$

$$\frac{K''}{\delta} \cdot \Pi_1'(b, a, c) =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} \left(1 - \frac{\partial^2 t^2}{6} + \frac{\partial^4 t^4}{120} \right) \left(1 + \partial^2 t^2 + \frac{2}{3} \partial^4 t^4 - \frac{b^2 \partial^4 t^4}{4(a+b)^2} \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} + \frac{5}{6} \partial^2 \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} + \frac{61}{120} \partial^4 \int_0^{\infty} \frac{t^5 dt}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{b^2 \partial^4}{4(a+b)^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^5 \partial t}{e^{2\pi t} - 1} ; \\ & \frac{K''}{\delta} \cdot \Pi_3'(b, a, c) = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} + \frac{5}{6} \partial^2 \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} + \frac{61}{120} \partial^4 \int_0^{\infty} \frac{t^5 dt}{e^{2\pi t} - 1} \\ & \quad - \frac{(4a^2 + 4ab + b^2)}{4(a+b)^2} \partial^4 \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} ; \end{aligned}$$

l'on tire de-là la formule

$$(331) \dots \frac{K''}{\delta} \left\{ \Pi_1'(b, a, c) - \Pi_3'(b, a, c) \right\} = \frac{a \partial^4}{a+b} \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} ,$$

que je voulais établir pour toute valeur de a et de b .

En négligeant ∂^4 l'on a

$$\begin{aligned} (332) \dots \frac{K''_2}{\delta} \cdot \Pi_1''(b, a, c) &= \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} \left(1 - \frac{\partial^2 t^2}{6} \right) (1 + 2 \partial^2 t^2) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} + \frac{11}{6} \partial^2 \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} ; \end{aligned}$$

et de plus ;

$$\frac{K''_2}{\delta} \Pi_3''(b, a, c) = \frac{K''_2}{\delta} \Pi_1'(b, a, c) .$$

Donc, dans le cas particulier de $a=b$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{K''}{\delta} \{ \Pi_1'(a, a, c) - \lambda \Pi_3'(a, a, c) \} = \\ \frac{\partial^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{5}{6} \cdot \frac{\partial^2}{240} \right) + \delta^4 \left(\frac{1}{480} - \frac{11}{192 \cdot 24} \right) = \frac{\partial^2}{96} + \frac{13 \cdot \partial^4}{480 \cdot 48} ; \\ \frac{K''^2}{\delta} \{ \Pi_1''(a, a, c) - \lambda \lambda'^2 \Pi_3''(a, a, c) \} = \\ \left(\frac{1}{24} + \frac{11}{6} \cdot \frac{\partial^2}{240} \right) \left(-8 + \frac{21}{4} \delta^2 \right) = -\frac{1}{3} + \frac{227}{90 \cdot 16} \delta^2 ; \end{aligned}$$

en observant que l'on a

$$\int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{1}{24} , \quad \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{1}{240} \quad (*) .$$

En substituant les valeurs que nous venons de trouver dans la formule (313), l'on aura sans peine

$$\begin{aligned} \Omega'(a, a, c) = -\frac{5}{12} \delta^2 + \frac{19}{120} \delta^4 + \left(8 + \frac{\partial^2}{6} \right) \left(\frac{\partial^2}{96} + \frac{13}{480 \cdot 48} \delta^4 \right) \\ + \left(\delta^2 - \frac{\partial^4}{48} \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{227}{90 \cdot 16} \delta^2 \right) ; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\Omega'(a, a, c) = 0 \cdot \delta^2 + \frac{19}{120} \delta^4 + \left(\frac{13}{6 \cdot 480} + \frac{1}{6 \cdot 96} - \frac{227}{90 \cdot 16} - \frac{1}{144} \right) \delta^4 ;$$

c'est-à-dire

$$\Omega'(a, a, c) = 0 \cdot \delta^2 + \left(\frac{19}{120} - \frac{19}{120} \right) \delta^4 = 0 \cdot \delta^2 + 0 \cdot \delta^4 .$$

Ce résultat inattendu, et pourtant véritable, nous apprend que dans

(*) La formule générale pour évaluer ces intégrales est celle-ci :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2m+1} dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m+1)}{(2\pi)^{2m+2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2m+2}} + \frac{1}{3^{2m+2}} + \text{etc.} \right\} .$$

le cas des sphères égales, l'épaisseur y dont il est ici question est au moins de l'ordre de $\delta^6 = 4^3 \left(\frac{\Delta}{a}\right)^3$; c'est-à-dire de l'ordre du cube de l'intervalle Δ qui sépare les deux surfaces. Si Poisson a trouvé, au lieu de zéro,

$$-\Omega'(a, a, c) = \frac{1}{120} \delta^4,$$

dans la page 105 de son second Mémoire, cela tient à une erreur de calcul qu'il a commise dans la page 83 en cherchant la valeur de la fonction qu'il nomme S' . En effet, si l'on retient pour cette comparaison les intégrales définies au lieu de leurs valeurs numériques, nous avons

$$\begin{aligned} \Omega'(a, a, c) = & -\frac{5}{12} \delta^2 + \frac{19}{120} \delta^4 \\ & + \left(8 + \frac{\delta^2}{6}\right) \left\{ \left(\frac{\delta^2}{4} - \frac{11}{192} \delta^4\right) \int_0^\infty \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} + \left(\frac{5}{24} + \frac{1}{2}\right) \delta^4 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} \right\} \\ & + \left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{48}\right) \left(8 - \frac{21}{4} \delta^2\right) \left\{ \int_0^\infty \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} + \frac{11}{6} \delta^2 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} \right\}; \end{aligned}$$

ce qui revient à dire, que

$$\begin{aligned} -\Omega'(a, a, c) = & 0 \cdot \delta^2 - \frac{19}{120} \delta^4 \\ & + \left\{ \frac{11}{24} - \frac{1}{24} + \frac{65}{12} \right\} \delta^4 \int_0^\infty \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} - \left\{ \frac{5}{3} + 4 + \frac{44}{3} \right\} \delta^4 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} \\ = & -\frac{19}{120} \delta^4 + \frac{35}{6} \delta^4 \int_0^\infty \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{61}{3} \delta^4 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1}. \end{aligned}$$

Or, en rapprochant ce résultat des valeurs de $\frac{S'}{h}$ et $\frac{X'}{h'}$ trouvées par Poisson dans les pages 83 et 85 on voit que la discordance tombe sur le coefficient de

$$\partial^4 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} ;$$

ce coefficient doit être $-\frac{61}{3}$, et non $-(18 - \frac{5}{3} + 2) = -\frac{55}{3}$ comme cela résulte de l'expression de S' trouvée par Poisson.

Pour plus de clarté j'ajouterai que, *sans* faire $a=b$, et retenant *seulement* les termes affectés de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} ,$$

l'on aurait, en vertu de l'équation (331) et des équations

$$\lambda = 1 - \frac{a}{2(a+b)} \partial^2 , \quad 1 - \lambda \lambda'^2 = -\frac{4a(a+b)}{b^2} ,$$

ces deux égalités; savoir

$$-\frac{2K''\partial}{\sqrt{N}} \left\{ \Pi_1'(b, a, c) - \lambda \cdot \Pi_3'(b, a, c) \right\} =$$

$$\frac{4(a+b)}{b} \left\{ \frac{a}{a+b} + \frac{5}{6} \cdot \frac{a}{2(a+b)} \right\} \partial^4 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} ;$$

$$\frac{4\partial\sqrt{N}}{K''} \left\{ \Pi_1''(b, a, c) - \lambda\lambda'^2 \cdot \Pi_3''(b, a, c) \right\} =$$

$$\frac{11}{6} \cdot \frac{4a(a+b)}{b^2} \cdot \frac{2b}{a+b} \partial^4 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} .$$

De sorte que leur somme introduit dans la valeur de la fonction $\Omega'(b, a, c)$ les trois termes

$$\left(4 \cdot \frac{a}{b} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2a}{b} + \frac{44}{3} \cdot \frac{a}{b} \right) \partial^4 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{a}{b} \left(20 + \frac{1}{3} \right) \partial^4 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1} ;$$

et dans la valeur de $-\frac{\Omega'(b, a, c)}{a}$ le terme

$$-\frac{\Omega'(b, a, c)}{a} = -\frac{1}{b} \left(20 + \frac{1}{3} \right) \delta^1 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Or ce terme est celui qui devrait être identique avec le terme correspondant que l'on voit dans la valeur de $\frac{S'}{h'}$ de Poisson à la page 83 déjà citée. Ainsi, au lieu de $20 + \frac{1}{3} = 18 - \frac{5}{3} + 4$, Poisson a trouvé, par un calcul erroné, $18 - \frac{5}{3} + \frac{4a}{a+b}$: ce qui revient à dire que la constante absolue $\frac{61}{3}$ a été remplacée par une quantité susceptible de varier avec le rapport des rayons a et b des deux sphères. Telle est, en détail, l'explication de cette singulière discordance.

Le calcul que l'on vient d'exposer démontre la nécessité de considérer les termes multipliés par δ^6 , si l'on veut avoir, au moins, le premier terme significatif de l'épaisseur γ relative à deux sphères égales et également électrisées. En exécutant en conséquence les développemens précédens de manière que le terme cherché comprenne toutes les parties qui concourent à sa formation, l'on obtient, au lieu de la valeur de $\Omega'(a, a, c)$ donné plus haut, celle-ci;

$$\begin{aligned} (333) \dots \Omega'(a, a, c) = & -\frac{5}{12} \delta^2 + \frac{19}{120} \delta^4 - \frac{181}{7.512} \delta^6 \\ & + \left(8 + \frac{\delta^2}{6} - \frac{\delta^4}{32.45} \right) \left(\frac{\delta^2}{96} + \frac{13}{48.480} \delta^4 + \frac{2753}{27.35.8.512} \delta^6 \right) \\ & + \left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{48} + \frac{\delta^6}{15.128} \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{227}{16.90} \delta^2 + \frac{4055}{7.27.512} \delta^4 \right); \end{aligned}$$

de laquelle l'on tire

$$\Omega'(a, a, c) = \delta^6 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{181}{7.512} + \frac{2753}{27.35.512} + \frac{13}{48.6.480} - \frac{1}{45.32.96} \\ & + \frac{4055}{7.27.512} + \frac{227}{90.16.48} + \frac{1}{45.128} \end{aligned} \right\};$$

c'est-à-dire,

$$\Omega'(a, a, c) = \frac{11}{128.135} \delta^6.$$

De sorte que l'on a

$$(334) \dots y = -\frac{A(11)\delta^6}{(128.135)\text{Log. } 2} = -\frac{A.11}{270\text{Log. } 2} \left(\frac{\Delta}{a}\right)^3,$$

ou bien

$$(335) \dots y = -A(0, 05878) \left(\frac{\Delta}{a}\right)^3.$$

Pour offrir plus de facilité à ceux qui voudraient vérifier l'exactitude de cette équation, je consigne ici les résultats intermédiaires; savoir

$$\lambda = 1 - \frac{\delta^2}{4} + \frac{11}{192} \delta^4 - \frac{301}{90.256} \delta^6;$$

$$\lambda\lambda' - 1 = 2 - \frac{5}{4} \delta^2 + \frac{79}{192} \delta^4 - \frac{565}{18.256} \delta^6;$$

$$\frac{2\sqrt{N}}{c(c-a)\delta} = -2 + \frac{5}{12} \delta^2 - \frac{91}{960} \delta^4 + \frac{697}{63.512} \delta^6;$$

$$\frac{\lambda'''}{2} = -\frac{5}{12} \delta^2 + \frac{19}{128} \delta^4 - \frac{181}{7.512} \delta^6; \quad \frac{4ac}{K''} = 1 - \frac{\delta^2}{16} + \frac{\delta^4}{384};$$

$$\frac{4ac.\lambda^2}{K''} = 1 - \frac{9}{16} \delta^2 + \frac{27}{128} \delta^4; \quad -\frac{2K''\delta}{\sqrt{N}} = 8 + \frac{\delta^2}{6} - \frac{\delta^4}{45.32};$$

$$\frac{4\delta\sqrt{N}}{K''} = -\delta^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{48} + \frac{\delta^4}{15.128}\right); \quad \lambda\lambda'^2 = 9 - \frac{21}{4} \delta^2 + \frac{141}{64} \delta^4;$$

$$\frac{K''}{\delta} \left\{ \Pi_1'(a, a, c) - \Pi_3'(a, a, c) \right\} = \left(\frac{\delta^4}{2} - \frac{5}{24} \delta^6 \right) \frac{1}{240} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\delta^6}{12.42};$$

$$\frac{K''}{\delta} \left\{ \Pi_1'(a, a, c) - \lambda \Pi_3'(a, a, c) \right\} = \frac{\delta^2}{96} + \frac{13}{480.48} \delta^4 + \frac{2753}{27.35.8.512} \delta^6;$$

$$\frac{K''}{\delta} \Pi_1''(a, a, c) = \frac{1}{24} + \left(\frac{11}{6} \delta^2 - \frac{\delta^4}{8} \right) \frac{1}{240} + \frac{241}{120.12.42} \delta^4;$$

$$\frac{K''}{\delta} \Pi_3''(a, a, c) = \frac{1}{24} + \left(\frac{17}{6} \delta^2 - \frac{9}{8} \delta^4 \right) \frac{1}{240} + \frac{241}{120.12.42} \delta^4;$$

$$\frac{K''}{\delta} \left\{ \Pi_1''(a, a, c) - \lambda\lambda'^2 \Pi_3''(a, a, c) \right\} = -\frac{1}{3} + \frac{237}{90.16} \delta^2 - \frac{4055}{7.27.512} \delta^4.$$

C'est en substituant ces valeurs dans l'équation (313) que l'on a obtenu l'équation (333).

Il suit de là et de ce que la fraction $\frac{\Delta}{a}$ doit être dans la formule (335) inférieure à $\frac{1}{4}$, que cette intensité électrique échappera, par son excessive petitesse, à la manière ordinaire de la mesurer et sera confondue avec le zéro. Mais, mathématiquement parlant, il faudra concevoir, que, immédiatement après la séparation de deux sphères égales il y a, par influence, décomposition d'une partie de l'électricité naturelle, et affluence d'électricité *contraire* vers les points qui étaient primitivement en contact; ce qui est une conséquence de la théorie opposée à celle énoncée par Poisson dans la page 106 déjà citée.

Il y aura donc, comme dans le cas des sphères inégales, une distance à laquelle l'électricité sera de nouveau nulle: mais l'état négatif qui précède cette distance étant insensible, ou du moins fort difficile à observer, les choses se passeront comme si il n'avait aucune existence; et là où l'on trouvera (par expérience) les premières traces d'électricité de même signe que A , l'on aura déjà dépassé la distance c des deux centres qui satisfait à l'équation $\Omega'(a, a, c) = 0$.

Cette équation étant remarquable par sa forme transcendante je la placerai ici telle qu'elle résulte des équations (288) et (313): la première, dans le cas de $a=b$, donne

$$c = a \left(e^{\frac{1}{2}\delta} + e^{-\frac{1}{2}\delta} \right); \quad \sqrt{N} = c \sqrt{c^2 - 4a^2} = ac \cdot \left(e^{\frac{1}{2}\delta} - e^{-\frac{1}{2}\delta} \right)$$

$$-\frac{2K''}{\sqrt{N}} = 2 \sqrt{\frac{c+a}{c-a}} = \frac{2 \left(e^{\frac{1}{2}\delta} + 1 \right)}{e^{\frac{1}{2}\delta} - 1};$$

$$\frac{\lambda'''}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{a(c+a)}{2(c-a)^2} + \frac{\sqrt{c^2 - 4a^2}}{\delta(c-a)};$$

et la seconde, en y faisant pour plus de simplicité,

$$r = \frac{e^{\frac{1}{2}\delta} + 1}{e^{\frac{1}{2}\delta} - 1}; \quad r' = e^{\frac{1}{2}\delta} + e^{-\frac{1}{2}\delta} - 1; \quad q = \frac{p}{r'};$$

$$p = \sqrt{\frac{4a}{c+2a}} = \frac{2}{e^{\frac{1}{4}\delta} + e^{-\frac{1}{4}\delta}} ;$$

donne ,

$$(336) \dots 0 = -\frac{1}{2} + \frac{2+r'}{2r'^2} + \frac{e^{\frac{1}{2}\delta} - e^{-\frac{1}{2}\delta}}{r'\delta} \\ - 2r' \left\{ \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(1 - p^2 \sin^2 \delta t)} - \frac{1}{r'} \cdot \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(1 - q^2 \sin^2 \delta t)} \right\} \\ + \frac{4}{r'} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(1 - p^2 \sin^2 \delta t)^2} - \frac{(2+r')^2}{r'^3} \cdot \int_0^\infty \frac{dt \sin \delta t}{(e^{2\pi t} - 1)(1 - q^2 \sin^2 \delta t)^2} \right\}.$$

Je reprends maintenant la considération des équations (327) et (328) pour donner des séries propres à faciliter le calcul numérique du coefficient $A'B'' - B'A''$, où la définition des quantités A'' et B'' est donnée par l'équation (303). Pour développer l'intégrale désignée par E' j'observe d'abord qu'en remplaçant $\frac{1}{1-t}$ par $1 + \frac{t}{1-t}$, l'on a

$$\int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{a}{a+b}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} = \left(\frac{a+b}{b} \right)^2 + \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{\frac{b}{a+b}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} ;$$

donc, en développant l'exponentielle $t^{-\frac{b}{a+b}}$ et intégrant ensuite chaque terme par la formule donnée dans le § X l'on aura, après avoir fait

$$a = \frac{b}{a+b}; \quad k_a = S_n - 1 ;$$

$$(337) \dots H = k_2 - 2 \cdot a k_3 + 3 \cdot a^2 k_4 - 4 \cdot a^3 k_5 + 5 \cdot a^4 k_6 - \text{etc.} ;$$

$$(338) \dots \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{a}{a+b}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} = \left(\frac{a+b}{b} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{a+2b} \right)^2 + H .$$

Ainsi, l'équation (303) revient à dire que l'on a

$$(339) \dots A'' = -\frac{b^2}{12(a+b)^3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{(a-b)}{(a+b)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a+b} \right)^2 \right\} \\ - \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2(a-b)}{(a+b)^3} H + A' \left\{ \frac{1}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \right\}.$$

Si l'on prend $a=1$, le calcul de la série désignée par H se fera avec d'autant plus de facilité que b sera une fraction plus petite. Mais, par la permutation des lettres a et b , que l'on doit faire pour conclure de là la valeur de B'' l'on perd une partie de cet avantage, puisque la nouvelle série procède suivant les puissances de $\frac{a}{a+b}$. Pour obvier à cet inconvénient je remarque, qu'en développant directement l'exponentielle $t^{-\frac{a}{a+b}}$ l'on a ;

$$\int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{a}{a+b}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} = \left(\frac{a+b}{b} \right)^2 + k_2 + 2 \left(\frac{a}{a+b} \right) k_3 + 3 \left(\frac{a}{a+b} \right)^2 k_4 + \text{etc.}$$

De sorte qu'en posant $a' = \frac{a}{a+b}$, et

$$(340) \dots H' = k_2 + 2a'k_3 + 3a'^2k_4 + 4a'^3k_5 + \text{etc.},$$

l'on a cette seconde expression de A'' ; savoir

$$(341) \dots A'' = -\frac{b^2}{12(a+b)^3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{(a-b)}{(a+b)^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2(a-b)}{(a+b)^3} H' + A' \left\{ \frac{1}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \right\}.$$

Donc en employant cette formule pour en tirer la valeur de B'' par la permutation des deux lettres a et b l'on aura

$$(342) \dots B'' = -\frac{a^2}{12(a+b)^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{(a-b)}{(a+b)^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2(a-b)}{(a+b)^3} H'' + B' \left\{ \frac{1}{6} - \frac{ab}{2(a+b)^2} \right\};$$

où nous avons

$$(343) \dots H'' = k_2 + 2a.k_3 + 3a^2.k_4 + 4a^3.k_5 + \text{etc.}$$

De cette manière le calcul des deux séries H et H'' sera facilité par la circonstance que la différence de leurs termes tombe seulement sur le signe.

Cela posé, à l'aide des deux équations (339) et (342) l'on obtient la suivante :

$$(344) \dots\dots\dots \frac{4(a+b)(A'B''-B'A'')}{aA'} = N'' =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{(a+b)^2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{B'}{A'} \left(1 - \frac{b^2}{2a^2} \right) \right\} + \frac{2(a-b)b^2}{3a(a+b)(a+2b)^2} \cdot \frac{B'}{A'}$$

$$+ \frac{2}{3} \cdot \frac{a(a-b)}{(a+b)^3} \left\{ H'' + \frac{b^2}{a^2} H \frac{B'}{A'} \right\} ;$$

et par conséquent les équations (327) et (328) deviennent équivalentes à celles-ci ;

$$(345) \dots\dots\dots \begin{cases} y = \frac{N'' \cdot A}{b D''} ; \\ z = -\frac{A'}{B'} \cdot \frac{N'' \cdot B}{b D''} ; \end{cases}$$

où il faudra substituer pour $b D''$ sa valeur fournie par l'équation (326).

Si l'on suppose $a > b$, les formules trouvées dans les §§ IX et X prouvent que l'on a toujours $\frac{B'}{A'} > 1$: d'après cela la seule inspection de l'expression analytique de la quantité N'' que nous venons de trouver suffit pour mettre en évidence qu'elle doit être *toujours positive*, puisque chacune des trois parties qui la composent sont elles-mêmes positives ; c'est-à-dire de même signe que la différence $a-b$. Cette démonstration nous paraît beaucoup plus simple que celle donnée par Poisson dans le N.º (48) de son second Mémoire.

Avant d'aller plus loin je ferai remarquer que la limite vers laquelle converge N'' à mesure que $\frac{b}{a}$ diminue est

$$N'' = \frac{2}{3a} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6} + S_2 - 1 \right\} ,$$

ou bien

$$N'' = \frac{2}{3a} \cdot \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) .$$

D'après l'équation (326) le dénominateur bD'' converge vers la limite

$$\frac{1}{a} \left\{ 2C + \text{Log. } 2 + \text{Log.} \left(\frac{b}{\Delta} \right) \right\} :$$

donc, pour des valeurs fort petites de $\frac{b}{a}$ il suffira de prendre

$$(346) \dots j = \frac{A(2\pi^2 - 3)}{9 \left\{ 2C + \text{Log. } 2 + \text{Log.} \left(\frac{b}{\Delta} \right) \right\}} ;$$

ou bien

$$(347) \dots j = \frac{A(0,92995)}{C' + \frac{1}{2} \text{Log.} \left(\frac{b}{\Delta} \right)} ;$$

en posant $C' = C + \frac{1}{2} \text{Log. } 2 = 0,923789$.

Pour faciliter le calcul de cette formule il convient de l'écrire avec le Logarithme *tabulaire*: alors l'on a

$$(348) \dots \begin{cases} j = \frac{A(0,807740)}{0,8023930 + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right)} ; \\ z = - \frac{B(1,328679)}{0,8023930 + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right)} . \end{cases}$$

En appliquant notre formule à l'exemple choisi par Poisson, où l'on a $\Delta = \frac{b}{10^6}$, il viendra $j = A(0,11875)$: c'est-à-dire que cette épaisseur est environ le *neuvième* de l'épaisseur moyenne A qui a lieu sur la plus grande des deux sphères.

Cette valeur de j ne s'accorde pas avec celle que Poisson a donnée, pour le même objet, dans la page 104 de son second Mémoire. La discordance tient à deux causes: la première est celle déjà signalée plus haut relativement à son dénominateur Δ : la seconde tient à ce qu'il fallait prendre

$$\frac{1}{3} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} - \frac{1}{12} ,$$

au lieu de

$$\frac{1}{6} \int_0^1 \frac{dt \cdot \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} - \frac{1}{12}$$

dans l'évaluation de la limite de $A'B'' - B'A''$: effectivement nos formules (339) et (341) démontrent, que la limite vers laquelle converge A'' est zéro: et la formule (342) démontre que la limite vers laquelle converge B'' est

$$-\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} (S_2 - 1) + \frac{\pi^2}{36},$$

lorsqu'on fait $a=1$: ainsi il y a omission, dans le calcul de Poisson, d'une des deux parties, chacune égale à $\frac{\pi^2}{36}$.

Le calcul arithmétique des équations (345) deviendra un peu plus régulier en posant

$$C'' = 2 \text{ m} \left[C + \frac{1}{2} \text{Log. } 2 \right] = 0,8023930;$$

$$P = C'' - \text{Log. tab.}^c \left(1 + \frac{b}{a} \right) + \frac{2 \text{ m} \cdot B' b \left(1 + \frac{b}{a} \right)}{b^2 \cdot \frac{B'}{A'} + 1 + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{B'}{A'}};$$

$$Q + \frac{1}{2} = \frac{a^2 - b^2}{(a + 2b)^2} + \left(\frac{a-b}{a+b} \right) H; \quad R' = \frac{B'}{A'} R;$$

$$R = \frac{\left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{B'}{A'} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \left(\frac{a-b}{a+b} \right) H'' + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{B'}{A'} Q \right\} 2 \text{ m}}{3 A' a \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{B'}{A'} \right)};$$

ce qui donne

$$(349) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{A \cdot R}{P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{\Delta}{b} \right)}; \\ z = - \frac{B \cdot R'}{P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{b}{\Delta} \right)}; \end{array} \right.$$

où $\text{m} = \text{module} = 0,4342 \dots \dots$ et $\text{Log. } 2 \text{ m} = 9,9388143$.

Rien ne démontre mieux que ces formules la différence intime qu'il y a entre le cas des sphères inégales et celui des sphères *égales*: dans ce dernier [Voyez la formule (335)] l'intensité varie rapidement, étant proportionnelle au *cube* de la distance, tandis que pour les sphères inégales la variation de l'intensité étant Logarithmique est sans comparaison plus lente. Ainsi ces deux cas, quoique compris dans les mêmes formules générales, constituent en réalité deux variétés d'un même phénomène qu'il est essentiel de distinguer pour éviter toute confusion, soit dans les idées théoriques soit dans les résultats fournis par l'expérience.

Pour faciliter les applications des deux formules (349) je place ici la table que j'ai calculée pour y prendre immédiatement les valeurs des trois nombres P , R et R' au moins dans les cas relatifs à des sphères dont le rapport $\frac{b}{a}$ des rayons est donné par des fractions fort simples.

$\frac{b}{a}$	P	R	R'
$\frac{1}{2}$	1, 12523	0, 32040	0, 37173
$\frac{1}{3}$	1, 06526	0, 42582	0, 53406
$\frac{2}{3}$	1, 14384	0, 17335	0, 18938
$\frac{1}{4}$	1, 01671	0, 50374	0, 66343
$\frac{3}{4}$	1, 14139	0, 12336	0, 13138
$\frac{1}{5}$	0, 98091	0, 55983	0, 76085
$\frac{2}{5}$	1, 09480	0, 32743	0, 39698
$\frac{3}{5}$	1, 14059	0, 21691	0, 24234

$\frac{b}{a}$	P	R	R'
$\frac{4}{5}$	1, 13726	0, 09561	0, 10043
$\frac{1}{6}$	0, 95561	0, 58991	0, 82389
$\frac{5}{6}$	1, 13289	0, 07806	0, 08124
$\frac{1}{7}$	0, 93635	0, 61592	0, 87631
$\frac{2}{7}$	1, 03907	0, 46934	0, 60463
$\frac{3}{7}$	1, 10524	0, 34454	0, 41220
$\frac{4}{7}$	1, 13763	0, 23657	0, 26696
$\frac{5}{7}$	1, 14371	0, 15374	0, 16548
$\frac{6}{7}$	1, 12947	0, 05358	0, 05542
$\frac{1}{8}$	0, 91992	0, 63087	0, 90798
$\frac{3}{8}$	1, 08470	0, 39440	0, 48404
$\frac{5}{8}$	1, 14241	0, 20019	0, 22174
$\frac{7}{8}$	1, 12705	0, 06389	0, 06579
$\frac{1}{9}$	0, 90825	0, 66808	0, 97665
$\frac{2}{9}$	0, 99767	0, 53128	0, 71247
$\frac{4}{9}$	1, 11010	0, 33780	0, 39364

$\frac{b}{a}$	P	R	R'
$\frac{5}{9}$	1, 13535	0, 24778	0, 28124
$\frac{7}{9}$	1, 13920	0, 10775	0, 11386
$\frac{8}{9}$	1, 12572	0, 05042	0, 05188
$\frac{1}{10}$	0, 90234	0, 65849	0, 97237
$\frac{3}{10}$	1, 04733	0, 45613	0, 58274
$\frac{7}{10}$	1, 14364	0, 14237	0, 15392
$\frac{9}{10}$	1, 12294	0, 04492	0, 04597
$\frac{1}{11}$	0, 88996	0, 67765	1, 00917
$\frac{2}{11}$	0, 96752	0, 57315	0, 79094
$\frac{3}{11}$	1, 03125	0, 48177	0, 62557
$\frac{4}{11}$	1, 07996	0, 39918	0, 49302
$\frac{5}{11}$	1, 11345	0, 32372	0, 38282
$\frac{6}{11}$	1, 13387	0, 25502	0, 29061
$\frac{7}{11}$	1, 14299	0, 19276	0, 21268
$\frac{8}{11}$	1, 14269	0, 13652	0, 14837
$\frac{9}{11}$	1, 13472	0, 08723	0, 09115

$\frac{b}{a}$	P	R	R'
$\frac{10}{11}$	1, 12137	0, 04061	0, 04147
$\frac{1}{12}$	0, 88267	0, 68253	1, 02119
$\frac{1}{13}$	0, 87691	0, 69203	1, 04370
$\frac{1}{14}$	0, 87185	0, 69955	1, 06176
$\frac{1}{15}$	0, 86735	0, 69211	1, 05451
$\frac{1}{20}$	0, 85138	0, 73130	1, 13380

Les trois nombres P , H et H'' qui ont été calculés pour obtenir ces résultats deviennent nécessaires pour avoir les valeurs de y et de z avec toute la précision que comportent les formules (324) et (325). Car en posant

$$(350) \dots G = \frac{P - C'' + \text{Log. tab.}^c \left(1 + \frac{b}{a}\right)}{A' B'} = \frac{2 \ln b \left(1 + \frac{b}{a}\right)}{A' \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{B'}{A'}\right)},$$

il est facile de voir, que ces formules peuvent être mises sous cette forme; savoir

$$y = \frac{G \left\{ (A B' - B A') \left[\frac{1}{\Delta} + \frac{(2b-a)}{3ab} \right] + \frac{2(a+b)}{ab} (A B'' - B A'') \right\}}{P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{b}{\Delta} \right)};$$

$$z = - \frac{G \left\{ (A B' - B A') \left[\frac{1}{\Delta} + \frac{2a-b}{3ab} \right] + \frac{2(a+b)}{ab} (A B'' - B A'') \right\}}{P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{b}{\Delta} \right)};$$

et en faisant

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{a^3}{b^3} - \frac{1}{2} + \frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} + \left(\frac{a-b}{a+b} \right) H; \\ G' &= \frac{bB'}{a(a+b)} + \frac{aQ'}{3b(a+b)^2}; \\ G'' &= \frac{bA'}{a(1+b)} - \frac{bQ'}{3a(a+b)^2}; \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} Q'_1 &= \frac{1}{2} - \frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{a-b}{a+b} \right) H''; \\ G'_1 &= \frac{aB'}{b(a+b)} + \frac{aQ'_1}{3b(a+b)^2}; \\ G''_1 &= \frac{aA'}{b(a+b)} - \frac{bQ'}{3a(a+b)^2}; \end{aligned} \right.$$

l'on verra, qu'en vertu des formules (339) et (342) l'on peut écrire

$$(351) \dots \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{G \{ A(B' + G'\Delta) - B(A' + G''\Delta) \}}{\Delta \left\{ P + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right) \right\}}; \\ z &= - \frac{G \{ A(B' + G'_1\Delta) - B(A' + G''_1\Delta) \}}{\Delta \left\{ P + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right) \right\}}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, en calculant les valeurs de Q' , Q'_1 ; G , G' , G'' , G'_1 , G''_1 , à l'aide de la table placée au fond de ce Mémoire, l'on pourra évaluer les intensités électriques y et z qui ont lieu à une petite distance Δ , avant le contact des deux surfaces sphériques, quelles que soient les intensités primitives A et B : ce qui peut être utile soit pour comparer les portions $y-A$ et $z-B$ des électricités ainsi dissimulées, soit pour comparer la théorie avec l'observation des distances qui, avec, ou sans l'interposition d'une lame de verre ou de toute autre substance isolante différente de l'air atmosphérique, précèdent immédiatement la rupture de l'équilibre électrique ou l'apparition de l'étincelle. D'après cette considération, qui me paraît importante, je vais consigner ici les valeurs de G , Q' et Q'_1 que j'ai employées pour la construction de la Table précédente.

Mais auparavant je ferai observer qu'il ne faudrait pas avoir recours à ces dernières formules pour le cas particulier où les deux sphères seraient égales et *inégalement électrisées*. Car les formules primitives (324) et (325) étant rapprochées de l'équation (339) donnent spontanément, en y faisant $a=b$;

$$(352) \dots \dots x = -z = \frac{2m(A-B)\left(\frac{a}{\Delta} + C''\right)}{C''' + \text{Log. tab.}^e\left(\frac{a}{\Delta}\right)},$$

où l'on a

$$2m = 0,868589; \quad C''' = C'' + \text{Log. tab.}^e 2 = 1,103423;$$

$$C'' = \frac{1}{2} - \frac{m}{24 \cdot \text{Log. tab.}^e 2} = 0,439888.$$

Cette formule, remarquable par sa simplicité, rend plus sensible l'action qui se développe par influence, et démontre que, *ceteris paribus*, la rupture de l'équilibre entre des sphères d'égal diamètre arrive à des distances Δ de leurs surfaces qui sont proportionnelles aux rayons des sphères.

Cela posé voici la Table propre à faciliter le calcul des intensités électriques exprimées par les équations (351).

$\frac{b}{a}$	G	Q'	Q'
$\frac{1}{2}$	0,59297	4,49020	0,52129
$\frac{1}{3}$	0,37128	9,09866	0,77093
$\frac{2}{3}$	0,81855	1,95507	0,27016
$\frac{1}{4}$	0,26614	16,26043	0,87968
$\frac{3}{4}$	0,93002	1,42032	0,06307
$\frac{1}{5}$	0,21096	25,86881	0,93993
$\frac{2}{5}$	0,45872	6,24355	0,75629
$\frac{3}{5}$	0,72850	2,42934	0,35029

$\frac{b}{a}$	G	Q'	Q'
$\frac{4}{5}$	0,99574	1,17173	-0,04102
$\frac{1}{6}$	0,16770	36,49775	0,97806
$\frac{5}{6}$	1,04020	0,99254	-0,11276
$\frac{1}{7}$	0,14114	49,54110	1,00430
$\frac{2}{7}$	0,31051	12,43073	0,83436
$\frac{3}{7}$	0,49680	5,39814	0,63361
$\frac{4}{7}$	0,68980	2,85229	0,40080
$\frac{5}{7}$	0,88315	1,62808	0,13489
$\frac{6}{7}$	1,07130	0,93556	-0,16516
$\frac{1}{8}$	0,12176	64,61638	1,00599
$\frac{3}{8}$	0,42567	7,14195	0,71259
$\frac{5}{8}$	0,76233	2,30018	0,30501
$\frac{7}{8}$	1,09400	0,89249	-0,16474
$\frac{1}{9}$	0,10697	81,64664	1,03803
$\frac{2}{9}$	0,23245	20,57388	0,91361
$\frac{4}{9}$	0,51814	4,99523	0,60936

$\frac{b}{a}$	G	Q'	Q_i'
$\frac{5}{9}$	0,66829	3,04557	0,42829
$\frac{7}{9}$	0,96684	1,27675	0,00576
$\frac{8}{9}$	1,11051	0,82173	—0,23618
$\frac{1}{10}$	0,09821	100,69038	1,04951
$\frac{3}{10}$	0,32856	11,26986	0,81570
$\frac{7}{10}$	0,86331	1,71973	0,16296
$\frac{9}{10}$	1,12620	0,78494	—0,26192
$\frac{1}{11}$	0,08602	121,72080	1,05875
$\frac{2}{11}$	0,18499	30,67716	0,96093
$\frac{3}{11}$	0,29557	13,65677	0,85101
$\frac{4}{11}$	0,41066	7,61110	0,72877
$\frac{5}{11}$	0,53164	4,75980	0,59371
$\frac{6}{11}$	0,65458	3,17699	0,44557
$\frac{7}{11}$	0,77769	2,19971	0,28408
$\frac{8}{11}$	0,89978	1,54929	—0,08935
$\frac{9}{11}$	1,02036	1,09163	—0,07993

$\frac{b}{a}$	G	Q'	Q'
$\frac{10}{11}$	1, 13790	0, 75547	—0, 28285
$\frac{1}{12}$	0, 07833	144, 75018	1, 06637
$\frac{1}{13}$	0, 07189	169, 78392	1, 07317
$\frac{1}{14}$	0, 06643	196, 79822	1, 07816
$\frac{1}{15}$	0, 06173	225, 81812	1, 08285
$\frac{1}{20}$	0, 04559	400, 89007	1, 09895

Les valeurs de P et de G étant, en outre, utiles pour la réduction en nombres des formules que nous allons exposer dans le § suivant : nous pensons que, par le rapprochement des différentes expressions algébriques des lois qui régissent ces phénomènes, l'on sentira mieux l'avantage qu'il y a d'avoir déjà préparés le petit nombre des élémens numériques qui sont indispensables pour leur évaluation.

§ XXVII.

*Expression des épaisseurs électriques y et z
qui ont lieu sur les deux points des surfaces sphériques les plus éloignés,
placés sur la ligne des centres.*

Pour trouver ces expressions, il faut reprendre les équations (314), et (315), et les développer en prenant le signe *inférieur* dans les termes ambigus. Nous allons exécuter ce calcul, en négligeant les termes multipliés par δ^2 , et en conservant ceux divisés par la quantité variable

$2C + \text{Log.} \left(\frac{4}{\delta^3} \right)$. Cette approximation sera, en général, suffisante pour les petites distances Δ qui séparent les deux sphères.

Ici nous avons

$$K'' = (c - a - b)(c - a + b) = \frac{ab^3 \delta^2}{a + b} ;$$

$$4K''\sqrt{N} = -\frac{8a^2 b^5}{a + b} \delta^3 ; \quad \lambda = \lambda' = \frac{b}{2a + b} ;$$

$$\lambda'' = 1 + \frac{b}{a + b} ; \quad \lambda''' = -1 + \frac{b^2}{(2a + b)^2} - \frac{2ab}{(a + b)(2a + b)} ;$$

et les formules (312) et (313) peuvent être réduites à celles-ci :

$$\Omega(b, a, c) = \lambda'' + \frac{\lambda'''}{2} + \frac{8a^2 b^3}{a + b} \delta^3 \left\{ \Pi_1''(b, a, c) + \frac{b^3}{(2a + b)^3} \Pi_3''(b, a, c) \right\} ;$$

$$\Omega'(b, a, c) = \frac{\lambda'''}{2} - \frac{8a^2 b^3}{a + b} \delta^3 \left\{ \Pi_1''(b, a, c) - \frac{b^3}{(2a + b)^3} \Pi_3''(b, a, c) \right\} .$$

Cela posé, par l'application de la formule (295), l'on trouvera sans difficulté, que, en négligeant dans le second membre les termes multipliés par δ^2 , l'on a

$$\delta^3 \Pi_1''(b, a, c) = -\frac{(a + 2b)}{16a^2 b^3} - \frac{1}{32a^2 b(a + b)} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{\frac{b}{2(a+b)}-1} \text{Log.} t}{1 - t} ;$$

$$\delta^3 \Pi_3''(b, a, c) = -\frac{(3a + 2b)(2a + b)}{16a^2 b^3} - \frac{(2a + b)^3}{32a^2 b^3(a + b)} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{\frac{2a+b}{2(a+b)}-1} \text{Log.} t}{1 - t} .$$

En substituant ces valeurs et réduisant, l'on verra que les termes non affectés du signe intégral se détruisent, et que l'on a

$$\Omega(b, a, c) = -aY' ; \quad \Omega(b, a, c) = aY'' ;$$

en faisant, pour plus de simplicité,

$$Y' = \frac{b^2}{4a(a+b)^2} \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{b}{2(a+b)}} \left(t^{-\frac{a}{a+b}} - 1 \right) \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t};$$

$$Y'' = \frac{b^2}{4a(a+b)^2} \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{b}{2(a+b)}} \left(t^{-\frac{a}{a+b}} + 1 \right) \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t}.$$

Mais, en différentiant par rapport au paramètre k les deux membres de l'équation connue de EULER ;

$$\int_0^1 \frac{dt (t^{k-1} - t^{-k})}{1-t} = \pi \cot. \pi k,$$

l'on obtient

$$\int_0^1 \frac{dt (t^{k-1} + t^{-k}) \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} = \frac{\pi^2}{\sin^2. \pi k}.$$

done en faisant $k = \frac{b}{2(a+b)}$, nous aurons

$$Y'' = \frac{\pi^2 b^2}{4a(a+b)^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b}{2(a+b)} \right\}}.$$

Maintenant, d'après les équations (306) et (326) l'on trouvera, qu'en faisant, conformément aux dénominations du § précédent ;

$$P' = C'' - \text{Log. tab.}^e \left(1 + \frac{b}{a} \right); \quad p = \frac{m \frac{a}{b} (a+b) A'}{P' + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right)};$$

$$q = \frac{P - P'}{P' + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right)} = \frac{A' B' G}{P' + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right)},$$

l'on a ;

$$\frac{\Gamma'(a, b, c)}{D''} = \frac{b^2}{a^2 A' + b^2 B'} \cdot \left(\frac{1+p}{1+q} \right) ;$$

$$\frac{\Gamma'(b, a, c)}{D''} = \frac{a^2}{a^2 A' + b^2 B'} \cdot \left(\frac{1+p \cdot \frac{B'}{A'} \cdot \frac{b^2}{a^2}}{1+q} \right) .$$

Il suit de là que nous avons

$$\frac{\Gamma'(a, b, c)}{D''} = \frac{b^2}{a^2 A' + b^2 B'} \left\{ 1 + \frac{m \cdot \frac{a}{b} (a+b) A' - A' B' G}{P + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right)} \right\} ;$$

$$\frac{\Gamma'(b, a, c)}{D''} = \frac{a^2}{a^2 A' + b^2 B'} \left\{ 1 + \frac{m \cdot \frac{b}{a} (a+b) B' - A' B' G}{P + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right)} \right\} .$$

D'après les équations (304) et (305), si l'on néglige les termes multipliés par δ^2 , l'on a

$$\frac{\Gamma(a, b, c)}{D''} = \frac{A}{D''} , \quad \frac{\Gamma(b, a, c)}{D''} = \frac{B'}{D''} ;$$

donc, en substituant pour D'' sa valeur donnée par l'équation (326), il viendra

$$\frac{2 \cdot \Gamma(a, b, c)}{D''} = \frac{A' \cdot G}{P + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right)} ;$$

$$\frac{2 \cdot \Gamma(b, a, c)}{D''} = \frac{B' \cdot G}{P + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{b}{\Delta} \right)} .$$

Maintenant, si l'on substitue les valeurs que nous venons de former dans les équations (314) et (315), l'on trouvera ;

$$(353) \dots j = \frac{(a^2 A + b^2 B) Y'}{(a^2 A' + b^2 B')} \left\{ 1 - \frac{A' B' G}{P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{b}{\Delta} \right)} \right\} \\ + \frac{G \{ (A A' + B B') Y' + (A B' - B A') Y'' \}}{2 \{ P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{b}{\Delta} \right) \}} ;$$

$$(354) \dots z = \frac{(a^2 A + b^2 B) Z'}{(a^2 A' + b^2 B')} \left\{ 1 - \frac{A' B' G}{P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{b}{\Delta} \right)} \right\} \\ + \frac{G \{ (A A' + B B') Z' + (B A' - A B') Z'' \}}{2 \{ P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{b}{\Delta} \right) \}} ;$$

où Z' et Z'' désignent ce que deviennent, respectivement, les fonctions Y' et Y'' après la permutation des deux lettres a et b : de sorte que il faudra faire dans ces formules ;

$$(355) \left\{ \begin{aligned} Y' &= \frac{b^2}{4a(a+b)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{b}{2(a+b)}} \left\{ t^{-\frac{a}{a+b}} - 1 \right\} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} ; \\ Z' &= \frac{a^2}{4b(a+b)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{a}{2(a+b)}} \left\{ t^{-\frac{b}{a+b}} - 1 \right\} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} ; \\ Y'' &= \frac{\pi^2 \cdot b^2}{4a(a+b)^2 \cdot \sin^2} \cdot \left\{ \frac{\pi b}{2(a+b)} \right\} ; \\ Z'' &= \frac{\pi^2 \cdot a^2}{4b(a+b)^2 \cdot \sin^2} \cdot \left\{ \frac{\pi a}{2(a+b)} \right\} . \end{aligned} \right.$$

Or il est manifeste que ces valeurs de Y' et Z' sont les mêmes que celles de $\frac{Y}{h}$, et $\frac{Z}{h}$ données par les équations (66) et (67) ; en conséquence, l'on pourra appliquer ici les formules trouvées dans les §§ IX

et XI pour évaluer ces intégrales définies. Ainsi le cas du contact, et celui des sphères séparées par un petit intervalle dépend des mêmes intégrales : ce qui est un de ces rapprochemens très-éloignés des idées primordiales, et seulement saisissable par l'analyse mathématique. Lorsque $\Delta = 0$, le dénominateur $P + \text{Log.} \left(\frac{b}{\Delta} \right)$ devient infini ; ce qui rend ces valeurs de γ et z identiques avec celles de Y et Z fournies par les équations (66) et (67), après en avoir éliminé h à l'aide de l'équation (68), qui donne la valeur de cette constante en fonction de la quantité totale de l'électricité répandue sur la surface des deux sphères. Il suit de là, que le principal terme de la valeur de γ et de z que nous venons de trouver demeure constant, si la somme $a^2 A + b^2 B$ demeure constante ; ce qui est un résultat fort remarquable, qui a été aussi reconnu par Poisson (*). Toutefois il était nécessaire de pousser plus loin son analyse pour apprécier jusqu'à quel point l'on pouvait dire avec lui : « De quelque manière que deux sphères soient électrisées » lorsqu'elles sont séparées par un intervalle infiniment petit, et quoique » elles ne se soient pas encore touchées, l'intensité de l'électricité aux » points les plus éloignés sur les deux surfaces, est la même que si » elles étaient effectivement en contact ».

Dans le cas où les deux sphères sont égales l'on a $a = b$; ce qui donne

$$a A' = b B' = \text{Log. hyp.}^\circ 2 ; \quad G A' = G B' = 2 m a ;$$

$$a Y'' = b Z'' = \frac{\pi^2}{8} ;$$

$$P = C'' - \text{Log. tab.}^\circ 2 + 2 m a A' = C''' = 1, 103423 ;$$

$$a Y' = b Z' = \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{3}{4}} - t^{-\frac{1}{4}} \right) \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{dt t^{-\frac{1}{4}} \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t}.$$

En développant $(1-t)^{-1}$ l'on trouve

(*) Voyez page 110 de son second Mémoire.

$$aY' = \frac{\pi^2}{8} - 2 \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{15^2} + \text{etc.} \right) =$$

$$\frac{\pi^2}{8} - 2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} \right) - \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} \right) \right\} ;$$

d'où l'on tire

$$aY' = 2 - \frac{\pi^2}{8} + 2 \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc.} \right) = 0,91588 = C'.$$

Donc, en substituant ces valeurs, et faisant

$$\frac{mC'}{2 \text{ Log. tab.}^e 2} = 0,66067 = \beta ; \quad \frac{m\pi^2}{8} = 0,53579 = \beta',$$

nous aurons

$$(356) \dots \begin{cases} y = \beta(A+B) + \frac{\beta'(A-B)}{C''' + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{a}{\Delta} \right)} ; \\ z = \beta(A+B) - \frac{\beta'(A-B)}{C''' + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{a}{\Delta} \right)} ; \end{cases}$$

où la distinction entre les deux sphères consiste en cela, que, y appartient à la sphère dont A désigne l'intensité primitive, et z à celle dont B désigne l'intensité primitive. Lorsque les deux sphères sont d'abord électrisées de manière que l'on a $A+B=0$, ces formules donnent

$$y = -z = \frac{2\beta'A}{C''' + \text{Log. tab.}^e \left(\frac{a}{\Delta} \right)} = \frac{m\pi^2 A}{4C''' + 4 \text{ Log. tab.}^e \left(\frac{a}{\Delta} \right)} ;$$

et comme

$$C''' = 2mC + 2 \text{ Log. tab.}^e 2 ,$$

l'on pourra écrire, en Logarithmes hyperboliques

$$y = \frac{A\pi^2}{8C + 8 \text{ Log.} 2 + 4 \text{ Log.} \left(\frac{a}{\Delta} \right)} ;$$

ce qui s'accorde avec la formule trouvée pour ce cas particulier par POISSON (*).

Remarquons maintenant, que, *après* le contact des deux sphères, l'on a nécessairement l'équation $AB' - BA' = 0$; et que par conséquent les formules (353) et (354) se réduisent à celles-ci;

$$(357) \dots \left\{ \begin{aligned} \gamma &= \frac{AY'}{A'} + \frac{AGY'}{2A'} \cdot \frac{(A' - B')^2}{P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{b}{\Delta} \right)}; \\ z &= \gamma \cdot \frac{Z'}{Y'}; \end{aligned} \right.$$

ce qui nous apprend, que le *rapport* de ces deux intensités demeure le même que celui qui s'établit au moment de leur *contact*, quelle que soit la distance Δ pourvu qu'elle soit fort petite.

L'inspection de ces formules démontre que la variation de ces épaisseurs, relativement à la petite distance Δ qui sépare les deux sphères, est inversement proportionnelle à la quantité $P + \text{Log. tab.}^c \left(\frac{b}{\Delta} \right)$, et qu'elle n'est pas proportionnelle à la distance Δ , ainsi que Poisson l'a affirmé en finissant son second Mémoire. C'est une erreur qu'il importe de redresser, pour demeurer strictement dans les véritables conséquences de la théorie, et bien établir les lois qui peuvent être comparées avec l'expérience. Il est vrai que le *troisième* terme qui suivrait les deux premiers, dont nous donnons ici l'expression, serait proportionnel à δ^2 , ou bien à la distance Δ : mais ce troisième terme étant très-petit en comparaison du *second* ne saurait constituer la partie principale de cette variation. Il est donc permis de penser que cette conséquence erronée de Poisson tient à ce qu'il regardait en général comme *nul* le second terme des valeurs précédentes de γ et z , ainsi que cela arrive pour le cas particulier où les deux sphères sont égales à cause de l'égalité qu'il y a alors entre les quantités $A, B; A'$ et B' .

Toutes les formules précédentes dépendent essentiellement des quatre intégrales définies A', B', Y' et Z' , dont je vais donner une Table qui sera souvent fort utile. Les deux dernières sont, par leur nature,

(*) Voyez page 111 de son second Mémoire.

telles qu'il est impossible de les exprimer sous forme finie à l'aide des deux premières. Le rapprochement des équations (45), (46), (53) et (54) suffit pour démontrer que l'on chercherait envain une équation propre à l'abaissement des transcendentes I' et Z' . Mais un examen attentif fait sur les valeurs numériques des trois intégrales A' , B' et Z' laisse entrevoir qu'il existe entre elles une équation assez simple. Effectivement, j'ai trouvé que, en prenant

$$p = 1,04765, \quad q = 1,23150,$$

l'on avait, par une approximation souvent suffisante, l'équation

$$(\varepsilon) \dots aZ' = p \cdot aB' + \frac{q \cdot 2a^2}{(a+2b)^2} \cdot aA';$$

c'est de quoi l'on peut avoir une preuve arithmétique en jetant les yeux sur cette petite Table comparative.

$\frac{b}{a}$	aZ'	aZ' par la formule (ε)	$\frac{b}{a}$	aZ'	aZ' par la formule (ε)
1	0,9159	0,9159	$\frac{1}{8}$	3,0258	3,0258
$\frac{1}{2}$	1,5626	1,5594	$\frac{1}{9}$	3,1264	3,1311
$\frac{1}{3}$	2,0084	2,0081	$\frac{1}{10}$	3,2114	3,2155
$\frac{1}{4}$	2,3289	2,3318	$\frac{1}{11}$	3,2840	3,2874
$\frac{1}{5}$	2,5695	2,5704	$\frac{1}{12}$	3,3468	3,3594
$\frac{1}{6}$	2,7559	2,7615	$\frac{1}{13}$	3,4020	3,4021
$\frac{1}{7}$	2,9061	2,9098	0	4,2072	4,1864

TABLE DES INTÉGRALES

$${}_a A' = \frac{b}{(a+b)} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{a}{a+b}} - 1 \right)}{1-t}; \quad {}_a B' = \frac{a^2}{b(a+b)} \cdot \int_0^1 \frac{dt \left(t^{-\frac{b}{a+b}} - 1 \right)}{1-t};$$

$${}_a Y' = \frac{b^2}{4(a+b)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{b}{2(a+b)}} \left(t^{-\frac{a}{a+b}} - 1 \right) \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t};$$

$${}_a Z' = \frac{a^2}{4b(a+b)^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt \cdot t^{-\frac{a}{2(a+b)}} \left(t^{-\frac{b}{a+b}} - 1 \right) \text{Log.} \left(\frac{1}{t} \right)}{1-t}.$$

$\frac{b}{a}$	${}_a A'$	${}_a B'$	${}_a Y'$	${}_a Z'$	$\frac{B'}{A'}$
1	0,69315	0,69315	0,91588	0,91588	1,00000
$\frac{1}{2}$	0,85161	0,98802	0,97474	1,56260	1,16017
$\frac{1}{3}$	0,91257	1,14455	0,99035	2,00839	1,25421
$\frac{2}{3}$	0,79367	0,86706	0,95874	1,24467	1,09247
$\frac{1}{4}$	0,94236	1,24094	0,99511	2,32895	1,31702
$\frac{3}{4}$	0,76656	0,81642	0,95034	1,15993	1,06506
$\frac{1}{5}$	0,95903	1,30339	0,99718	2,56949	1,35906
$\frac{2}{5}$	0,88809	1,07673	0,98547	1,73751	1,21241

$\frac{b}{a}$	$a A'$	$a B'$	$a Y'$	$a Z'$	$\frac{B'}{A'}$
$\frac{3}{5}$	0,81629	0,91197	0,96628	1,39407	1,11721
$\frac{4}{5}$	0,75116	0,78900	0,94239	1,04332	1,05037
$\frac{1}{6}$	0,96954	1,35410	0,99823	2,75595	1,39664
$\frac{5}{6}$	0,74054	0,77068	0,94253	1,08505	1,04069
$\frac{1}{7}$	0,97641	1,38921	0,99882	2,90615	1,42277
$\frac{2}{7}$	0,92978	1,19781	0,99326	2,18098	1,28826
$\frac{3}{7}$	0,87759	1,04992	0,98312	1,72900	1,19635
$\frac{4}{7}$	0,82624	0,93260	0,97183	1,46409	1,12846
$\frac{5}{7}$	0,77801	0,83743	0,95305	1,20444	1,07638
$\frac{6}{7}$	0,73336	0,75851	0,93520	1,04199	1,03429
$\frac{1}{8}$	0,98111	1,41206	0,99920	3,02585	1,43924
$\frac{3}{8}$	0,89728	1,10123	0,98740	1,87667	1,22729
$\frac{5}{8}$	0,80772	0,89464	0,96350	1,33351	1,10761
$\frac{7}{8}$	0,72836	0,75007	0,93269	1,02441	1,02980
$\frac{1}{9}$	0,98465	1,43944	0,99940	3,12646	1,46187
$\frac{2}{9}$	0,95184	1,27645	0,99633	2,47105	1,34104

$\frac{b}{a}$	aA'	aB'	aY'	aZ'	$\frac{B'}{A'}$
$\frac{4}{9}$	0,87178	1,03476	0,98175	1,69302	1,18695
$\frac{5}{9}$	0,83180	0,94415	0,97104	1,45242	1,13507
$\frac{7}{9}$	0,75780	0,80075	0,94521	1,12699	1,05668
$\frac{8}{9}$	0,72431	0,74537	0,93087	1,01117	1,02908
$\frac{1}{10}$	0,98724	1,45782	0,99955	3,21145	1,47666
$\frac{3}{10}$	0,92466	1,18132	0,99244	2,12645	1,27757
$\frac{7}{10}$	0,78267	0,84610	0,95477	1,22401	1,08107
$\frac{9}{10}$	0,72108	0,73799	0,92939	1,00074	1,02344
$\frac{1}{11}$	0,98922	1,47317	0,99965	3,28405	1,48922
$\frac{2}{11}$	0,96491	1,33157	0,99806	2,66826	1,37999
$\frac{3}{11}$	0,93441	1,21333	0,99420	2,23280	1,29849
$\frac{4}{11}$	0,90156	1,11352	0,98033	1,96564	1,23510
$\frac{5}{11}$	0,86809	0,92660	0,98086	1,81280	1,18259
$\frac{6}{11}$	0,83536	0,95194	0,97209	1,47138	1,13955
$\frac{7}{11}$	0,80385	0,88695	0,96221	1,31676	1,10337
$\frac{8}{11}$	0,77381	0,82966	0,95147	1,08888	1,07219

$\frac{b}{a}$	$a A'$	$a B'$	$a I'$	$a Z'$	$\frac{B'}{A'}$
$\frac{9}{11}$	0,74512	0,77860	0,94007	1,08214	1,04493
$\frac{10}{11}$	0,71847	0,73369	0,92882	1,00724	1,02118
$\frac{1}{12}$	0,99075	1,49575	0,99972	3,34681	1,50972
$\frac{5}{12}$	0,88196	1,05659	0,98412	1,75994	1,18156
$\frac{7}{12}$	0,82707	0,92386	0,96809	1,39096	1,12282
$\frac{11}{12}$	0,71630	0,73015	0,92213	0,98566	1,01932
$\frac{1}{13}$	0,99203	1,49777	0,99977	3,40199	1,50818
$\frac{2}{13}$	0,97331	1,37282	0,99830	2,83447	1,41009
$\frac{3}{13}$	0,94896	1,26534	0,99588	2,51619	1,33341
$\frac{4}{13}$	0,92184	1,17216	0,99197	2,09811	1,27154
$\frac{5}{13}$	0,89374	1,09419	0,98666	1,95137	1,22428
$\frac{6}{13}$	0,86554	1,02043	0,98023	1,64834	1,17895
$\frac{7}{13}$	0,83790	0,95759	0,97284	1,37538	1,14285
$\frac{8}{13}$	0,81251	0,90521	0,96458	1,34802	1,11411
$\frac{9}{13}$	0,79073	0,83928	0,95571	1,18817	1,06140
$\frac{10}{13}$	0,76047	0,80557	0,94628	1,13661	1,05917

$\frac{b}{a}$	aA'	aB'	aY'	aZ'	$\frac{B'}{A'}$
$\frac{11}{13}$	0,73690	0,76446	0,93646	1,05297	1,03740
$\frac{12}{13}$	0,71447	0,72717	0,92423	0,95158	1,01777
$\frac{1}{14}$	0,99302	1,50720	0,99982	3,45023	1,51778
$\frac{3}{14}$	0,95447	1,28686	0,99665	2,49641	1,34851
$\frac{5}{14}$	0,90385	1,11847	0,99517	1,93114	1,23744
$\frac{9}{14}$	0,80156	0,88282	0,96147	1,30448	1,10137
$\frac{11}{14}$	0,75292	0,79248	0,94435	1,11790	1,05253
$\frac{13}{14}$	0,71291	0,72464	0,93095	1,09750	1,01644
$\frac{1}{15}$	0,99385	1,51579	0,99985	3,49305	1,52363
$\frac{2}{15}$	0,97900	1,40379	0,99902	2,96834	1,43389
$\frac{4}{15}$	0,93593	1,21203	0,99320	2,25778	1,29498
$\frac{7}{15}$	0,86367	1,01601	0,97973	1,65642	1,17639
$\frac{8}{15}$	0,83968	0,96143	0,97140	1,49472	1,14499

$\frac{b}{a}$	aA'	aB'	aY'	aZ'	$\frac{B'}{A'}$
$\frac{11}{15}$	0,77186	0,82606	0,95060	1,28532	1,07022
$\frac{13}{15}$	0,73081	0,75417	0,93379	1,03199	1,03196
$\frac{14}{15}$	0,71169	0,72231	0,92471	1,02714	1,01492
$\frac{1}{20}$	0,99640	1,54610	0,99994	3,66106	1,55038

Cette Table a été calculée d'après les formules (80), (77), (86) et (92). Il est facile de calculer par son moyen les formules (69), (70), (66) et (67). Mais, pour en rendre l'application plus facile j'ajouterai que, en posant l'équation $E' + E'' = E$, et regardant E' , E'' , comme les quantités d'électricité, suivant lesquelles se partage entre deux sphères conductrices et isolées, mises en contact, une quantité donnée E d'électricité qui leurs a été communiquée *avant* de les mettre en contact; l'on a :

$$\text{Pour la sphère du rayon } a; \dots\dots\dots E' = \frac{E}{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{B'}{A'}};$$

$$\text{Pour la sphère du rayon } b; \dots\dots\dots E'' = \frac{E \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{B'}{A'}}{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{B'}{A'}}.$$

Les intensités électriques Y et Z qui se trouvent sur les points opposés au point de contact sont telles que l'on a ;

Maximum de l'intensité sur la sphère du rayon a ;

$$Y = \frac{E'}{4\pi a^2} \cdot \frac{aY'}{aA'};$$

Maximum de l'intensité sur la sphère du rayon b ;

$$Z = \frac{E''}{4\pi b^2} \cdot \frac{aZ'}{aB'}.$$

Voici la Table qui donne , pour les mêmes valeurs de $\frac{b}{a}$, celles de $\frac{E'}{E}$; $\frac{E''}{E}$.

$\frac{b}{a}$	$\frac{E'}{E}$	$\frac{E''}{E}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{E'}{E}$	$\frac{E''}{E}$
1	0,50000	0,50000	$\frac{1}{6}$	0,96266	0,03734
$\frac{1}{2}$	0,77517	0,22482	$\frac{5}{6}$	0,58048	0,41952
$\frac{1}{3}$	0,87768	0,12231	$\frac{1}{7}$	0,97179	0,02821
$\frac{2}{3}$	0,67315	0,32685	$\frac{2}{7}$	0,90485	0,09515
$\frac{1}{4}$	0,92395	0,07605	$\frac{3}{7}$	0,81985	0,18044
$\frac{3}{4}$	0,62535	0,37465	$\frac{4}{7}$	0,73074	0,26925
$\frac{1}{5}$	0,94843	0,05157	$\frac{5}{7}$	0,64551	0,35449
$\frac{2}{5}$	0,83753	0,16246	$\frac{6}{7}$	0,56821	0,43179
$\frac{3}{5}$	0,71317	0,28683	$\frac{1}{8}$	0,97801	0,02198
$\frac{4}{5}$	0,59803	0,40197	$\frac{3}{8}$	0,85282	0,14717

$\frac{b}{a}$	$\frac{E'}{E}$	$\frac{E''}{E}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{E'}{E}$	$\frac{E''}{E}$
$\frac{5}{8}$	0,69800	0,30200	$\frac{2}{11}$	0,95638	0,04362
$\frac{7}{8}$	0,55919	0,44080	$\frac{3}{11}$	0,91193	0,08807
$\frac{1}{9}$	0,98228	0,01772	$\frac{4}{11}$	0,85962	0,14037
$\frac{2}{9}$	0,93789	0,06210	$\frac{5}{11}$	0,80364	0,19636
$\frac{4}{9}$	0,81007	0,18993	$\frac{6}{11}$	0,74727	0,25273
$\frac{5}{9}$	0,74056	0,25944	$\frac{7}{11}$	0,69117	0,30882
$\frac{7}{9}$	0,60995	0,39004	$\frac{8}{11}$	0,63845	0,36154
$\frac{8}{9}$	0,52989	0,47011	$\frac{9}{11}$	0,58841	0,41157
$\frac{1}{10}$	0,98545	0,01454	$\frac{10}{11}$	0,54233	0,45769
$\frac{3}{10}$	0,89687	0,10303	$\frac{1}{12}$	0,98963	0,01037
$\frac{7}{10}$	0,65371	0,34628	$\frac{5}{12}$	0,82974	0,17026
$\frac{9}{10}$	0,54675	0,45325	$\frac{7}{12}$	0,72355	0,27644
$\frac{1}{11}$	0,98785	0,01215	$\frac{11}{12}$	0,53864	0,46135

$\frac{b}{a}$	$\frac{E'}{E}$	$\frac{E''}{E}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{E'}{E}$	$\frac{E''}{E}$
$\frac{1}{13}$	0,99116	0,00884	$\frac{3}{14}$	0,94147	0,05829
$\frac{2}{13}$	0,96770	0,03229	$\frac{5}{14}$	0,86371	0,13632
$\frac{3}{13}$	0,93370	0,06633	$\frac{9}{14}$	0,68739	0,31287
$\frac{4}{13}$	0,89255	0,10744	$\frac{11}{14}$	0,60614	0,39386
$\frac{5}{13}$	0,84662	0,15337	$\frac{13}{14}$	0,53293	0,46707
$\frac{6}{13}$	0,79927	0,10072	$\frac{1}{15}$	0,99327	0,00673
$\frac{7}{13}$	0,75114	0,24889	$\frac{2}{15}$	0,97514	0,02486
$\frac{8}{13}$	0,70328	0,29672	$\frac{4}{15}$	0,91568	0,08432
$\frac{9}{13}$	0,66282	0,33718	$\frac{7}{15}$	0,85524	0,14476
$\frac{10}{13}$	0,61473	0,38527	$\frac{8}{15}$	0,75436	0,24563
$\frac{11}{13}$	0,57302	0,42620	$\frac{11}{15}$	0,63470	0,36529
$\frac{12}{13}$	0,53556	0,46444	$\frac{13}{15}$	0,56338	0,43668
$\frac{1}{14}$	0,99232	0,00768	$\frac{14}{15}$	0,53075	0,46924
			$\frac{1}{20}$	0,99613	0,00385

ADDITION AUX §§ III ET IV.

Les forces T' et T'' dont nous avons donné l'expression vers la fin du § III peuvent être écrites ainsi ; savoir

$$T' = 2\pi \left(\gamma_0 + \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{1}{5}\gamma_2 + \frac{1}{7}\gamma_3 + \text{etc.} \right) - 2\pi\gamma ;$$

$$T'' = 2\pi \left(\gamma_0 + \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{1}{5}\gamma_2 + \frac{1}{7}\gamma_3 + \text{etc.} \right) + 2\pi\gamma .$$

De cette manière l'on voit , que chacune de ces deux forces peut être considérée comme composée de deux forces ; desquelles, une est due à l'attraction , ou à la répulsion , du petit segment ayant γ pour flèche , conformément à la démonstration exposée dans le § IV. Mais sur cela, il importe de faire une distinction entre ce qui se passe dans le cas de l'équilibre électrique d'une *seule* couche , et ce qui se passe dans le cas de l'équilibre électrique entre *plusieurs* couches. Lorsque plusieurs corps électrisés sont en présence , et que leur équilibre est établi d'une manière permanente , il faut ajouter aux forces précédentes la résultante due à l'action des autres couches qui couvrent les autres corps. Soit R la composante , suivant la normale , de cette résultante : elle sera sensiblement la même pour les points placés à la surface de la couche extérieure , et pour les points placés entre les deux surfaces terminatrices de la même couche. Donc les valeurs complètes des forces T' et T'' seront

$$T' = R + 2\pi \left(\gamma_0 + \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{1}{5}\gamma_2 + \text{etc.} \right) - 2\pi\gamma ,$$

$$T'' = R + 2\pi \left(\gamma_0 + \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{1}{5}\gamma_2 + \text{etc.} \right) + 2\pi\gamma .$$

Mais, par hypothèse , le fluide électrique est en équilibre sur tout point appartenant à la couche que l'on considère , et placé entre les deux surfaces qui la terminent : donc un tel état exige que la force

désignée par T' soit nulle; et alors l'élimination de R entre ces deux équations donne $T'' = 4\pi\gamma$. C'est-à-dire que la force normale à la surface extérieure, laquelle est balancée par la pression de l'air ou, peut être, par l'action même de la matière du corps conducteur, sera toujours exprimée par $4\pi\gamma$, et par conséquent proportionnelle à l'épaisseur de la couche. Et cette importante conséquence aura lieu, soit que la couche électrique soit unique et en équilibre par elle-même, ainsi que cela arrive dans le cas considéré au § II; soit que l'équilibre de la couche ait lieu sous l'action simultanée des forces émanées des points qui la composent, et des forces émanées des autres couches qui sont en sa présence. Tel est le motif du succès de la vérification faite par Poisson dans le N.º (20) de son premier Mémoire, pour le cas de l'équilibre électrique entre deux sphères. Et tel est aussi le motif qui justifie l'emploi du *plan d'épreuve* pour mesurer les rapports des intensités électriques. Toutefois il ne sera pas inutile d'analyser en peu de mots cette méthode.

D'après les formules que nous avons données au § IV, l'attraction ou la répulsion exercée par un cylindre homogène sur un point placé sur le prolongement de son axe à une distance β du centre de sa base, sera exprimée par

$$Q' = 2\pi \iint \frac{u du (z + \beta) dz}{\{u^2 + (z + \beta)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant d'abord par rapport à z , l'intégrale indéfinie sera

$$-2\pi u du \{u^2 + (z + \beta)^2\}^{-\frac{1}{2}} + \text{Const.} :$$

et comme elle doit commencer avec $z = 0$, l'on a

$$-2\pi u du \{u^2 + (z + \beta)^2\}^{-\frac{1}{2}} + 2\pi u du (u^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} ,$$

Maintenant si l'on fait ici $z = H$, l'on aura pour l'attraction totale

$$\begin{aligned} & 2\pi \int \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}} - 2\pi \int \frac{u du}{\sqrt{u^2 + (H + \beta)^2}} \\ &= 2\pi \sqrt{u^2 + \beta^2} - 2\pi \sqrt{u^2 + (H + \beta)^2} - 2\pi\beta + 2\pi(H + \beta) . \end{aligned}$$

Donc, en désignant par u' le rayon de la base du cylindre, il faudra faire $u = u'$, ce qui donne

$$Q' = 2\pi \left\{ H + \sqrt{\beta^2 + u'^2} - \sqrt{u'^2 + (H + \beta)^2} \right\}.$$

Cette formule peut être considérée comme une extension de celle désignée par l'équation (20) au § IV.

Lorsque le cylindre est réduit à un *disque*, il faut regarder u' comme quantité fort grande en comparaison de H : et si en outre β est une quantité du même ordre de petitesse que H , l'on pourra réduire cette valeur de Q' à $Q' = 2\pi H$. Or en mettant un disque en contact avec une surface électrisée et conductrice, il y prendra autant d'électricité qu'il en faut pour balancer la force $4\pi\gamma$ qui a lieu sur l'élément touché de cette surface: en conséquence, l'on aura l'équation $4\pi\gamma = 2\pi H$, laquelle donne $H = 2\gamma$. Cela revient à dire, que l'épaisseur de la couche électrique qui couvre les deux faces opposées du disque, et non l'épaisseur matérielle du disque, doit être *double* de l'épaisseur γ qui a lieu sur l'élément de la surface touché avec le *plan d'épreuve*. Telle est aussi la conclusion à laquelle COULOMB est parvenu dans un de ses Mémoires (*). Mais sa démonstration a un vice radical duquel il faut l'affranchir pour la rendre rigoureuse. Au lieu de considérer comme nous venons de le faire un *disque physique* chargé d'électricité, COULOMB considère l'action d'un plan électrique circulaire sur un point placé sur la normale élevée par son centre à la distance β de son centre. En nommant Z cette force, nous aurons

$$Z = \iint \frac{\beta dx dy}{(x^2 + y^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où x et y sont les coordonnées d'un point quelconque du cercle. De là l'on tire

$$Z = \beta \int dx \left\{ \frac{\gamma}{(x^2 + \beta^2) \sqrt{x^2 + y^2 + \beta^2}} + \text{Const.} \right\}.$$

(*) Voyez page 676 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1788.

Soit $x^2 + y^2 = u'^2$ l'équation du cercle : il faudra intégrer depuis $y = -\sqrt{u'^2 - x^2}$ jusqu'à $y = \sqrt{u'^2 - x^2}$: ce qui donne

$$Z = 2\beta \int \frac{dx \sqrt{u'^2 - x^2}}{(x^2 + \beta^2) \sqrt{u'^2 + \beta^2}}.$$

Maintenant, si l'on double cette intégrale, il viendra

$$Z = -\frac{4\beta}{\sqrt{\beta^2 + u'^2}} \int_0^{u'} \frac{dx}{\sqrt{u'^2 - x^2}} + 4\beta \cdot \sqrt{u'^2 + \beta^2} \int_0^{u'} \frac{dx}{(\beta^2 + x^2) \sqrt{u'^2 - x^2}};$$

d'où l'on tire

$$Z = 2\pi \left\{ 1 - \frac{\beta}{\sqrt{u'^2 + \beta^2}} \right\}.$$

Et, en multipliant cette valeur de Z par l'épaisseur H du plan, c'est-à-dire par l'épaisseur de la couche électrique qui couvre le disque, l'on aura, comme COULOMB;

$$HZ = 2\pi H \left\{ 1 - \frac{\beta}{\sqrt{u'^2 + \beta^2}} \right\}.$$

Or, en rapprochant cette valeur de HZ de celle de Q' trouvée plus haut, l'on voit, que ces deux expressions ne peuvent pas être *identiques*. Mais il est vrai de dire que leur différence s'évanouit, sensiblement, lorsque le rayon u' du plan circulaire devient fort grand en comparaison de l'épaisseur H et de la distance β .

COULOMB ne paraît pas avoir remarqué que l'intégration relative au *disque* était plus facile que celle relative au *plan circulaire*: autrement, il n'aurait pas dénaturé la question par un artifice qui semble infirmer la démonstration qu'il voulait établir, en pénétrant par la théorie le secret de son plan d'épreuve.

Dès que ce plan est éloigné de la surface électrisée avec laquelle il a été mis en contact, quoique isolé, il ne peut pas retenir l'électricité qu'il a enlevée avec la distribution primitive. Il est évident que

à cette distribution succédera celle qui convient à l'équilibre de la couche qui couvre les deux faces du disque : c'est-à-dire , que l'épaisseur électrique y deviendra variable conformément à la formule donnée par M. BIOT à la page 277 du second Volume de son grand Traité de Physique publié en 1816. Mais, comme nous supposons d'une fort petite étendue le disque employé pour plan d'épreuve, son action sur un autre petit disque électrique qui en est éloigné de plusieurs fois son diamètre sera, sensiblement, la même que si la couche y était uniformément distribuée. Car cette propriété a lieu, même pour des sphères électrisées qui agissent sur un point éloigné de leur centre ainsi que l'on peut mieux s'en convaincre par les calculs exposés dans le § XIII. D'après cette considération on ne doit pas craindre que les expériences faites avec le plan d'épreuve puissent être influencées par l'épaisseur variable de la couche électrique qui le couvre.

Néanmoins s'il s'agissait, non d'un corps conducteur de figure quelconque, mais d'une sphère dont l'épaisseur électrique primitive serait Y et devenait y après lui avoir appliqué tangentiellement un disque assez grand, l'on pourrait par l'égalité des masses du fluide électrique établir l'équation

$$(Y - y) S = 2 S' y ;$$

où S et S' désignent, respectivement, la surface de la sphère et celle du disque. Cette équation mise sous la forme

$$S Y = (S + 2 S') y$$

est celle qui, expérimentalement, a été vérifiée par COULOMB avec la restriction dont il parle à la page 675 du Volume cité plus haut.

NOTE

sur l'équation (ε) donnée dans le § XXVII.

En réfléchissant sur le mode d'existence de cette équation, j'ai pensé qu'elle nous découvre une forme algébrique, propre à pouvoir calculer avec avantage les expériences faites par COULOMB avec plusieurs globes que l'on met en contact sur la même ligne droite après les avoir électrisés. Pour cela, en considérant d'abord le cas plus simple où les globes sont égaux il suffit d'accorder : 1.^o que l'action de toute couche électrique en équilibre sur un quelconque des globes intermédiaires, peut être calculée comme si toute sa masse était concentrée dans le centre même du globe, à l'égard d'un point placé au-delà des deux globes qui le touchent : 2.^o que l'action des deux couches qui sont, l'une à droite et l'autre à gauche du point de contact dont on considère l'équilibre peut être exprimée par une formule semblable à celle qui constitue le second membre de l'équation (ε) : 3.^o que la distribution du fluide électrique est tout-à-fait la même pour deux globes quelconques équidistans, l'un du premier et l'autre du dernier de la file : 4.^o qu'il suffit d'établir l'équilibre électrique pour les points de contact seulement.

Nous allons faire voir, que le calcul fait d'après ces hypothèses satisfait assez bien aux expériences de COULOMB. D'abord, considérons trois sphères égales : alors, l'équilibre du point de contact du second avec le troisième globe est exprimé par l'équation

$$p \cdot A_{(2)} + \frac{2q \cdot A_{(2)}}{9} = A_{(3)} = A_{(1)} ;$$

où $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, $A_{(3)}$ sont, respectivement, les épaisseurs moyennes des couches électriques sur le premier, le second, et le troisième globe. Il suit de là que

$$\frac{A_{(2)}}{A_{(1)}} = \left(1 - \frac{2q}{9}\right) \cdot \frac{1}{p} :$$

donc, en substituant pour p et q leurs valeurs, c'est-à-dire

$$p = 1,04765 ; \quad q = 1,23150 ,$$

l'on aura

$$A_{(1)} = 1,4424 \cdot A_{(2)} .$$

COULOMB a trouvé, par une moyenne entre vingt expériences,

$$A_{(1)} = 1,34 \cdot A_{(2)} \quad (*) .$$

Il y a donc dans cette déduction une erreur en excès d'un quinzième: on pourrait la diminuer en prenant (comme COULOMB) $p=1$ et $q=1$. Mais alors, l'accord du calcul *a priori* et l'observation serait moins satisfaisant pour les cas de *six* et de *douze* globes égaux que nous allons calculer successivement. Pour celui de *six* l'on a, par hypothèse,

$$A_{(6)} = A_{(1)} ; \quad A_{(5)} = A_{(2)} , \quad A_{(4)} = A_{(3)} .$$

Ainsi, les deux équations pour l'équilibre du premier et du second point de contact, sont

$$A_{(1)} = p A_{(2)} + q \cdot \frac{2}{3} A_{(3)} + \frac{2}{5} A_{(3)} + \frac{2}{7} A_{(2)} + \frac{2}{9} A_{(1)} ;$$

$$p A_{(2)} + q \cdot \frac{2}{3} A_{(1)} = p A_{(3)} + q \cdot \frac{2}{3} A_{(3)} + \frac{2}{5} A_{(2)} + \frac{2}{7} A_{(1)} .$$

Or, en résolvant ces équations, avec les valeurs précédentes de p et q , l'on trouve

$$A_{(1)} = 1,5063 \cdot A_{(3)} ; \quad A_{(2)} = 1,0615 \cdot A_{(3)} ,$$

tandis que COULOMB a trouvé par expérience

$$A_{(1)} = 1,56 \cdot A_{(3)} ; \quad A_{(2)} = 1,053 \cdot A_{(3)} \quad (**).$$

La proximité de ces deux résultats est propre à donner une idée favorable de la formule (ε). Poursuivons cette recherche en considérant 12 globes égaux: alors l'on aura

(*) Voyez page 448 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1787.

(**) Voyez pages 620 et 622 du Volume cité pour l'année 1788.

$$A_{(7)} = A_{(6)} ; \quad A_{(8)} = A_{(5)} ; \quad A_{(9)} = A_{(4)} ;$$

$$A_{(10)} = A_{(8)} ; \quad A_{(11)} = A_{(2)} ; \quad A_{(12)} = A_{(1)} ;$$

et il faudra résoudre les cinq équations suivantes pour établir l'équilibre entre les cinq points de contact qui se suivent sur la ligne qui joint les centres des globes ; savoir

$$A_{(1)} = p A_{(2)} + q \cdot \frac{2}{3} A_{(3)} + \frac{2}{5} A_{(4)} + \frac{2}{7} A_{(5)} + \frac{2}{9} A_{(6)} + \frac{2}{11} A_{(6)}$$

$$+ \frac{2}{13} A_{(5)} + \frac{2}{15} A_{(4)} + \frac{2}{17} A_{(3)} + \frac{2}{19} A_{(2)} + \frac{2}{21} A_{(1)} ;$$

$$p A_{(2)} + q \cdot \frac{2}{3} A_{(1)} = p A_{(3)} + \frac{2q}{3} A_{(4)} + \frac{2}{5} A_{(5)} + \frac{2}{7} A_{(6)} + \frac{2}{9} A_{(6)}$$

$$+ \frac{2}{11} A_{(5)} + \frac{2}{13} A_{(4)} + \frac{2}{15} A_{(3)} + \frac{2}{17} A_{(2)} + \frac{2}{19} A_{(1)} ;$$

$$\frac{2}{5} A_{(1)} + p A_{(3)} + \frac{2q}{3} A_{(2)} = p A_{(4)} + \frac{2q}{3} A_{(5)} + \frac{2}{5} A_{(6)} + \frac{2}{7} A_{(6)}$$

$$+ \frac{2}{9} A_{(5)} + \frac{2}{11} A_{(4)} + \frac{2}{13} A_{(3)} + \frac{2}{15} A_{(2)} + \frac{2}{17} A_{(1)} ;$$

$$\frac{2}{7} A_{(1)} + \frac{2}{5} A_{(2)} + \frac{2q}{3} A_{(3)} + p A_{(4)} = p A_{(5)} + \frac{2q}{3} A_{(6)} + \frac{2}{7} A_{(3)} + \frac{2}{9} A_{(4)}$$

$$+ \frac{2}{11} A_{(3)} + \frac{2}{13} A_{(2)} + \frac{2}{15} A_{(1)} ;$$

$$\frac{2}{9} A_{(1)} + \frac{2}{7} A_{(2)} + \frac{2}{5} A_{(3)} + \frac{2}{3} q A_{(4)} + p A_{(5)}$$

$$= p A_{(6)} + \frac{2}{3} q A_{(6)} + \frac{2}{5} A_{(5)} + \frac{2}{7} A_{(4)} + \frac{2}{9} A_{(3)} + \frac{2}{11} A_{(2)} + \frac{2}{13} A_{(1)} .$$

De sorte que, si l'on fait

$$x = \frac{A_{(1)}}{A_{(6)}}, \quad y = \frac{A_{(2)}}{A_{(6)}}, \quad z = \frac{A_{(3)}}{A_{(6)}}, \quad u = \frac{A_{(4)}}{A_{(6)}}, \quad v = \frac{A_{(5)}}{A_{(6)}} ;$$

l'on a ces équations

$$x\left(1 - \frac{2}{21^3}\right) - y\left(p + \frac{2}{19^3}\right) - z\left(\frac{2q}{3^3} + \frac{2}{17^3}\right) - u\left(\frac{2}{5^3} + \frac{2}{15^3}\right) \\ - v\left(\frac{2}{7^3} + \frac{2}{13^3}\right) = \left(\frac{2}{9^3} + \frac{2}{11^3}\right);$$

$$x\left(\frac{2}{3^3}q - \frac{2}{19^3}\right) + y\left(p - \frac{2}{17^3}\right) - z\left(p - \frac{2}{15^3}\right) - u\left(\frac{2q}{3^3} + \frac{2}{13^3}\right) \\ - v\left(\frac{2}{5^3} + \frac{2}{11^3}\right) = \left(\frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3}\right);$$

$$x\left(\frac{2}{5^3} - \frac{2}{17^3}\right) + y\left(\frac{2}{3^3}q - \frac{2}{15^3}\right) + z\left(p - \frac{2}{13^3}\right) - u\left(p + \frac{2}{11^3}\right) \\ - v\left(\frac{2q}{3^3} + \frac{2}{9^3}\right) = \left(\frac{2}{5^3} + \frac{2}{7^3}\right);$$

$$x\left(\frac{2}{7^3} - \frac{2}{15^3}\right) + y\left(\frac{2}{5^3} - \frac{2}{13^3}\right) + z\left(\frac{2}{3^3}q - \frac{2}{11^3}\right) + u\left(p - \frac{2}{9^3}\right) \\ - v\left(p + \frac{2}{7^3}\right) = \left(\frac{2}{5^3} + \frac{2q}{3^3}\right);$$

$$x\left(\frac{2}{9^3} - \frac{2}{13^3}\right) + y\left(\frac{2}{7^3} - \frac{2}{11^3}\right) + z\left(\frac{2}{5^3} - \frac{2}{9^3}\right) + u\left(\frac{2q}{3^3} - \frac{2}{7^3}\right) \\ + v\left(p - \frac{2}{5^3}\right) = \left(p + \frac{2q}{3^3}\right).$$

En les résolvant avec les précautions convenables pour avoir la certitude que le résultat est exact, l'on trouve ;

$$x = 1,63516 ; \quad y = 1,08438 ; \quad z = 1,06949 ;$$

$$u = 1,02700 ; \quad v = 1,00881 .$$

De là l'on tire $\frac{x}{y} = 1,5079$. Ainsi nous avons

$$A_{(1)} = 1,63516 \cdot A_{(6)} ; \quad A_{(1)} = 1,5079 \cdot A_{(2)}$$

COULOMB a trouvé par expérience

$$A_{(1)} = 1,70 \cdot A_{(6)} ; \quad A_{(1)} = 1,50 \cdot A_{(2)} ,$$

conformément à ce qu'il nous a laissé écrit dans la page 625 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1788. Certes on ne pouvait espérer un plus grand rapprochement entre la théorie et l'observation. Mais cet accord est dû, en partie, à l'introduction des deux coefficients numériques p et q avec lesquels nous avons modifiées les équations établies par COULOMB dans la page 627 du Volume que l'on vient de citer. Et afin de conserver à ces équations toute la force qui leur est inhérente, nous avons voulu les résoudre avec toute la rigueur mathématique, en repoussant le mode d'abréviation employé par COULOMB pour éviter la longueur de ce calcul.

La quantité qui demeure indéterminée dans l'évaluation de ces rapports est censée connue par la quantité totale E de l'électricité communiquée aux globes avant de les mettre en contact. Car dans le cas de douze globes, par exemple, l'on a l'équation

$$E = 8\pi a^2 (A_{(1)} + A_{(2)} + A_{(4)} + A_{(5)} + A_{(6)}) ,$$

ou bien,

$$E = 8\pi a^2 \cdot A_{(6)} (1 + x + y + z + u + v) ;$$

a étant le rayon des globes: ce qui revient à dire que la valeur de $A_{(6)}$ est tout-à-fait déterminée.

L'on peut calculer d'une manière analogue les expériences de COULOMB relatives à des sphères égales mises en contact avec une sphère d'un plus grand diamètre de manière que leurs centres soient sur la même ligne droite. D'abord, pour deux sphères égales mises en contact avec une troisième d'un rayon quadruple l'on a, pour l'équilibre du premier et du second point de contact, les équations

$$A_{(1)} = p A_{(2)} + \frac{2q}{9} \cdot A_{(3)} ; \quad A_{(3)} = A_{(2)} + \frac{2 A_{(1)} \cdot 4^2}{6^2} ;$$

où $A_{(1)}$ est l'épaisseur moyenne de l'électricité sur le plus grand globe;

$A_{(1)}$ l'épaisseur moyenne sur le globe qui lui est immédiatement en contact; et $A_{(3)}$ l'épaisseur moyenne sur le troisième globe égal au second. Sur cela il importe d'observer que, pour des globes *inégaux*, il convient de faire $p=1$ et $q=1$. La seconde de ces deux équations est établie d'après ce principe. Il suit de là que l'on a

$$\frac{A_{(3)}}{A_{(2)}} = \frac{81 + 72 \cdot p}{81 - 56 \cdot q} = 2,5519 ;$$

$$A_{(2)} = 0,57279 \cdot A_{(1)} ; \quad A_{(3)} = 1,4617 \cdot A_{(1)} .$$

COULOMB a trouvé, par expérience, $A_{(3)} = 2,54 \cdot A_{(2)}$ (*).

Pour le cas de quatre globes égaux mis en contact avec le globe quadruple, l'équilibre électrique pour les quatre points de contact qui se succèdent exige que l'on ait ces quatre équations; savoir

$$A_{(1)} = p A_{(2)} + \frac{2q}{3} A_{(3)} + \frac{2}{5} A_{(4)} + \frac{2}{7} A_{(5)} ;$$

$$A_{(2)} + \frac{2 A_{(1)} \cdot 4^2}{6^2} = p A_{(3)} + \frac{2q}{3} A_{(4)} + \frac{2}{5} A_{(5)} ;$$

$$p A_{(3)} + \frac{2q A_{(2)}}{3^2} + \frac{2 A_{(1)} \cdot 4^2}{8^2} = p A_{(4)} + \frac{2q \cdot A_{(5)}}{3^2} ;$$

$$p A_{(4)} + \frac{2q A_{(3)}}{3^2} + \frac{2 A_{(2)}}{5^2} + \frac{2 A_{(1)} \cdot 4^2}{10^2} = A_{(5)} .$$

En faisant

$$x = \frac{A_{(5)}}{A_{(1)}} , \quad y = \frac{A_{(4)}}{A_{(1)}} , \quad z = \frac{A_{(3)}}{A_{(1)}} , \quad u = \frac{A_{(2)}}{A_{(1)}} ;$$

nous aurons ;

$$\frac{2}{7} x + \frac{2}{5} y + \frac{2q}{3} z + p u = 1 ;$$

$$\frac{2}{5} x + \frac{2q}{3^2} y + p z - u = \frac{8}{9} ;$$

$$\frac{2q}{3^2} x + p y - p z - \frac{2qu}{3^2} = \frac{1}{2} ;$$

$$x - p y - \frac{2qz}{3^2} - \frac{2u}{5^2} = \frac{8}{25} .$$

(*) Voyez page 635 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'année 1788.

En résolvant ces équations l'on trouve;

$$x = 1,72906 ; \quad y = 1,04915 ;$$

$$z = 0,97067 ; \quad u = 0,55248 ;$$

d'où l'on tire

$$\frac{x}{u} = \frac{A_{(5)}}{A_{(2)}} = 3,1240 .$$

COULOMB a trouvé, par expérience, $\frac{x}{u} = 3,40$ (*). Cela suffit pour démontrer que les calculs faits d'après le principe précédent peuvent, au moins par approximation, donner les résultats de l'observation directe.

NOTE

où, d'après l'observation du seul fait général que l'électricité libre se porte à la surface des corps conducteurs, on démontre a priori, que la loi de sa force répulsive doit être celle de la raison inverse du carré de la distance.

Soit dm la masse d'un élément différentiel d'électricité positive ou négative, et r^{-n} la puissance de la distance qui exprime son action sur un point chargé d'électricité libre qui en est à la distance r . En désignant par x, y, z les coordonnées rectangulaires de l'élément dm , et nommant a, b, c les coordonnées du point attiré ou repoussé, suivant qu'il possédera une électricité de nom contraire ou de même nom, l'on a l'équation

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 .$$

(*) Voyez page 636 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'année 1788.

Et l'on sait que pour avoir les composantes de la force totale, due à une masse donnée de fluide électrique, qui d'une manière quelconque aurait acquis un état d'équilibre, la question consiste à avoir la quantité V , telle que l'on ait

$$V = \frac{1}{n-1} \cdot \int \frac{dm}{r^{n-1}} ;$$

cette intégrale étant étendue à la totalité de la masse agissante. Alors, les coefficients aux différences partielles $\frac{dV}{da}$, $\frac{dV}{db}$, $\frac{dV}{dc}$ donnent les composantes rectangulaires de la force qui sollicite le point déterminé par les coordonnées a , b , c . Donc, il est impossible que ce point demeure en équilibre en le plaçant dans un point quelconque d'un espace fini, si l'expression de V ne résulte pas indépendante des coordonnées a , b , c qui déterminent la situation d'un point de cet espace. Or il est évident par soi-même, que pour tout point extérieur à la masse attirante, de manière qu'il ne soit pas entouré par elle, l'équilibre est impossible; car, cela revient à dire que ce point est soumis à l'action d'un nombre infini de forces, qui toutes sont dirigées vers la même région de l'espace. Mais si la masse attirante est, dans sa configuration, semblable à une couche fermée, ou à une couche cylindrique, alors on conçoit que les points électriques placés dans l'espace vide qui constitue la cavité de la couche, étant soumis à l'action d'une infinité de forces dont une partie est dirigée dans un sens et une partie dans le sens contraire, il n'est pas, de prime abord, absurde de dire que l'équilibre peut être possible. Mais, en analysant de plus près ce qui se passe dans ce cas on est amené à conclure que cette possibilité exige, pour être réalisée, que l'exposant n soit égal à 2. Le raisonnement qui conduit à cette conséquence est le suivant. L'équation

$$\frac{1}{r^{n-1}} = \{ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \}^{-\frac{(n-1)}{2}},$$

par des doubles différentiations faites successivement par rapport aux coordonnées constantes a , b , c donne

$$\frac{d^2 \cdot \frac{1}{r^{n-1}}}{da^2} = \frac{(n^2-n)(x-a)^2 - (n-2)(y-b)^2 - (n-1)(z-c)^2}{r^{n+3}};$$

$$\frac{d^2 \cdot \frac{1}{r^{n-1}}}{db^2} = \frac{(n^2-n)(y-b)^2 - (n-1)(x-a)^2 - (n-1)(z-c)^2}{r^{n+3}};$$

$$\frac{d^2 \cdot \frac{1}{r^{n-1}}}{dc^2} = \frac{(n^2-n)(z-c)^2 - (n-1)(x-a)^2 - (n-1)(y-b)^2}{r^{n+3}};$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2 \cdot \frac{1}{r^{n-1}}}{da^2} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r^{n-1}}}{db^2} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r^{n-1}}}{dc^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{r^{n+1}}.$$

Donc en multipliant par dm les deux membres de cette équation, et faisant ensuite l'intégration, il viendra une équation équivalente à celle-ci;

$$(I) \dots \frac{d^2 V}{da^2} + \frac{d^2 V}{db^2} + \frac{d^2 V}{dc^2} = (n-2) \int \frac{dm}{r^{n+1}}.$$

Elle exprime une propriété générale de la fonction V , et il faudra regarder comme incompatible toute forme qui ne pourrait pas la vérifier par identité. Mais on ne peut découvrir les cas d'exception sans considérer séparément deux cas. Le premier est celui où le point attiré ou repoussé est absolument en dehors de la masse agissante: le second est celui où le point attiré ou repoussé fait lui-même partie intégrante de la masse agissante.

Dans le premier, aucune des valeurs de la distance r ne peut devenir nulle, et par conséquent, aucun des élémens de l'intégrale $\int \frac{dm}{r^{n+1}}$, dont les limites sont les mêmes que celles de V , ne passe par l'infini. Rien n'empêche d'après cela de regarder l'intégrale comme une fonction de a , b , c , et de n , qui pour toute valeur de n conserve une valeur finie. Mais, dans le second cas, la circonstance qu'il y a des valeurs de r , susceptibles de devenir infiniment petites et même nulles, exige un examen plus approfondi, afin de rendre moins implicite l'expression du second membre de l'équation (I). Pour cela, je conçois une sphère décrite avec une rayon r'' , telle que le point ayant a , b , c pour coor-

données soit, non à la surface, mais dans son intérieur, à une distance du centre que je désigne par r' . C'est-à-dire que, en nommant x', y', z' les coordonnées de la surface de cette sphère, et α, β, γ celles de son centre, l'on a;

$$r'^2 = (a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2 ;$$

$$r''^2 = (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2 .$$

En outre, je suppose le rayon r'' assez petit pour pouvoir, même dans le cas de l'hétérogénéité de la matière qui constitue la masse totale, regarder comme homogène la densité ρ de cette sphère. De sorte que, si ρ était une fonction donnée des coordonnées a, b, c , l'on pourrait faire abstraction des variations de cette fonction dans toute l'étendue de cette sphère.

Actuellement, j'imagine la masse totale à laquelle se rapporte l'intégrale $\int \frac{dm}{r^{n+1}}$ comme composée de deux parties, de manière que l'on ait

$$(II) \dots \int \frac{dm}{r^{n+1}} = \int' \frac{dm}{r^{n+1}} + \int'' \frac{dm}{r^{n+1}} ,$$

et je regarde l'intégrale affectée du signe $\int''$ comme appartenante à la sphère. Or, en appliquant ici la formule générale pour évaluer, par les coordonnées polaires, toute intégrale de la forme

$$U' = \int \frac{dm}{u^{n+1}} ,$$

l'on trouve que, pour une couche sphérique homogène ayant une épaisseur égale à $r'' - r'$, l'on a, relativement à un point placé dans sa cavité, à la distance c de son centre;

$$(1) \dots \dots U' =$$

$$\frac{2\pi\rho}{c(1-n)(2-n)} \left\{ r''(r''+c)^{2-n} - r''(r''-c)^{2-n} - r'(r'+c)^{2-n} + r'(r'-c)^{2-n} \right\} \\ - \frac{2\pi\rho}{c(1-n)(2-n)(3-n)} \left\{ (r''+c)^{3-n} - (r''-c)^{3-n} - (r'+c)^{3-n} + (r'-c)^{3-n} \right\} .$$

Et en faisant $U'' = \int \frac{dm}{u^{n+1}}$, pour le cas où le point attiré ou repoussé est placé en dehors de la couche à la distance c' de son centre, l'on trouve

$$(2) \dots\dots U'' =$$

$$\frac{2\pi\rho}{c'(1-n)(2-n)} \left\{ r''(c'+r'')^{2-n} + r''(c'-r'')^{2-n} - r'(c'+r')^{2-n} - r'(c'-r')^{2-n} \right\} \\ - \frac{2\pi\rho}{c'(1-n)(2-n)(3-n)} \left\{ (c'+r'')^{3-n} - (c'-r'')^{3-n} - (c'+r')^{3-n} + (c'-r')^{3-n} \right\}.$$

En faisant $r'=0$, cette formule donne pour une sphère entière ;

$$(3) \dots\dots (*) \quad U'' = \frac{2\pi\rho}{c'(1-n)(2-n)} \left\{ r''(c'+r'')^{2-n} + r''(c'-r'')^{2-n} \right\} \\ - \frac{2\pi\rho}{c'(1-n)(2-n)(3-n)} \left\{ (c'+r'')^{3-n} - (c'-r'')^{3-n} \right\}.$$

(*) En faisant $n=0$, et $n=-3$ cette formule démontre que, dans ces deux cas, l'attraction des sphères a lieu comme si toute leur masse était concentrée dans le centre même. Car pour $n=0$ elle donne

$$U'' = \frac{4\pi\rho r''^3}{3c'} ;$$

et pour $n=-3$ elle donne

$$-\frac{1}{2}U'' = -\frac{2\pi\rho}{3}r''c'^2 - \frac{2\pi\rho}{5}r''^5 ;$$

d'où l'on tire en différentiant par rapport à c' ;

$$-\frac{dU''}{dc'} = \frac{M}{c'^2} ; \quad -\frac{1}{2} \cdot \frac{dU''}{dc'} = M \cdot c' ;$$

M étant la masse de la sphère. Il est clair qu'une loi composée de la somme de deux termes semblables aurait aussi la même propriété (voyez Tom. I. de la Mécanique Céleste page 143). Mais dans le cas de $n=-3$, c'est-à-dire d'une action mutuelle en raison directe de la distance, on démontre de plus que toute masse, quelle que soit sa forme, attire comme si la masse entière était réunie à son centre de gravité.

En posant $V_1 = -\frac{U''}{n+1}$, la formule (3) donne

$$-\frac{dV_1}{dc'} = \frac{2\pi\rho}{c'^2(1-n^2)(3-n)} \left\{ -\frac{(c'+r'')^{3-n} - (c'-r'')^{3-n}}{(3-n)c'r''} + \frac{(c'+r')^{3-n} - (c'-r')^{3-n}}{(3-n)c'r''} \right\} ;$$

ce qui s'accorde avec la formule (B) donnée par LAPLACE dans la page 101 du cinquième Volume de la Mécanique Céleste.

Et en posant $c' = r''$ dans cette dernière formule l'on aura (pourvu que les exposans $2-n$, $3-n$ ne soient pas négatifs);

$$(4) \dots U'' = \frac{2\pi\rho}{(1-n)(2-n)} (2r'')^{2-n} - \frac{2\pi\rho}{(1-n)(2-n)(3-n)} \cdot \frac{(2r'')^{3-n}}{r''},$$

pour le cas où le point attiré serait placé à la surface même de la sphère.

Cela posé, si l'on fait $c = r'$, la formule (1) donne

$$(5) \dots U' = \frac{2\pi\rho}{(1-n)(2-n)} \cdot \frac{r''}{r'} \{ (r'' + r')^{2-n} - (r'' - r')^{2-n} \} - \frac{2\pi\rho}{(1-n)(2-n)} (2r')^{2-n} \\ - \frac{2\pi\rho}{(1-n)(2-n)(3-n) \cdot r'} \{ (r'' + r')^{3-n} - (r'' - r')^{3-n} - (2r')^{3-n} \},$$

pour le cas où le point attiré est placé sur la surface intérieure de la couche.

Maintenant si l'on remplace r'' par r' dans la formule (4), et si, après ce changement, l'on fait la somme $U' + U''$ telle qu'elle est donnée par les formules (4) et (5), cette somme sera précisément égale

à l'intégrale désignée plus haut par $\int \frac{dm}{r^{n+1}}$. De sorte que nous avons, en réduisant,

$$(III) \dots (2-n) \int \frac{dm}{r^{n+1}} = \frac{2\pi\rho}{1-n} \cdot \frac{r''}{r'} \{ (r'' + r')^{2-n} - (r'' - r')^{2-n} \} \\ - \frac{2\pi\rho}{(1-n)(3-n)r'} \{ (r'' + r')^{3-n} - (r'' - r')^{3-n} \}.$$

Donc, en vertu des équations (I), (II) et (III) nous avons, en général, cette équation remarquable,

$$(IV) \dots \frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = (n-2) \int \frac{dm}{r^{n+1}} \\ - \frac{2\pi\rho}{1-n} \cdot \frac{r''}{r'} \{ (r'' + r')^{2-n} - (r'' - r')^{2-n} \} \\ + \frac{2\pi\rho}{(1-n)(3-n)r'} \{ (r'' + r')^{3-n} - (r'' - r')^{3-n} \},$$

qui doit toujours subsister pour le cas où l'intégrale désignée par V se rapporte à un point de la masse agissante, où la densité ρ est égale à la fonction de a, b, c représentée par ρ .

Après avoir ainsi établi les équations (I) et (IV) nous voyons d'abord que, dans le cas particulier de $n=2$, l'on doit interpréter comme absolument nulle la valeur de chacun des produits

$$(n-2) \int \frac{dm}{r^{n+1}}, \quad (n-2) \int' \frac{dm}{r'^{n+1}},$$

puisque, par leur nature, ces deux intégrales ne peuvent jamais devenir infinies. Mais alors le second membre de l'équation (I) se réduit à zéro, et celui de l'équation (IV) se réduit à la quantité $-4\pi\rho$, indépendante des distances auxiliaires r' et r'' . Donc, lorsque la loi de la répulsion ou de l'attraction est la raison inverse du carré de la distance, pour tout point (a, b, c) extérieur à la masse agissante, la fonction V doit satisfaire à l'équation

$$(V) \dots\dots\dots \frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = 0;$$

et pour tout point qui fait partie intégrante de la masse agissante, là où la densité ρ est égale à ρ , la fonction V doit satisfaire à l'équation

$$(VI) \dots\dots\dots \frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = -4\pi\rho.$$

Or il est évident que cette dernière équation ne peut jamais être satisfaite en y faisant $V = \text{constante}$, à moins qu'elle ne soit relative à un point où la densité ρ serait nulle: ou, en d'autres termes, à un point extérieur à la masse attirante. Mais alors, c'est l'équation (V) qui doit être satisfaite; et celle-ci peut l'être effectivement d'une infinité de manières, parmi lesquelles se trouve aussi comprise la solution $V = \text{constante}$. Donc, une masse dont les molécules se repoussent ou s'attirent en raison inverse du carré de la distance, pourra se constituer sous une forme semblable à celle d'une couche, de manière que son action soit nulle par rapport à tout point placé dans sa cavité. Et cette même masse serait dans une agitation perpétuelle si l'on voulait la contraindre à remplir un espace d'une manière continue, quelle que fût d'ailleurs

la figure terminatrice de sa surface. Toutefois ce raisonnement ne prouve pas *a priori*, que pour un corps conducteur de figure donnée, et pour une masse donnée d'électricité, l'équilibre ne soit possible que d'une seule manière, quoique cela soit vrai en nature. Car on pourrait objecter que la condition exprimée par l'équation $V = \text{constante}$, pourrait avoir lieu en variant de plusieurs manières la figure de la surface intérieure de la couche. Nous ignorons si la démonstration de cette vérité physique a été trouvée pour un corps quelconque : mais il est certain, que cette imperfection ne porte aucune atteinte à la conséquence que nous voulons tirer ici. Nous demandons seulement qu'ils nous soit accordé que l'expérience démontre, que les corps conducteurs électrisés ne donnent aucun signe d'électricité par rapport au fluide *neutre* qui demeure dans leur intérieur. De là il faudra en conclure : ou que la masse de fluide *libre* qui constitue l'état électrique de ces corps satisfait à l'équation (I) parceque $n = 2$: ou qu'il y a d'autres valeurs de n capables de satisfaire à l'équation (I), en y faisant $V = \text{constante}$. Or cela est absurde, puisque le produit

$$(n - 2) \int \frac{dm}{r^{n+1}}$$

se compose de deux facteurs, dont le second ne peut jamais être nul par sa nature. Et pour savoir si l'équilibre serait possible avec une valeur de n différente de 2 sous la forme de masse continue, sans cavité, il faudrait toujours supposer $V = \text{constante}$ dans l'équation (IV), ce qui la réduit à celle-ci ;

$$(n - 2) \int \frac{dm}{r^{n+1}} = \frac{2\pi\rho}{1-n} \cdot \frac{r''}{r'} \left\{ (r'' + r')^{2-n} - (r'' - r')^{2-n} \right\} \\ - \frac{2\pi\rho}{(1-n)(3-n)r'} \left\{ (r'' + r')^{3-n} - (r'' - r')^{3-n} \right\}.$$

Et on conçoit que cette équation étant susceptible d'être mise sous la forme de Fonct. $(a, b, c, n) = 0$, ne pourrait jamais avoir lieu que pour les points appartenans à une surface tracée dans l'intérieur de la masse agissante, et non pour une infinité de points dont les trois coordonnées seraient indépendantes. De sorte que, en voulant attribuer à n une valeur différente de 2, l'on tombe à la fois sur la double impossibilité de

l'équilibre, soit à l'état de couche, soit à l'état de masse continue qui remplirait le vide qui existe entre les pores de la matière pondérable et conductrice. La loi de COULOMB est donc la seule qui soit conforme aux phénomènes, et le seul fait général du transport de l'électricité libre à la surface des corps conducteurs, découvert par BECCARIA (*), suffit pour l'établir *a priori*, sans la nécessité d'aucune mesure directe (**).

Cette loi est, dans le fond, la seule qui soit strictement nécessaire pour parvenir aux formules données dans ce Mémoire. Elles subsistent également dans l'hypothèse d'un seul, comme dans celle de deux fluides électriques distincts. La cause intrinsèque des phénomènes peut être différente, mais les formules qui mesurent les forces développées par l'action électro-statique sont les mêmes. Il suffit d'accorder que les éléments de l'intégrale $\int \frac{dm}{r}$ puissent être, ou tous positifs, ou tous négatifs, ou en partie positifs et en partie négatifs, pour que l'équilibre électrique soit possible dans toutes les différentes circonstances qui peuvent avoir lieu. Après cela, l'on pourra expliquer l'opposition des forces en présence, soit avec l'hypothèse de FRANKLIN modifiée par ÆPINUS, soit avec l'hypothèse des deux électricités de DUFAY conçue avec les idées de SYMMER et de COULOMB. Dans l'une comme dans l'autre, la loi des intensités électriques à la surface d'une sphère électrisée par *influence*, en vertu de l'action d'une autre sphère d'un plus grand diamètre, sera conforme à notre valeur de z fournie par l'équation (196) après y avoir fait $B=0$. Dans l'une comme dans l'autre, le cercle qui sépare les forces positives des forces négatives sera déterminé par notre équation (202).

Au reste, je pense que pour acquérir des notions exactes sur les deux hypothèses dont je viens de parler, on ne peut mieux faire que de lire attentivement un excellent Mémoire, *Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps*, publié en 1836 par mon illustre ami M^r O. F. MOSSOTTI. La manière ingénieuse dont l'Auteur explique la co-existence de l'attraction et de la répulsion de la matière aura un jour une grande influence sur les progrès de la philosophie naturelle.

(*) Voyez les pages 193 et 194 de l'ouvrage publié en 1771 avec le titre *Elettricismo artificiale*.

(**) On peut consulter sur ce même point un intéressant Mémoire de M. Joseph BELLI, célèbre Professeur de Physique à l'Université I. et R. de Pavie, publié en 1840 dans le Tome XXII de la Collection intitulée : *Memorie della Società Italiana delle Scienze residente in Modena*.

SCIENZE

MORALI STORICHE E FILOLOGICHE

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE II. — TOM. VII.

SCIENZE MORALI STORICHE E FILOLOGICHE

TORINO
STAMPERIA REALE

MDCCCXLV.

DISCORSI CRITICI

SOPRA

LA CRONOLOGIA EGIZIA

DEL PROFESSORE

FRANCESCO BARUCCHI

DIRETTORE DEL MUSEO EGIZIO

Approvata nell'adunanza del 2 maggio 1844

PREFAZIONE

Negli ultimi due secoli, dopo la pubblicazione della *Cronografia* del Sincello fatta per cura del Goar (1), molti eruditi presero ad illustrare la cronologia egizia, valendosi specialmente dei documenti contenuti nella suddetta opera. Ma chiunque abbia sottoposto i loro scritti a diligente disamina, facilmente converrà nella sentenza del Volney, il quale nelle sue *Ricerche nuove sopra la storia antica* stampate nei primi anni del secolo corrente, non dubitava di affermare, che l'argomento della cronologia egizia era tuttora avvolto dalla stessa oscurità in cui l'avea trovato l'inglese Marsamo corifeo dei succennati illustratori (2). Nè lo stesso Volney, quantunque si desse vanto di procedere con *metodo imparziale* ed affatto diverso da quello tenuto dagli altri in questa trattazione, si mostrò poi critico più imparziale o più sottile allorchè vi si fu accinto; imperocchè nelle sue *Ricerche* tu incontri tutti i difetti da lui non senza ragione notati nel *canone egiziaco* del Marsamo (3), cioè,

(1) Georgii Monachi Syncelli, *Chronographia Gr. et Lat.*; Parisiis, 1652.

(2) *Recherches nouvelles sur l'Histoire ancienne* T. 2, pag. 289; nouvelle édition, Paris, 1822.

(3) *Marshami Canon Aegyptiacus etc.*, Londini, 1672.

petizioni di principii, giudizi senza discussioni, decisioni senza prove, e ravvicinamenti senza analogie. Che se ci faremo a rintracciare le cagioni, per le quali siano tornate sì poco proficue alla scienza, le elucubrazioni di tanti dotti, dovranno a mio giudizio essere considerate come principali le tre seguenti: 1.^a la scarsità, l'incerta fede, e la frequente contraddizione delle notizie tramandate dagli antichi scrittori intorno alla storia egizia; 2.^a la fallace molteplicità dei documenti cronologici, che il Sincello trascrisse nella sua opera senza verun discernimento; 3.^a le varie e sistematiche opinioni sopra l'indefinita ed indefinibile cronologia della Bibbia, dalle quali preoccupati i più degli eruditi, vollero ad ogni modo subordinare a quelle anche l'egizia, in luogo di trattarla secondo i suoi propri elementi. Quanto alla prima delle predette cagioni, l'età nostra può meritamente gloriarsi di aver trovato un presidio nuovo e valido, sì a supplire in gran parte alla scarsità delle notizie, e sì ancora a portare un più retto giudizio sulla fede dovuta alle medesime. Imperocchè, mercè l'applicazione delle teoriche non meno ingegnose che vere dello Champollion sulle scritture egizie, allo studio dei monumenti faraonici tuttora esistenti, già nello spazio di pochi lustri, le indagini di pochi dotti procacciarono molte e preziose cognizioni storiche ed archeologiche; e però non è dubbio, che noi vantaggiati di queste e delle altre già prima possedute, non siamo in grado di tentare la ricomposizione degli annali egizii con miglior successo che non per l'addietro. In fatti negli scritti dello Champollion, e più ancora in quelli del professore Rosellini (amendue rapiti da morte prematura con danno gravissimo di questi novelli studi) veggonsi dichiarate ed accertate alcune parti della cronologia egizia, state sino allora in massima oscurità e dubbiozza; tra i frutti poi ricavati dall'interpretazione dei monumenti, non è da tenere in poco pregio quello di avere, almeno genericamente, comprovata la storica realtà d'una moltitudine d'antichità, la quale potea parere molto sospetta, fintantochè i loro nomi leggevasi unicamente nei libri d' Erodoto e di Diodoro, ovvero nei controversi catalogi di Manetone. Ma se i lavori dei due prelodati archeologi, per l'importanza dei risultati soprastanno di gran lunga a tutti i precedenti, tuttavia molto ancora lasciano a desiderare quanto all'imparzialità de' giudizi ed alla severità critica, due qualità più che mai necessarie in siffatta materia, non meno a distruggere gli antichi errori, che a premunire contro ai nuovi. Nè da poi che il Rosellini ebbe dato

alle stampe l'esposizione del suo sistema cronologico (1), sorse finora nessun erudito di polso a ripigliare di proposito così rilevante trattazione, quantunque ogni dì sia venuto crescendo il corredo della storia egizia, tanto con ulteriori scoperte di monumenti prima ignoti, quanto con migliori interpretazioni dei già conosciuti. Maraviglia poi molto maggiore ella è, che in tanto incremento degli studi critici, niuno ancora abbia rivolto l'animo ad una profonda e severa discussione dei fonti della cronologia egizia conservatici dal Sincello, a fine di sceverare gli spurii dagli autentici, e rivendicare a questi il grado di fede consentito dai principii dell'arte critica; discussione, senza la quale è impossibile liberare la detta cronologia da quella confusione, in che la gettarono tutti coloro che ne scrissero prima degli splendidi trovati dello Champollion sulla natura delle scritture egizie.

Per supplire, secondo le mie forze, ai difetti che venni sin qui accennando, e per rintracciare a mio privato ammaestramento la soluzione d'un importantissimo quesito, in vano cercata negli scritti già pubblicati, io con animo libero da qualunque sistema, e ben disposto ad ammettere quello che mi parrebbe più consuetaneo al vero, intrapresi nuove ricerche, il frutto delle quali qualunque ci sia, consegnai nei quattro seguenti Discorsi. Questi condotti oramai al termine che potei migliore, sottopongo al giudizio degli eruditi, animato dal consiglio di personaggi non meno autorevoli per dottrina, che benevoli verso di me, e portando qualche fiducia che, se il mio lavoro sarà per avventura stimato insufficiente a terminare perentoriamente ed in ogni sua parte una controversia da sì lungo tempo agitata, non sia però disutile a coloro che dopo a me vorranno farla scopo a speciale disamina.

(1) Monumenti dell'Egitto e della Nubia, parte storica, Tom. I e II.

DISCORSO I.

SULL'AUTENTICITÀ DEGLI AVANZI MANETONIANI, DELLA VECCHIA CRONACA,
E DEL CATALOGO ATTRIBUITO AD ERATOSTENE.

I. Nei primi secoli del cristianesimo fu tenuta in gran pregio la storia egizia stata scritta in lingua greca, prima dell'era volgare, dall'egizio Manetone. A quella Giuseppe Flavio nei libri contro ad Apione erudito egizio, provoca i suoi avversarii (1); a quella unicamente Giulio Africano, scrittore ecclesiastico del terzo secolo, attinse gli elementi della cronologia egizia, avendone ricavato un catalogo di re, del quale si valse poi nel seguente secolo il dottissimo Eusebio di Cesarea pel suo canone de' tempi (2). Ma per nostro danno, per l'opera Manetoniana nel gravissimo naufragio delle antiche lettere, e ci rimasero soltanto pochi squarci riferiti da Giuseppe, ed i sunti cronologici d'Africano e d'Eusebio. Vero è che il Sincello ai detti sunti aggiunse altre notizie ed altre scritture derivate, a suo credere, da Manetone, ma tra breve dimostrerò quanto egli errasse non solamente in ciò, ma eziandio nel giudicare più antico del vero Manetone, il documento da lui riferito per cronaca egizia, e nel credere Eratostene autore d'un catalogo di re Tebani.

II. Opposti giudizi furono sovente fatti intorno agli scritti di Manetone dai tempi di Giuseppe Scaligero e di Petavio sino addi presenti (3), e non ha guari, un professore tedesco ne impugnò totalmente l'autenticità, parendogli di ravvisare in essi prove non dubbie, che il loro autore nè attinse a fonti egizii la materia de' suoi racconti, nè visse in

(1) *Contra Apion.* l. I. § 14.

(2) Io tengo per fermo, che Eusebio delle storie di Manetone altro non vide se non il catalogo da quelle desunto per l'Africano; perocchè se egli avesse avuto tra le mani il corpo di quelle storie, da esse immediatamente, anzichè da Giuseppe Flavio avrebbe ricavato il racconto sugli Hyksos che inserì nella sua opera. Vedi l'edizione greco-armeno-latina del *Chronicon* T. I, pag. 199.

(3) *Scaliger Can. Isag.* l. 2; *Petav. Doctr. Temp.* l. 10. c. 17.

età anteriore a quella dei primi Cesari (1). E veramente io non saprei in qual modo rispondere alle sue più gravi obbiezioni, se dovessi difendere quali parti legittimi dello storico egizio, tutti gli scritti, che come tali furono ricevuti dallo Scaligero, dal Vossio, dal Marsano, dal Fourmont, e, per tacere di tanti altri, dai due Champollion e dal Rosellini, o se mostrata la natura spuria di alcuno tra quelli, egualmente spurii dovessero essere dichiarati tutti gli altri. Qui cade in acconcio l'aforismo delle antiche scuole, *distingue frequenter*, e perchè appunto finora fu trascurata la necessaria distinzione, dagli uni fu levata a cielo l'autorità di Manetone, e dagli altri indegnamente conculcata.

III. L'autenticità d'uno scritto può essere impugnata in due modi, cioè, o negando che mai sia esistito l'autore di cui porta il nome, ovvero (caso molto più frequente), che sia veramente sua fattura. Dell'esistenza d'uno storico egizio detto Manetone, e chiaro per moltiplice dottrina, fanno ampia testimonianza scrittori ebrei, cristiani e gentili dei primi secoli del cristianesimo (2), ondechè il dubitarne sarebbe del tutto irragionevole.

I principii dell'arte critica prescrivono, doversi tenere in conto di scritti genuini tutti quelli, che con nome di certo autore sono citati da scrittori o contemporanei o non troppo lontani dall'età, in che visse l'autore, qualunque volta gli scritti stessi non forniscano argomenti contrarii. Secondo questa regola io sostengo doversi attribuire a Manetone gli squarei, che Giuseppe Flavio afferma essere letteralmente desunti dalle storie di quello, additandone per fino il volume (3); imperocchè nel primo secolo dell'era volgare, quando Giuseppe invocava l'autorità di Manetone, per comprovare colla testimonianza degli annali egizii l'antichità della nazione ebrea, contro agli eruditi Alessandrini, era per certo appresso questi fresca e vivente la memoria di quello storico, poichè altrimenti ne sarebbe stato beffeggiato lo scrittore ebreo, che a lui così francamente li provocava. Moltissimi frammenti di opere ben più antiche delle storie Manetoniane, e citati solamente da autori più recenti di Giuseppe Flavio, sono tuttavia riconosciuti autentici dalla

(1) Hengstenberg die Bücher Moses und Ägypter etc., Berlin, 1841.

(2) Vedi Gerardo Vossio de historicis graecis, l. I. cap. XIV, e Fabricio, Bibl. Graec. l. III. c. XX.

(3) Contra Apion. l. I. § 14. 15. 26.

moderna critica, quando non mostrino per validi indizii, di essere supposti. Ora tutte le obbiezioni che altri potrebbe fare contro all'autenticità dei succennati brani riferiti da Giuseppe, avrebbero tutt' al più forza a provare, che qualche vocabolo sia stato corrotto per ignoranza od inenria dei copisti delle sue opere, o che qualche frase sia stata intrusa nel testo, da temerario chiosatore, non però mai dimostrerebbono esserne adulterina la sostanza. In fatti il lodato professore Berlinese riprende l'autore, d' ignoranza della geografia egizia, perchè nelle edizioni di Flavio leggesi avere il primo re degli Hykshos trovato *nel Nomo Saite una città posta all'oriente del fiume Bubastite* (1), essendo quello all'occidente del Delta, e questo il più orientale di tutti. Ma il critico Tedesco avrebbe mostrato miglior senna, se in luogo di dedurre da quell'errore un indizio contro all'autenticità del testo, avesse a correggerlo adoprato le regole suggerite da quel ramo di critica, che appunto dallo speciale suo uffizio vien detta *correttiva*; perocchè non gli sarebbe stato difficile accertarsi, che in vece di *Saite* Manetone avea scritto *Setroite*, paragonando al testo di Giuseppe quello d'Africano e d'Eusebio appresso il Syncello, dove parlando della dinastia dei Pastori, l'uno e l'altro dicono situata nel Nomo *Setroite* la città che edificarono que' conquistatori (2). Anzi, che in Flavio stesso ai tempi d'Eusebio fosse scritto *Setroite* e non *Saite*, è manifesto per la versione armena della cronaca Eusebiana, la quale, riferendo lo squarcio dello storico ebreo, porta scritto *Metraite*, corruzione evidente del *Setroite* originale (3).

IV. Un'alterazione assai più grave della precedente, ma non avvertita dal prelodato critico, io la ravviso nel bel principio dello squarcio di cui trattiamo, in quelle parole *ἐγένετο Βασιλεὺς ἡμῶν* interpretate dal traduttore latino *Regem olim habuimus*: le quali indicherebbero meglio un cominciamento di *monografia*, che un brano di cronaca tolto dal mezzo d'un volume contenente una serie di nomi regii, ed indicante gli avvenimenti seguiti sotto a ciascun regno. Ma oltrecchè in qualche edizione mancano le dette parole, siccome è notato dall'Avercampo (4), che non debbano attribuirsi nè a Manetone, nè a Giuseppe stesso, è maggior-

(1) § 14.

(2) Syncell. pag. 61. 62. ed. Goar.

(3) Eusebii Chron. Graec. - Arm. - Lat. . T. I , pag. 225.

(4) Iosephi Fl. opp. vol. 2 pag. 444

mente confermato dal non trovarsi le medesime appresso Eusebio, nè al L. X, c. 13 della *Prepar. Evang.*, nè nella versione armena del *Chronicon* (1).

V. Passerei sotto silenzio un'altra obbiezione fatta dall'Hongstemberg, siccome di poco momento, se nel rispondervi non trovassi una prova di più in favore dell'autenticità dello scritto impugnato. In proposito della voce Hykshos con che furono denominati i pastori che invasero l'Egitto, egli osserva, che si mostrò imperito di filologia egizia, e però non dee essere creduto Egizio di nazione, l'autore che spiegò la detta voce per *re pastori* togliendo l'interpretazione della sillaba *Hyk* dal sacro dialetto, e quella di *shos* dal comune; non essersi conservato verun indizio di un doppio dialetto sacro e comune; aver Manetone confuso la scrittura colla lingua, inoltre sopra nissun monumento non trovarsi la parola Hyk col significato di *re* o *prigioniero*, come era in altri esemplari interpretata.

Ma con pace dell'oppositore, debbo avvertire, che lo studio delle iscrizioni monumentali ogni dì più conferma, essersi dai sacerdoti egizii adoperate molte voci, che a buon diritto possono dirsi avere appartenuto al dialetto sacro, mentre da altre affatto diverse le troviamo surrogate nella lingua Copta, la quale ogni ragion vuole sia considerata per popolare o comune, almeno nei bassi tempi della nazione egizia, appresso a cui la vediamo adoperata. Così per non dilungarci dal tema presente, nei testi copti è adoprata la prola orpo o le sue affini eppa, eppo, ὡπα ὡπο, per indicare *Re*, ma nelle iscrizioni geroglifiche e geratiche dei monumenti, anche nell'età dei Tolomei, il titolo di *Re* è espresso il più sovente colla voce CTII, talvolta con 2K, come appunto spiega Manetone la prima sillaba del vocabolo Hyk-shos. Mostrò dunque perizia archeologica e filologica in detta spiegazione, e quale certamente non avrebbe avuto un autore non egizio, nè iniziato nelle scritture sacerdotali. La voce *shos* e meglio ꝓꝓꝓ, fu certo della lingua popolare, perocchè nel significato di *pastore* è adoprata dagli scrittori copti (2).

Nè men giusta in filologia è l'interpretazione data in altro esemplare

(1) Chron. Gr. Arm.: T. I., pag. 223.

(2) Peyron, Lex. Copt.

alla stessa voce composta, di *pastori prigionieri*, non più ricorrendo al dialetto sacro; poichè per testimonianza dei lessici, nella lingua comune Ⲫⲕ ha veramente il significato di *cingere, legare*. Dissi in filologia; ma per quella mediocre perizia che posso avere acquistata in molti anni d'indagini monumentali, un tal equivoco non era da temere nelle scritture geroglifiche e geratiche dei tempi faraonici; nelle quali oltre alla diversità dei segni determinativi secondo la diversità delle idee volute significare da uno stesso vocabolo, l'iniziale di Hyk in significato di *Re* comprendeva già in sè l'idea di capo o moderatore; nè mai sarebbe stata adoprata a rappresentare la voce Hyk o Hlak nel senso di *prigioniero* o *legato*; e però io dubito gravemente, che cert'altro *autografo* citato, ma non ben definito da Giuseppe, riferiscasi alla stessa opera di Manetone, od almeno al luogo che tratta del dominio dei Pastori in Egitto.

VI. Giuseppe Flavio dichiara aver tolto il suo racconto dal secondo tomo delle storie manetoniane; il catalogo delle dinastie riferito dall'Africano e da Eusebio, cita partitamente ciascuno dei tre tomi di Manetone donde erano state cavate le dinastie, ed appunto nel secondo trovasi quella dei Pastori, i cui nomi si leggono nel frammento addotto dallo storico ebreo; prova questa della medesimezza dell'opera cui attinsero l'uno e gli altri; e però non avendo noi ragione alcuna di dubitare dell'autenticità dello squarcio riferito da Giuseppe, dobbiamo pure tra gli avanzi autentici di Manetone riporre la serie delle dinastie conservataci dai due lodati cronologi, senza però pretendere per detta serie maggiore autorità di quella che apparirà esserle dovuta dopo diligente esame, ed avuto riguardo alle alterazioni che facilmente poterono essere operate sì dai primi compilatori, e sì dai susseguenti copisti. In fatti nel catalogo dell'Africano pervenuto a noi soltanto nella cronografia del Sincello, si scorgono più luoghi evidentemente corrotti, siccome mostreremo in uno dei seguenti discorsi, che verserà sull'analisi delle dinastie; quanto poi spetta ad Eusebio, è chiaro aver egli sovente, per fini suoi privati, mutato e mutilato quel dell'Africano, come a ragione gliene fa rimprovero il Sincello (1). Ma considerata la sostanza, è certo non potersi riferire ad altro autore, fuorchè a Manetone; ogni altra suppo-

(1) Chronogr. pag. 62. 63. 71.

sizione mostrandosi affatto priva di fondamento. In fatti se nel primo secolo dell'era volgare correivano per le mani dei dotti le storie Manetoniane, e ne erano all'uopo citati squarci; se nel terzo secolo uno scrittore ecclesiastico ne fece uso per la cronologia comparata; se il sunto da questo a noi tramandato concorda colle opinioni storiche e mitologiche dei sacerdoti egizii di quella età, in cui si pone l'autore di dette storie, negarne l'autenticità sarebbe lo stesso che voler distruggere ogni storica certezza. Che poi gli estratti manetoniani d'Africano e d'Eusebio concordino colle opinioni degli Egizii, quali ce le trasmisero Erodoto e Diodoro, è cosa agevolissima a mostrare. Ed in vero Manetone in cima alle dinastie umane poneva i regni degli Dei, dei Semidei, e dei Mani (1); Erodoto ammetteva Dei di 1.º, 2.º e 3.º ordine, secondo che udiva dai sacerdoti (2); Diodoro, secondo le favole egizie enumerava i regni degli Dei e degli eroi (3); in tutti e tre vediamo regni di esseri mitici anteriori ai mortali. Mene è primo re tanto in Manetone, quanto ne' due greci scrittori; a questo ne succede una moltitudine per lo spazio di alcune migliaia d'anni, che presso Manetone, siccome scrittore di storia patria, e quindi più accurato, e meglio ammaestrato, è divisa in 31 dinastie fino a Dario ultimo dei re Persiani.

VII. Che più? la serie delle dinastie Manetoniane comprende uno spazio di tempo maggiore di molti secoli dell'intervallo, che secondo il più largo computo della cronologia biblica divide l'avvenimento del diluvio universale dal principio dell'era volgare; la quale discrepanza dalla Bibbia esclude qualsiasi ipotesi, che ad autore ebreo o cristiano dei primi secoli della Chiesa volesse attribuirne la compilazione. Che se veramente fu opera di scrittore egizio, ed anteriore all'era volgare, come non si può ragionevolmente negare, non occorre disputare maggiormente; perocchè il nome di Manetone giunse a noi così mancante d'ogni notizia biografica, che omai altro non suona, se non uno scrittore egizio dell'età dei Tolomei.

VIII. Qui m'avvedo di avere innanzi tempo tolto per dimostrata un'asserzione, che dee essere soggetto di grave discussione, trattandosi di svelere dalle radici un errore invalso sin da quando Giuseppe Scaligero

(1) Syncelli Chronogr., pag. 54. 55; Eusebii Chron. T. I, pag. 200.

(2) L. II, § 141, 145.

(3) L. I, § 44.

pubblicò gli avanzi greci dell'opera cronologica d'Eusebio ricavati di qua e di colà, ma più specialmente dalla cronografia del Sincello, molte cose del quale egli arbitrariamente spacciò per Eusebiane (1). Dall'edizione dello Scaligero, e non altronde imparò il Vossio quanto intorno a Manetone scrisse nella sua opera degli storici greci, cioè, che fosse fiorito sotto il regno di Tolonco Filadelfo, che fosse scriba e sommo sacerdote dei templi d'Egitto, e che per comando di detto re scrivesse la storia di sua nazione (2). Ma queste notizie, quando pure fossero date da Eusebio, prima di essere ammesse per vere, vorrebbero essere diligentemente esaminate, e dalla natura del documento dove sono contenute, nissuno assennato critico potrebbe facilmente averle per tali. Se non che, si può francamente affermare non trovarsene il benchè menomo indizio nella vera cronaca d'Eusebio, e la loro fede riposare unicamente nell'autorità troppo debole del Sincello, il quale siccome ora mi accingo a dimostrare, non contento di avere riferito nella sua opera, e posti a perpetuo confronto i catalogi Manetoniani d'Africano e d'Eusebio, volle far dono ai suoi lettori d'un Manetone ben diverso da quello conosciuto per Giuseppe Flavio e pei due lodati cronologi. In fatti egli stesso ci avverte (3), che le indicazioni cronologiche sull'Egitto, appresso Manetone, discordano da quelle degli storici ecclesiastici (intendi sopra lo stesso argomento), e quanto alla denominazione, e quanto alla durata dei regni; e che non potendo da Manetone essere chiarito sotto qual re Giuseppe avesse tenuto principato in Egitto, e dopo lui Mosè avesse condotto gl'Israeliti fuori di quella contrada, reputa necessario trasegliere gli scritti di due dei più insigni autori (ecclesiastici), cioè di Africano e di Eusebio. Ma questi, come già di sopra fu detto, unicamente al vero Manetone si attennero nell'esposizione della cronologia egizia; dunque è manifesto, che ai tempi del Sincello correva sotto il nome di Manetone un'opera, od un sunto di cronologia diverso da quello, che avea fornito ad Africano il catalogo delle dinastie egizie. A torre poi qualunque dubbio potesse ancora ciò nullameno rimanere ne' miei lettori, soccorrono opportune le citazioni, e l'uso, che del suo Ma-

(1) Vedi la prefazione all'edizione Greca.-Armena-Latina d'Eusebio, § V.

(2) De Histor. Graec. l. I. c. XIV.

(3) Pag. 53.

netone fece il cronografo Bizantino. Eccone un insigne passo da me volgarizzato con massima fedeltà :

« Resta che del principato degli Egizii poche cose trascogliamo dagli »
 » scritti di Maneto Sebennita, il quale sotto Tolomeo Filadelfo essendo »
 » arcisacerdote dei templi degli idoli in Egitto, dai cippi posti nella »
 » terra Seriadica, scritti, dice, in dialetto sacro e con lettere gerogra- »
 » fiche da Tot primo Erme, ed interpretati dopo il diluvio dal dialetto »
 » sacro in ellenica favella con caratteri geroglifici, e consegnati nei li- »
 » bri da Agatodemone figliuolo del secondo Erme e padre di Tot nei »
 » penetrati dei templi d'Egitto, dichiarò ad esso Filadelfo re, secondo »
 » Tolomeo, nel libro di Soti scrivendo letteralmente così :

« Lettera di Maneto Sebennita
 » a Tolomeo Filadelfo

« Al re grande Tolomeo Filadelfo Augusto, Manetone arcisacerdote e »
 » scriba dei sacri penetrati d'Egitto, di schiatta Sebennita, Eliopolita, »
 » al Despota mio Tolomeo, salute. A noi conviene considerare, Massiro »
 » Re, tutte quelle cose, che a te piaccia sieno da noi esplorate. Ricer- »
 » cando tu delle cose che sono per accadere al mondo, siccome mi or- »
 » dinasti, saranno a te dichiarate le cose che io imparai dai libri sacri »
 » stati scritti dal Progenitore tuo Trismegisto Erme. Vale, Despota mio »
 » Re. »

« Queste cose dell'interpretazione dei libri scritti dal secondo Erme »
 » egli dice; e dopo ciò conta delle cinque genti egiziache (divise) in »
 » trenta dinastie, e dette appresso ai nazionali degli Dei, dei Semidei, »
 » dei Morti (o Mani) e dei Mortali, dei quali anche Eusebio di Pam- »
 » filo fa menzione nella sua opera dei tempi dicendo così ... » (1).

IX. In tanto incremento degli studi critici di cui si gloria l'età nostra, temerei abusare della sofferenza dei lettori, se imprendessi un lungo commentario, quale sarebbe necessario a mostrare ad una ad una le stranezze, e le frivole assurdità, onde è tessuto il preambolo della lettera a Tolomeo, la quale quando e per gli antecedenti, e pel titolo di

(1) Syncell. pag. 40.

Augusto dato a quel re, non manifestasse di essere parto spurio di tempi posteriori, nulla ha di comune con un'opera storica cui dovrebbe precedere come dedicatoria. So che il Rosellini tolse via una grave difficoltà, traducendo τὰ μέλλοντα γέγνησθαι non per le cose *avvenire*, ma per quelle che *avvennero* (1); ciò nulla meno, anche menandogli per buona cotesta licenza non perdonabile, io non so come sarebbe garbata a Filadelfo una storia d'Egitto, che fosse stata scritta molti secoli prima che seguissero gli eventi, dei quali esso desiderava accurata notizia. Meglio si appose il Letronne, che parlando incidentemente di detta lettera, asserì non potersi reputare anteriore al III secolo dell'era volgare, ed essere stata supposta forse nello stesso tempo, in cui furono per maggior numero fabbricati gli scritti Ermetici, nei quali sovente incontrasi il titolo di *Trismegisto* ignoto agli scrittori anteriori all'era volgare (2).

X. A noi basterà notare, 1.º che il Sincello non ricavò questo squarcio da Eusebio, poichè in sul fine dice, che delle dinastie favolose degli Egizii che ci riferisce sulla fede di Manetone, fa anche menzione il vescovo di Cesarea; ma quand'anche il Sincello non avesse fatta questa osservazione, ora che abbiamo la sorte di possedere l'intera opera d'Eusebio nella versione armena, nella quale inutilmente cercasi il suddetto squarcio, è accertata la falsità dell'attribuzione fattane dallo Scaligero (3). 2.º Che il Manetone del Sincello comprendeva in 30 dinastie i regni favolosi degli Dei, Semidei e Mani, ed i regni storici dei mortali, laddove ai soli tempi storici ed ai soli regni umani appartengono le 31 dinastie di Manetone presso Africano ed Eusebio. Nè questo è il solo passo, donde ricavisi la confusione recata alle dinastie del vero Manetone, essendone altri ancor più evidenti, come, dove il Sincello dice: « Manetone Sebennite scrivendo delle sedici dinastie, cioè di sette » Dei che mai non furono » (4); ed egli avrebbe dovuto aggiungere per essere consentaneo a sè stesso, *di nove Semidei*, onde avere la somma delle indicate sedici dinastie; ma alla sua inavvertenza, di cui molti esempi occorrono nel corso della sua laboriosa compilazione, supplisce poi il catalogo dei dinasti divini e semidivini, che segue come desunto

(1) Monumenti d'Egitto, Parte I. T. I. pag. V.

(2) Letronne, Inscription Grecque de Rosette, pag. 20, Paris, 1841.

(3) In Graec. Euseb. pag. 7.

(4) Pag. 18.

da Manetone, nel quale trovansi gli anni di ciascun regno ridotti al dodicesimo della vera loro durata (1), secondo un'interpretazione messa in campo da alcuni scrittori ecclesiastici, ma riprovata dal Sincello (2), cioè, che lunari fossero stati gli anni più antichi appresso gli Egizii, colla quale miravano a conciliare colla cronologia biblica i millenii e le miriadi d'anni attribuiti alla nazione Egizia dai favolosi suoi annali. Che poi veramente il Manetone del Sincello altro non sia, che un' interpolazione ed una sistematica riduzione dell'autentico, fassi chiaro da un altro luogo in cui il cronografo Bizantino, dopo aver detto che Manetone era stato ingannato da una cronaca egizia, la quale comprendeva in 36525 anni la durata dei regni divini ed umani (3), lo loda tuttavia, che esso abbia ristretto dentro lo spazio di 3555 anni tutto il tempo regnato dalle trenta dinastie contenenti 113 generazioni (e non famiglie, come tradusse il Goar) (4). Notammo già che i catalogi d'Africano e d'Eusebio ai soli regni umani assegnano la somma di 31 dinastie; qui poi abbiamo ad osservare, che il Manetone Sincelliano riduce a sole quattordici le dinastie umane, e la somma totale dei re da Mene a Nectancho, la quale nei detti catalogi è di oltre 450, in questo non oltrepassa il numero di 97 (poichè di 113 generazioni convien lasciarne sette agli Dei e nove ai Semidei).

XI. Per le cose sinqui esposte io credo, che non rimarrà più alcun dubbio sulla natura spuria del documento di cui trattiamo, e sullo scopo del suo autore, qualunque ei sia stato ed in qualsiasi secolo abbia vissuto. Solo debbo aggiungere, che da questo ricavò il Sincello quella lista di re egizii o mestrei, come ei li chiama, incominciante da Mestram, supposto erroneamente essere lo stesso che Mene, della quale, abbandonati Africano ed Eusebio, egli servesi continuamente nella descrizione dei tempi dagli anni del mondo 2776 in cui pone il principio del regno di Mestram o Mene (5). La qual cosa non avvertita finora, indusse il Marsano e la più parte dei cronologi a considerare la detta lista per

(1) Pag. 19.

(2) Pag. 18.

(3) Pag. 51.

(4) Pag. 52.

(5) Pag. 91.

catalogo di re del basso Egitto, e sopra questo ed altri fondamenti non più saldi, fu edificato quel sistema assurdo di dinastie contemporanee, che tanta e sì poco meritata lode fruttò all'erudito Inglese. Il Rosellini la giudicò fattura del Sincello stesso, non essere però spregevole, attese alcune indicazioni cronologiche (1), delle quali tuttavia ben piccolo è il pregio, giusta l'osservazione di un acutissimo critico (2). Il Sincello per verità non indica apertamente a qual fonte abbia attinto cotesto catalogo; ma siccome per le cose egizie non fa menzione d'alcun antico scrittore, se non di Manetone o vero o supposto, convien dire che dall'ultimo l'abbia ricavato, col quale perfettamente concorda nella restrizione dei tempi. A questa considerazione dà peso di vera dimostrazione l'avvertenza seguente posta dal cronografo in proposito del regno d'Amosi: « Sino al 4386 il regno degli Egizii durato dagli anni del » mondo 2776 per dieci dinastie ed ottanta sei re, dopo avere regnato » sulla contrada Mestrea ovvero sull' Egitto Amosi, dal primo di essi » Mestram, detto anche Mene » (3). Imperocchè l'asserzione di dieci dinastie terminate con Amosi, il quale, secondo il vero Manetone appartenne alla XXVI.^a non può altrimenti conciliarsi che col documento, il quale assegni le prime XVI dinastie agli Dei e Semidei, qual è appunto il Manetone seguito dal Sincello.

XII. Ora si può facilmente intendere, come il Sincello abbia creduto che Manetone fosse stato indotto in errore da quella cronaca egizia, la quale come di sopra accennammo, in trenta dinastie e 113 generazioni comprendeva i tempi favolosi e storici dell'Egitto; poichè veramente grandissima conformità è tra questa ed il mentito Manetone, laddove nella parte che più importa alla cronologia, vale a dire pei tempi corsi da Mene fino all'invasione Persiana, sommo è il divario tra la medesima ed il vero Manetone. Sotto il titolo immeritato di *vecchia cronaca* fu dai tempi del Marsamo sino addì nostri citata dai cronologi, e sulle parole del Sincello creduta più antica di Manetone; sebbene a giudicarla rettamente, molti e gravissimi indizii la mostrano uscita dalla

(1) Mon. Stor. T. 1, pag. 66 e 67.

(2) Vedi Biot, Recherches sur l'année vague des Egyptiens pag. 25, la nota comunicatagli dal Lefronne.

(3) Pag. 210.

medesima officina, in cui fu fabbricato il falso Manetone, e però degna di essere insieme con questo rigettata dal numero dei fonti cronologici. Il Desvignoles (1) ebbe già per sospetta l'antichità di detta cronaca, non citata da verun autore, trattone il Sincello, ma non cercò di scoprire il vero con più attenta disamina, e dopo lui continuarono a farne uso gli eruditi, secondo che calzasse al proposito di ciascuno. Solo il Letronne, ma senza entrare in veruna discussione atta a capacitar i lettori, la disse opera di ignoto autore ebreo o cristiano, posteriore al geografo Tolomeo, composta con intendimento di far quadrare il cominciamento dei regni egizii colla cronologia della Bibbia (2). Ed in fatti seorgesi chiaramente un tale scopo, se si consideri, che quantunque sia assegnato lo spazio immenso di 36525 anni all'intera somma delle dinastie divine ed umane, tuttavia, togliendone la durata dei regni favolosi (dei quali non aveano a darsi briga i cronologi biblici) che si compone di 34,201 (3) anni, rimangono pei regni umani soltanto 2324 anni, a comprendere i quali è più che sufficiente l'intervallo dato dalla versione biblica dei settanta, tra l'epoca del diluvio e le conquiste d'Alessandro, prima delle quali cessano le dinastie egizie. È poi notevole, che la riduzione delle dinastie e dei regni umani in questo frammento cronografico, cade soltanto sulle prime quindici dinastie del vero Manetone, che qui sono rappresentate da quindici generazioni dette del ciclo canicolare, e contenute nello spazio di 443 anni. Quanto alla dinastia XVI ed alle susseguenti l'autore seguita ben sovente Eusebio, quantunque senza veruno scrupolo muti ad alcune i nomi. Così anche il falso Manetone restrinse a soli venticinque il numero dei re anteriori all'invasione dei pastori, seguitando pei tempi posteriori i catalogi ora d'Africano ed ora d'Eusebio; argomento manifesto, che il vero Manetone servì di fondamento ad amendue quegli spurii documenti. Ed apparisce ancora, perchè su quelle prime dinastie operassero così arbitraria riduzione, e lasciassero intatte le susseguenti; perocchè gli scrittori ecclesiastici, e tra questi i due più insigni, Africano ed Eusebio, a

(1) *Chronologie de l'Histoire Sainte*, T. II. pag. 659; Berlin, 1798.

(2) Biot, *Recherches*, loc. cit.

(3) Syncell. pag. 51.

cominciare dall'invasione de' Pastori, ovvero dalla nascita di Abramo, aveano continuamente fatto uso delle dinastie Manetoniane nelle liste parallele della cronologia sacra e profana, laddove aveano bensì accennate, ma non adoperate nel loro computo biblico le dinastie anteriori (1).

XIII. Gli eruditi che inutilmente si affaticarono per determinare il sito della terra *Seriadica*, dove il falso Mancone asserisce che fossero poste le colonne scritte con sacri caratteri avanti il diluvio, non furono più avventurati, come ben s'intende, nel cercare un fondamento storico alla divisione che la *vecchia* cronaca riferisce dei regni Auriti, Mestrei ed Egizii (2). Quanto a me porto opinione, che queste tre denominazioni lungi dall'indicare una successione di gente diverse nel possesso dell'Egitto, sono un frivolo trovato dell'autore di detta cronaca, fondato unicamente sulla diversità dei nomi dati in diversi tempi e da diversi popoli alla terra d'Egitto (3); nè potrà menomamente dubitarne, chiunque osservi, che l'Egitto è chiamata terra di Mistrain o Mestrain dagli scrittori ebrei in ogni età (4); che Egitto è nome usato soltanto dai Greci, appresso i quali, in tempi antichi troviamo la terra del Nilo chiamata anche Aeria (5) con significato forse identico a quello d'Egitto, certamente analogo alla voce *Kmt* con cui gli Egizii chiamavano il proprio paese (6). Quindi non fu difficile derivare le appellazioni di Auriti, Mestrei, ed Egizii (7).

XIV. Sperimentato per ripetute prove il difetto di critica del Sincello

(1) Vedi la Seconda Parte d'Ensebio ossia il Canone. Chron. Gr.-Ar.-Lat., vol. II. pag. 63.

(2) Syncell. pag. 51. Vedi il Goar nelle sue annotazioni al Sincello, pag. 16; Pezron, L'antiquité des temps, ch. XIII; Perizonii, Origines Aegypt. 26 et seqq.; Fourment, Réflexions sur les anciens Peuples, T. II, pag. 101 e segg. ecc.

(3) V. Champollion, L'Égypte sous les Pharaons, T. I, ch. 2.

(4) Joseph. Flav., Antiq. Jud. I. I. 6.

(5) Aeschyl., Supl. v. 71, Apollon. Rhod. Argon. IV, v. 267.

(6) V. Peyron Lex. Copt. pag. 66.

(7) Fa maraviglia come il signor Lenormant, al quale non dovrebbero essere ignote le opinioni pubblicate dal Letronne, in un libro stampato nel 1838, Introduction à l'histoire de l'Asie occidentale, pag. 233, ereda sulla sola autorità della *Vecchia cronaca riferita dal Sincello*, che gli Egizii portassero il nome di Mestrei prima che prendessero quello di Chemi. Nè si mostra più acuto in filologia, quando propone di derivare la voce di Mitsraim da *mt* egizio, che secondo lui sarebbe *figlio del Sole*; poichè pare che in lingua egizia *mt* indicasse la generazione dal canto di madre, e non paterna.

nell' usare dei documenti cronologici, niuno si maraviglierà, che dal novero degli autentici, insieme col falso Manetone e colla *vecchia cronaca*, venga eziandio escluso, per questo mio ragionamento, il preteso catalogo d'Eratostene (1), che in sommo pregio fu avuto dal Marsamo e dai suoi segnaci, non per altra ragione, se non perchè parve somministrare una valida prova all'abbracciato sistema di contemporaneità, e supplire, nell'erronea loro opinione, alle liste di Manetone, quasi in queste fossero state dimenticate le prime dinastie Tebane (2). Qui dell'accennato catalogo non abbiamo altro mallevadore se non il Sincello; nissun autore nè contemporaneo, nè più antico di lui avendo mai mentovato Eratostene per iscrittore di storia egizia. Ma all'argomento negativo, che nel caso nostro è pure di qualche momento, ed al difetto d'autorità del Sincello, aggiungonsi indizii così gravi contro alla verità del fatto, che non fa mestieri di veruna sottigliezza critica, per riconoscere affatto privo d'ogni carattere d'autenticità il detto documento. Primieramente è contra ogni verosimile, che Tolomeo Evergete abbia commesso ad un greco, quantunque dottissimo, la cura di frugare negli archivii egizii le vecchie memorie, delle quali non potea intendere nè la scrittura, nè la lingua; per ricavarne un catalogo di nomi reali e tradurli in lingua greca, come sulla fede d'un oscuro Apollodoro credette il Sincello (3). Se la storia egizia era già stata fatta da Manetone sotto Filadelfo, era inutile chiederla di nuovo, e ridicolo chiederla ad un greco nel regno seguente; se poi il racconto su Manetone, come già vedemmo, è falso, tanto più per tale dovrà aversi quello d'Apollodoro sopra Eratostene. Di più, come osservò rettamente il signor Lenormant (4), questo detto catalogo di re Tebani altro non è che una serie interrotta di re tolti qua e là dalle diverse dinastie di Manetone, forse fatto ad unico fine di accorciare i tempi da Mene ai Pastori, siccome fece l'autore della vecchia cronaca e del falso Manetone; perocchè il suo compilatore si manifesta per cristiano o ebreo, computando il corso dei regni dagli anni della creazione (5).

(1) Syncell. pag. 91.

(2) Marshami Can. pag. 3.

(3) Loc. cit.

(4) Sur le cerneil de Mycerinus pag. 32. 33.

(5) Syncell. loc. cit.

XV. Dalle cose discorse, risulta, che degli scritti sin qui esaminati, i soli avanzi di Manetone tramandatici da Giuseppe Flavio, dall'Africano e da Eusebio, debbono averi per fonti autentici, e che però tra le cagioni le quali finora impedirono gli eruditi nella trattazione della cronologia egizia, non ultima è da riputare la fallace copia dei documenti somministrati dal Sinecello. Esamineremo nel seguente discorso l'autorità di quelli che riconosciamo per autentici, onde giudicare fin dove col loro presidio ci sia lecito di inoltrarci nella illustrazione del proposto argomento.

DISCORSO II.

DELL'AUTORITÀ DEGLI SCRITTI MANETONIANI
E DEGLI ALTRI FONTI DI CRONOLOGIA EGIZIA.

I. Esclusi dal novero dei fonti di cronologia egizia gli scritti, che furono chiariti apocrifi nel precedente discorso, cadono per difetto di fondamento i sistemi sopra quelli in tutto od in gran parte edificati dai cronologi, e cadono pure le opposizioni contro ai legittimi avanzi della storia Manetoniana, che dai medesimi si derivavano tanto per impugnarne l'autenticità, quanto per indebolirne l'autorità. Se non che parrà forse a molti più danneggiata che non giovata la causa di Manetone, per averlo io spogliato dei titoli di gran sacerdote, di scriba dei templi egizii, e di regio storiografo, per mezzo dei quali le sue istorie vennero raccomandate dallo Scaligero e da quanti dopo questo ne fecero uso per la cronologia. Ma con ragioni assai più valevoli dei titoli menzogneri, io confido di poter mostrare, che gli scritti di Manetone purgati secondo le norme della critica correttiva, dagli errori degli abbreviatori e dei copisti, sono tuttavia primario ed autorevolissimo presidio alla trattazione cronologica. Nè troppo difficile io reputo questo assunto, purchè mi sia concesso d'invocare a favore di Manetone, gli stessi canoni di critica, i quali servono a stabilire l'autorità degli altri scrittori di storie non contemporanee, nè si voglia usare verso la nazione Egizia critica più severa, che non si suole verso la Greca, la Romana o la Cinese.

II. Due maniere d'argomenti sono ammessi dai critici, per provare l'autorità di qualsiasi storico documento; gli uni estrinseci, fondati unicamente sulla fama di veracità e dottrina di cui godè l'autore appresso i contemporanei od i prossimiori dell'età in cui visse; intrinseci gli altri, cioè ricavati dalla natura stessa del documento in questione. Cominciamo dai primi: Manetone fiorì certamente sotto la dinastia dei Lagidi, sebbene è incerto sotto quale dei Tolomei; nissuno scrittore più antico di Giuseppe Flavio citollo esplicitamente; ma la testimonianza di questo, e la natura del libro in cui ne invoca l'autorità, fanno palese

che il nome dello storico egizio suonava chiaro appresso gli eruditi Alessandrini di quella età. Dall'Egitto passò la sua fama nella Grecia, e vi si sparse nei primi secoli del cristianesimo, donde avvenne poi, che ignoranti ed impudenti falsarii fregarono col nome di Manetone parecchie scritture, a fine di renderle più pregevoli. Dal che apparisce, che se la celebrità d'un autore vale a conciliar credito alle sue opere, questa non mancò a Manetone; epperò i suoi scritti debbono venire accolti colla stessa favorevole preoccupazione, con che vengono quelli di altro qualsiasi autore antico di fama non volgare, tranne che motivi intrinseci non ci persuadano del contrario.

III. La stessa fortuna che a Manetone invidiò l'onore d'una biografia che ne trasmettesse più diffuse e particolari notizie ai secoli avvenire, vietò pure, che delle storie da lui composte altro a noi pervenisse, eccetto pochi frammenti, ed aridi sunti di successioni di regni e di nomi reali, donde è difficilissimo, per non dire impossibile, giudicare sì dei pregi e sì dei difetti di quelle, nella primiera loro condizione ed integrità. Ciò nulla meno gli squarci conservati da Giuseppe Flavio, bastano a parer mio per dimostrare, che Manetone comprendeva essere uffizio primario dello storico bandire dai suoi libri non solo la simulazione, ma eziandio la dissimulazione. Imperocchè da sincero affetto alla verità, e non da altra cagione egli fu mosso a raccontare e la terribile irruzione operata dai Pastori contro all'Egitto, regnando Timao, e la somma facilità con che vi stabilirono tirannica dominazione, e la durata di questa oltre a cinquecento anni, e le lunghe guerre intraprese contro agli stranieri dominatori dai re della Tchaide collegatisi con quelli, che in altre parti d'Egitto aveano qualche signoria, e l'inutilità dei conati di Totmosi per isnidarli dalla fortificata Avari, donde in fine si partirono salve le persone e gli averi loro, in virtù dei patti stipulati col re tebano. Di tutte le quali cose Manetone avrebbe taciuto, se non avesse preferito la verità alla gloria nazionale; e questo solo tratto avrebbe pur dovuto rendere più circospetti que' moderni critici, i quali non dubitano di malmenare e screditare qual menzognero e millantatore costui storico, senza che possano menomamente convalidare sì grave accusa con positivi argomenti.

IV. Venendo ora a quel che più importa al presente soggetto, vale a dire ai sunti cronologici di Manetone, dopo averne fatto diligente dissamina, e di averli paragonati cogli altri fonti di cronologia egizia, mi

pare di aver prove sufficienti a sostenere, 1.° che sì lunga serie di regni in quelli contenuta, non fu altrimenti immaginata nè in tutto, nè in parte da Manetone, siccome giudicò il Pètavio, e molti continuano ad asseverarlo anche addì nostri (1); 2.° che esso non ebbe alcuna intenzione di esagerare nella sua opera l'antichità storica di sua nazione; 3.° che il sistema cronologico da lui ammesso era consentaneo alle memorie sacerdotali conservate negli archivi, donde egli professa di avere desunti i materiali delle sue storie; 4.° che siffatte memorie sacerdotali risalivano a tempi anteriori al conquisto d'Egitto fatto per Cambise.

V. Per dimostrare che molto tempo innanzi che Manetone scrivesse la sua storia, i sacerdoti egizii aveano registri, nei quali erano contenute le successioni dei regni, basta la testimonianza d'Erodoto, che narra essergli stati letti i nomi di trecento trenta re succeduti a Mene, l'ultimo de' quali è detto Meri autore del lago omonimo (2), ed anteriore a Sesostri. I critici moderni convengono generalmente che Erodoto è narratore fedele delle cose da sè udite o vedute; non è dunque da rievocare in dubbio la realtà del catalogo, dal quale asserisce essergli stati recitati i nomi dei suddetti re per bocca dei sacerdoti. Che se taluno pur volesse un' autorità superiore a quella dello storico greco, a costui citerei un papiro geratico del Museo Torinese già noto agli eruditi nell' egiziana archeologia, e pubblicato dal dottore Lepsius pochi mesi prima che egli intraprendesse il suo viaggio d'Egitto (3). Il qual papiro sebbene presentemente è ridotto a moltissimi e minuti frantumi, mostra tuttavia di essere stato un vero catalogo cronologico, e di aver contenuto più d'un centinaio di re coll' indicazione degli anni, dei mesi e per fino dei giorni regnati da ciascuno, incominciando dai regni favolosi degli Dei, e ponendo Mene in cima alle dinastie umane siccome fece Manetone, Diodoro Siculo, e prima di questi Erodoto stesso, secondo le narrazioni dei sacerdoti.

VI. Coloro che sospettano la sincerità di Manetone, non possono altrimenti avvalorare il loro sospetto, se non congetturando che sia stato precipuo scopo di quello storico, far vedere ai Greci per via di una

(1) Petav. de Doctr. Temp. l. 10, c. 17.

(2) Herod. l. 2, § 100.

(3) Io ignoro che questo lavoro sia stato messo in commercio librario, ma ne posseggio io stesso un certo numero d'esemplari vendutimi dall'Autore.

lunghissima serie di re, che la nazione egizia portava sopra tutte le altre il vanto d'una remotissima antichità (1). Ma tal congettura è affatto priva di fondamento, è una mera ipotesi, distrutta da veri fatti, e dall'esame stesso delle liste manetoniane; perocchè dei greci scrittori anche i meno facili a prestar fede alle tradizioni popolari, non dubitavano di reputare antichissima non solo la nazione, ma anche la civiltà egizia, siccome per tutti dee valere la sentenza d'Aristotele (2). La stessa serie poi dei regni egizii appresso Manetone, ben considerata, ci persuade, che questi, non che voler esagerare la durata dei tempi storici di sua nazione, la ristrinse per opposto entro a confini più angusti che non avesse fatto alcun altro scrittore più antico. Dissi la durata *storica*, per distinguere, come è ben necessario, tra tempi storici, e mitici o favolosi. Non è mestieri di recondita erudizione per sapere, che tutti i popoli del gentilesimo usarono di riempire le prime pagine dei proprii fasti con favolosi racconti e millenii immaginari, volendo ad ogni modo supplire all'ignoranza in cui erano circa le prime e vere origini del mondo e dell'umana specie. Questo primo periodo nella storia di Manetone, del pari che in quelle di Diodoro, e di Erodoto, e nel papiro del nostro Museo poc'anzi citato, per gli Egizii venne rappresentato dai regni degli Dei, e Semidei od Eroi o Mani. Ma sarebbe troppo severo ed ingiusto critico chiunque dalla manifesta falsità di que' regni divini e semidivini arguisse Manetone indegno di fede anche intorno ai tempi storici. La durata di questi dal regno di Mene sino al conquisto di Cambise seguito 525 anni avanti l'era volgare, che secondo il computo d'Erodoto sarebbe stata di circa 11,500 anni, si ricava dai catalogi di Manetone di 5000 anni, pochi secoli più o meno, siccome dimostreremo nel seguente discorso. Ove poi si ponga mente, che la somma dei re indicati dagli stessi catalogi ascende a più di 450 cesserà qualunque sospetto, che Manetone possa avere a sua fantasia moltiplicati i regni egizii, per rendere verisimile lo spazio da lui assegnato alle dinastie umane; imperocchè se egli non avesse preferito di attenersi alle memorie sacerdotali conservate negli archivii dei templi, avrebbe potuto senza taccia di esageratore dare alla monarchia egizia una durata di

(1) Pelavias loc. cit.

(2) Aristot. Politic. VII. § 19

quindici mila anni. Nè qui alcuno mi opponga, che alle alterazioni operate dall'Africano e da Eusebio sopra le liste manetoniane, debbasi attribuire così grave sproporzione, quale apparisce tra la somma dei regni e quella degli anni trascorsi da Mene a Cambise. Perchè i due lodati cronologi lasciarono che l'antichità egizia si allargasse liberamente oltre ai confini del sistema di cronologia biblica da loro abbracciato; il che non avrebbero fatto, se si fossero proposto di ridur quella a concordia con questa, siccome fecero per la parte storica tanto il *falso* Manetone, quanto l'autore della *vecchia cronaca*. V'ha di più; e possiamo affermare, che anche prima del cristianesimo era opinione consentita dagli Egizii periti della storia patria, che da Mene alla dinastia dei Lagidi fosse un intervallo approssimativo di cinquemila anni.

VII. Questa mia asserzione è fondata sopra due passi distinti di Diodoro Siculo, che servono uno all'altro di mutua illustrazione, e nella spiegazione dei quali finora incepparono i filologi per non averne fatto diligente confronto. Nel primo (1) lo storico dopo di aver detto, che da principio, secondo i mitici racconti, aveano tenuto l'imperio d'Egitto Dei ed Eroi poco meno di anni diciotto mila, soggiunge, gli uomini avere regnato sulla contrada medesima, da *Meride* o *Miride* anni poco meno di cinque mila sino all'olimpiade 180.^a nella quale esso visitò l'Egitto, regnando Tolomeo Neo-Dioniso. Dove è evidente la corruzione del testo circa il nome di Meride o Miride, in luogo del quale la critica correttiva richiede assolutamente che si legga Mene o Mena, che secondo Diodoro stesso, e Manetone ed Erodoto e Giuseppe Flavio, primo de' mortali tenne regno dopo degli Dei e Semidei. Il Vesselingio nella sua edizione di Diodoro appose una lunga nota a questo luogo, che parve a lui ed ai precedenti critici corrotto; ma avendo ricevuto nel testo la lezione ἀπὸ μυριάδων e trovando in alcuni codici manoscritti ἀπὸ Μοίριδων o Μύριδων, sentì la gravità della difficoltà senza osare di portarvi sicuro rimedio; e però infine si contentò di proporre due diversi modi di correzione, il secondo dei quali è appunto quello, che io giudico certissimo (2). Infatti qui Diodoro accennando sommariamente alla durata dei regni divini ed eroici, di poi a quella degli uomini, dei quali primo

(1) Biblioth. I. I. § XLIV.

(2) Vide Annot. ad I. I.

era stato Mene (1), sarebbe assurdità che avesse scritto Meride, il quale non visse che moltissime generazioni appresso a Mene. Nè meno assurda è la lezione ritenuta dal testo Vesselingiano, ἀπὸ μυριάδος ἔτι βραχὺ λείποντα τῶν πεντακισχιλίων, tradotta nella versione latina *per quindecim fere millia annorum*, imperocchè il termine finale μέχρι τῆς ἑκατοστῆς καὶ ὀγδοηκοστῆς ὀλυμπιάδος suppone un termine iniziale ἀπὸ, che indichi il principio dello spazio ivi espresso. Oltrecchè siffatta lezione è in opposizione manifesta al secondo passo dello stesso autore, sul quale io dissi di sopra, essere fondata la mia asserzione. Nello stesso libro al § LXIX Diodoro riferisce, che gli Egizii adducevano in prova della loro eccellenza nelle lettere, negli studi astronomici, nelle arti e nella legislazione, τὸ τῆς Αἰγύπτου πλείω τῶν ἑπτακοσίων καὶ τετρακισχιλίων ἐτῶν βασιλευσσαι τοὺς ἑγγενεῖς; cioè che l'Egitto per più di quattromila e settecento anni fosse stato governato da re indigeni. Il senso del testo è chiarissimo per chiunque non abbia la mente preoccupata; tuttavia al Vesselingio e ad altri eruditi parve che restringesse di troppo l'intervallo dei regni umani, e che contraddicesse alle cose contenute nel primo passo già da noi esaminato; e però siccome allora erasi tradotto *quindici mila anni all'incirca*, così nel secondo passo con audacia incredibile, i quattromila e settecento anni furono nella traduzione latina mutati in quattro mila e settecento re! Esempio manifesto del gravissimo danno che agli studii storici e filologici recano sovente le opinioni sistematiche. Quanto a noi, ammaestrati dagli altrui errori, e sgombri di qualsiasi preoccupazione, troviamo in perfetta concordanza i due addotti passi, non soggetto a veruna controversia il senso dei medesimi, e però crediamo dimostrato che l'opinione sull'antichità della nazione egizia, non solo appresso Manetone, ma anche appresso gli Egizii più assennati, al tempo dei Lagidi, era ben lontana da quella esagerazione di cui comunemente viene incolpata.

VIII. Per le esposte considerazioni io credo essermi appianata la via a stabilire, che Manetone non mentì, quando professò di scrivere secondo che trovava registrato nelle memorie sacerdotali (2). Infatti se non ebbe alcun motivo di ingannare i suoi lettori sul numero dei re; se per op-

(1) Ibid. § XLV.

(2) Apud Flay contra Ap. l. 1. § XIV.

posto parecchie dinastie di questi furono da lui comprese entro spazi di tempo sproporzionatamente minori del corso ordinario dei regni (1), forza è convenire, che dagli annali composti in età anteriore, e da lui consultati, egli fosse indotto a così limitare quegli spazi, dei quali noi duriamo fatica a renderci capaci, perchè nella presente condizione degli scritti Manetoniani, non troviamo alcuna verisimile spiegazione di quei vetustissimi eventi. Ma della nostra ignoranza non dobbiamo dar carico all'autore di quegli scritti, molto meno poi accusarlo di menzognero o d'impostore, quando nella massima parte degli avanzi a noi pervenuti, vediamo la notazione dei tempi procedere secondo il corso ordinario della vita umana.

IX. Che poi veramente i sacerdoti egizii dell'età posteriore all'invasione di Cambise, conservassero annali o memorie storiche delle età anteriori, è fatto chiaro per moltiplice testimonianza degli scrittori greci, e di Giuseppe Flavio, alla quale nissun valido argomento possono opporre coloro che sostengono contraria sentenza. Toccammo già sopra del catalogo dei regni mostrato ad Erodoto dai sacerdoti, dai quali egli ricavò pure, che sino da tempi antichissimi erano usi gli Egizii di notare accuratamente i tempi, e scrivere gli anni (2). Il Timco di Platone, quantunque ne' suoi racconti abbia più del poetico, che non dello storico, tuttavia siccome nè anco le finzioni poetiche sogliono mancare di qualche fondamento veritiero, può servire ad avvalorare il mio assunto, dove introduce uno degli anziani sacerdoti di Sai a conversare con Solone, intorno al primato degli Egizii nella scienza storica dei tempi antichissimi, e gli pone in bocca tra molte altre le seguenti parole: « Qui (appresso gli Egizii) si conservano memorie di cose antichissime Tutte le cose avvenute appresso noi, od anche in altri luoghi, solo che ai nostri ne pervenisse per udienza la notizia, sono registrate da tempi antichi e conservate nei nostri templi . . . dall'ordinamento di questa nostra città, nelle sacre lettere sono computati ottomila anni ... » (3). Nelle quali può bensì il lettore assennato ravvisare la iattanza dei sacerdoti egizii, nell'amplificare oltre misura la loro storica erudizione,

(1) P. es. la dinastia XI di 16 re entro lo spazio di soli 43 anni: la XIII di 60 re per 184, o 453 anni; la XIV di 76 re per 184 o 484 anni ecc.

(2) L. 2. § CXLV.

(3) Tim. § V. e VI.

ma dee pure ad un tempo riconoscere, che il filosofo Ateniese non avrebbe dato luogo a questa finzione, se non fosse stata resa verisimile dalla fama allora vigente sull'antichità degli annali egizii. Diodoro Siculo in più luoghi accenna all'esistenza di sì fatti annali col nome di *ἑταγραφαί*; ma due meritano di essere specialmente notati, uno in cui egli dichiara di passare sotto silenzio i paradossi e le favole raccontate a preferenza del vero, da Erodoto e da altri scrittori delle cose egizie, e di volere invece esporre quelle contenute nei commentarii de' sacerdoti da lui con istudio esaminate (1); e l'altro dove narra, essere stato uso nei tempi antichi, che in ciascun giorno ad ora determinata, il ierogrammate leggesse al re *nei libri sacri* alcuni consigli e fatti di uomini chiarissimi, utili ad essere rammentati (2). Si può ancora aggiungere quello, in cui esso, parlando dei sepolcri dei primi re, afferma sull'autorità dei sacerdoti, che negli annali sacri ne erano enumerati quarantasette, dei quali soltanto diciassette erano rimasti al tempo del primo Tolomeo; e queste cose non essere raccontate solamente dai sacerdoti sulla fede dei *commentarii*, ma eziandio da molti greci che recatisi in Egitto nell'età del detto Tolomeo, ne avevano scritto la storia (3). Dell'antichità poi e del contenuto dei detti annali ci avverte altrove Diodoro, che i sacerdoti avevano *anagrafe* nei libri sacri trasmesse dai tempi antichi per tradizione continuata, contenenti la natura, la statura e le geste di tutti i re (4). Finalmente Giuseppe Flavio è anche testimonio autorevole dell'opinione corrente ai suoi tempi, intorno all'esistenza di annali egizii di remota antichità, quando non potendo citar questi, attesa la natura della lingua in cui erano scritti, ricorre in loro vece alle storie di Manetone dai medesimi ricavate (5).

X. Pertanto rimane provato, che nei tempi succeduti all'invasione di Cambise i sacerdoti egizii possedeano annali nazionali stati scritti innanzi che l'Egitto cadesse sotto il dominio degli stranieri. Vero è, che que' medesimi sacerdoti che se ne vantavano possessori, specialmente

(1) L. I. § LXIX.

(2) Ibid. § LXX.

(3) Ibid. § XLVI. Il Museo Torinese possiede un papiro geratico antichissimo, nel quale vedesi disegnata la piaola del sepolcro di un re dei più insigni della XVIII o XIX dinastia, del sepolcro stesso che fu scoperto dal Belzoni.

(4) § XLIV.

(5) Contra Ap. I. I. § 14.

appresso Erodoto, appariscono poi grossamente ignoranti della patria storia, e più somiglianti ai moderni *ciceroni* delle chiese e dei musei, che non ad eruditi archeologi o filologi; ma come appunto le inerudite ciance di questi non nucono alla fama dei preziosi cimelii conservati negli edifizii affidati alla loro custodia, così l'esistenza degli annali egizii, della quale abbiano sì gravi e positive testimonianze, non dee essere rievocata in dubbio per ciò solo, che non fossero ben conosciuti o profondamente studiati dai neocori egizii, coi quali conversarono i greci scrittori, che sì scarse ed incerte notizie ci trasmisero intorno alla storia degli antichi Faraoni. La nazione egizia, che a tutte le altre del gentilesimo potea contendere il primato, per antichità non solo di politica esistenza, ma eziandio di progredita civiltà, ed appresso la quale l'uso della scrittura comparisce già vecchio nei più vetusti monumenti, non sarà forse creduta degna di fede sopra un fatto, sul quale si ammette per buona la testimonianza di qualsivoglia altro popolo? Si ammette sulla testimonianza dei Cinesi l'antichità e l'autenticità degli annali abbreviati da Confucio vissuto nel sesto secolo avanti l'era volgare, e si rigetterà, perchè in causa propria, quella dei sacerdoti egizii, quando ad avvalorarla concorrono monumenti d'ogni maniera o tuttora sussistenti nel suolo d'Egitto e della Nubia, o dissotterrati dalle tombe, ed esposti alla vista dei dotti e degli indotti nei musei d'Europa?

XI. Alcuni, ai quali non talenta l'autorità degli avanzi Manetoniani, alla quale dovrebbero pure dar qualche peso, ove ammettessero come noi, che il loro autore attinse ad antiche memorie nazionali, senza che osino negare apertamente che gli Egizii abbiano avuto annali autentici durante la potenza dei Faraoni, credono eluderne le conseguenze, affermando che questi perirono irreparabilmente, nella terribile catastrofe che sparse la monarchia e la nazionale indipendenza (1). Ma nissuno degli antichi scrittori attestò questo fatto, ed il contrario è provato dagli argomenti che noi sopra adducemmo, ed ai quali per maggiormente persuadere i nostri lettori, reputiamo conveniente aggiungerne uno che ci è somministrato da Diodoro. Questo scrittore, che più d'ogni altro, da Manetone in fuori, serve alla storia ed alla cronologia egizia,

(1) Les Dynasties Égyptiennes suivant Manéthon, considérées en elles-mêmes, et sous le rapport de la chronologie et de l'histoire, par M. de Bovet ancien archevêque de Toulouse, première partie, art. 5.

narra che Artaserse Oco avendo sottomesso l'Egitto nella CVII olimpiade, distrutte le mura delle più insigni città, spogliati i templi delle loro ricchezze, ne portò via le scritture (*ἀναγραφάς*), le quali più tardi Bagoa rendette ai sacerdoti egizii, pagatogliene il riscatto con una forte somma di danaro (1). Dunque non erano perite nè per l'invasione di Cambise, nè per verun'altra catastrofe anteriore; e se furono riscattate a gran prezzo, è questa un'evidente prova della grande loro importanza.

XII. Tornando ora al nostro soggetto, cioè all'autorità di Manetone, noi ci crediamo in diritto di chiedere, che questa non venga riputata inferiore a quella di verun altro scrittore del paganesimo, intorno ai fatti ricavati da memorie antiche della propria nazione. E siccome l'infallibilità è privilegio concesso unicamente agli storici da Dio ispirati, così noi riproviamo del pari e coloro che stimassero inconcusso il sistema cronologico di Manetone, e coloro che sopra semplici congetture o deboli argomenti, come il Marsano e la più parte dei cronologi dopo a lui, si arrogassero di scomporre le varie parti, per ricomporle poi e riordinarle a seconda delle particolari loro opinioni. Oltre agli avanzi degli scritti Manetoniani possono utilmente essere adoprate a queste cronologiche ricerche quelli di Erodoto e di Diodoro, i quali, se nella loro qualità di stranieri all'Egitto, generalmente parlando, debbono cedere a Manetone egizio di nazione, e storico speciale di questa, il quale potè frugare negli archivi dei templi, e leggere co' suoi propri occhi le iscrizioni dei monumenti, ciò nulla meno in alcuni casi particolari i due primi poterono essere meglio informati della verità, siccome faremo vedere a suo luogo. Anche i libri sacri degli Ebrei contengono alcune preziose notizie di storia e di cronologia egizia, dagli ultimi anni di Salomone sino ai re della XXVI dinastia, le quali da una parte confermano la veracità di Manetone, mentre dall'altra ci porgono sicure norme per correggere parecchie erronee notazioni circa gli anni dei regni particolari, delle quali più che a Manetone vuolsi dar carico ai suoi abbreviatori o copisti.

XIII. La menzione dei libri sacri degli Ebrei considerati qual fonte di cronologia egizia, mi conduce a toccar qui brevemente di una questione, la quale per non essere stata considerata sotto il suo vero a-

(1) Bibl. Hist. I. XVI. § LI

spetto, recò grave confusione, anzichè aiuto al soggetto delle presenti mie investigazioni. Molti cronologi credendo senza legittime prove, che il Mene rammentato nelle memorie egizie fosse uno stesso personaggio col Mestraino della Bibbia, senza altrimenti considerare le ragioni della storia egizia, cercarono di rinchiudere la serie dei Faraoni dentro allo spazio più o men largo comportato dal particolare sistema di cronologia biblica seguito da ciascuno di essi, e per tal modo si credettero lecito di metter fuori di serie tale o tal'altra delle dinastie Manetoniane, in proporzione della maggiore o minore lunghezza dello spazio predeterminato. Il qual processo a me sembra in tutto contrario alle norme della buona critica, e più riprovevole di quello, che negando a Manetone ogni autorità, dichiarasse incerti ed indefinibili i tempi egizii precedenti al regno di Psammetico. La Bibbia è certamente siccome il più venerando, così il più autorevole fonte di storia, ma in tanta varietà di sistemi cronologici, che tutti si spacciano dai loro autori per fondati nelle indicazioni de' tempi ricavate dalla Bibbia; nella differenza notevolissima di coteste indicazioni tra l'Ebraico ed il Samaritano testo, e la versione greca, e tra i libri del Vecchio e del Nuovo Testamento; finalmente nell'indecisione, in cui la Chiesa lasciò sempre siffatta controversia, io non vedo alcuna certa misura, a cui abbiasi a ragguagliare la durata della nazione Egizia, salvo che questa non venga determinata da un accurato esame di tutti i suoi fonti storici. E però a questi unicamente attenendomi, tanto mi addentrerò nell'antichità dei tempi, quanto nel consentirò il risultato d'imparziali ricerche.

XIV. Di quanti monumenti finora vennero trovati in Egitto ed esaminati dagli archeologi, se si eccettuino i registri geratici notati coll'anno del regno di tale o tal altro Faraone, e qualche stele funeraria con indicazione del regno sotto il quale fu dedicata, un solo può dirsi veramente cronologico, ed è il papiro del Museo Torinese più sopra da noi citato, il quale fu composto dall'ignoto suo autore con intendimento di esporre in esso la serie dei regni sì mitici e sì storici. Gran danno a questi studi, che così poca sollecitudine abbiano preso, di mandarcelo nel suo primiero stato dall'Egitto, coloro ai quali toccò di provvedere alla conservazione degli oggetti componenti l'insigne collezione del cavaliere Drovetti, nel lungo viaggio dalle rive del Nilo sino a questa capitale. Ma a chiunque debba darsi carico del guasto recato al nostro papiro, omai è inutile ogni querela, come di poca utilità per la que-

stione cronologica, e per la successione de' Faraoni, sono i miseri frammenti, che con pazienza tedesca si studiò di ricomporre nel modo che a lui parve migliore, il professore Seyffart, che tratto dalla fanna di detta collezione, venne a visitarla e studiarla fra noi, nei primi anni che la possedevamo. I nomi reali che ancora vi si possono leggere, tutti appartengono ai tempi anteriori alla dinastia decima ottava, e vi si possono riconoscere alcuni, che furono rappresentati nella tavola d'Abido, e nella cameretta di Karnac. Ondechè non è vana congettura giudicarlo un registro delle più antiche dinastie, e non dissimile da quello donde i sacerdoti egizii recitarono ad Erodoto i nomi dei 330 re anteriori a Sesostri. Ciascun nome è preceduto dal ramoscello e dall'ape, i quali due simboli nelle iscrizioni monumentali sogliono essere sovrapposti al primo cartello dei Faraoni, cui lo Champollion chiamò *prenome*. I due simboli poi secondo le sottili osservazioni del dottore Lepsius, accennavano alla signoria sull'alto e basso paese (1). È impossibile definire l'età in cui fu scritto questo rarissimo, anzi unico registro; ma paragonata la scrittura a quella di altri papiri di certa data, pare che non debba essere posteriore alla XVIII o XIX dinastia; ed è ragionevole il supporre, che in quel fiorente periodo succeduto alla lunga dominazione dei Pastori, gli Egizii abbiano rivolto lo studio a raccogliere le sparse memorie delle precedenti età, e sulla fede dei monumenti avanzati alla ferocia devastatrice di quei conquistatori, abbiano ricomposti i vetusti annali. Non si dee tuttavia dissimulare, che il detto papiro non mostrando verun carattere di documento fatto per pubblica autorità, non merita altra fede, che quella dovuta ad uno scritto privato ed anonimo; e che perciò qualora noi avessimo gravi argomenti desunti da monumenti pubblici, o da altro autorevole fonte, per negare ai tempi anteriori alla XVIII dinastia un sì gran numero di Faraoni aventi esercitato dominio sopra tutto quanto l'Egitto, sarebbe di poco peso la contraria testimonianza del succennato documento.

XV. Dissi, che ad eccezione di questo, non furono finora trovati monumenti contenenti una serie veramente cronologica di Faraoni, quantunque non ignori, che tanto i due Champollion, quanto il Rosellini abbiano per tale considerata la celebre tavola di Abido, designata so-

(1) Annales de l'Inst. archéol. 1838, cah. I., pag. 113.

vente nei loro scritti quando per genealogica, e quando per cronologica. Imperocchè chiunque voglia per poco considerare la natura di questo monumento, dovrà giudicarlo più religioso che storico, e mancante dei caratteri necessari a qualsiasi documento di cronologia. Difatto nessuna indicazione di anni vi è espressa, la quale non sarebbe mancata, se cronologico ne fosse stato lo scopo. Nè a questa si volle supplire per via delle generazioni, modo incertissimo di conoscere i tempi, e proprio soltanto delle età per le quali mancano documenti scritti: perocchè in essa tavola non havvi alcun indizio di successione genealogica prima della decimottava dinastia; anzi a breve distanza dai nomi dei primi re di questa compariscono alcuni, i quali debbono riferirsi alla dinastia duodecima, divisa dalla XVIII per lo spazio almeno di cinquecento anni, siccome dimostreremo a suo luogo. Nè dissimile da questa è la serie dei re rappresentati nella citata camera di Karnac; sono principi e nomi collocati uno a fianco dell'altro, che poterono essere per sì fatto modo rappresentati tanto nell' ipotesi che si fossero succeduti uno all'altro nel regno, quanto supponendo uno diviso dall'altro per lo spazio di molte generazioni, e quanto ancora, se per avventura uno avesse regnato sulla Tebaide sola, l'altro sulla Memfide e sull'Eptanomide. Ciò solo si può con certezza ricavare, che tutti i detti re riferiscansi a tempi anteriori alla dedica del monumento.

XVI. Ma se l'amor del vero ci costringe di correggere tratto tratto le asserzioni esagerate o poco fondate dei nostri predecessori in questi novelli studii, di buon grado poi ci accostiamo alla loro sentenza quanto all'importanza grande dei monumenti, ed ai presidii che questi ci forniscono per la questione della cronologia. Di fatto se col solo paragone degli scritti a noi tramandati dai Greci sull'Egitto, ci pare di poter fare non leggero fondamento alla cronologia, delle notizie di Manetone, queste poi paragonate ai fatti consegnati sopra gli antichi monumenti, ne ricevono tanto maggiore conferma, quanto che i monumenti non vanno soggetti alle alterazioni dei copisti, come i libri, ed essendo stati fatti ad ammaestramento dei soli Egizii, non possono venir sospettati di volontaria e meditata menzogna nello scopo d'ingannare gli stranieri (1).

(1) I due Champollion ed il Rosellini con intenzione di avvalorare l'autorità delle liste Manetoniane, cooperarono anzi a screditarla, secondo il mio giudizio, proclamando troppo leggermente una perfetta concordanza tra quelle ed i monumenti, quando in fatti questa non è avverata che

Sebbene volendo noi procedere in queste ricerche con metodo affatto imparziale e critico, anche la testimonianza dei monumenti nazionali e pubblici, siano di soggetto civile o religioso, di fatti contemporanei od anteriori, non dee essere ammessa per certa od autorevole, prima di averne diligentemente considerato la natura, e gli aggiunti de' luoghi, de' tempi e delle persone. Nè in tal materia è facile indicare una regola generale che possa applicarsi a tutti i casi particolari, diversificandosi questi per infinite maniere. Ondechè io differisco a trattare più specialmente dell'uso dei monumenti egizii nei seguenti discorsi, nei quali prendendo per base la serie delle dinastie Manetoniane, verrò mano mano paragonando con queste sì gli altri scrittori, e sì i monumenti che a ciascuna di esse avranno qualche attinenza.

per un numero ben ristretto di dinastie. Ma dimostrata con altri argomenti l'autorità degli avanzi Manetoniani, come io confido aver fatto, quando qua e colà ai regni da Manetone registrati si aggiunga la testimonianza o diretta o indiretta dei monumenti, ne verrà maggiormente confermata la veracità dello storico, la quale all'incontro potrebbe facilmente essere rievocata in dubbio, se come fecero i sullodati archeologi, non fosse fondata sopra altra prova che quella ricavata dai monumenti.

DISCORSO III.

SUL NUMERO APPROSSIMATIVO DEI RE EGIZII, SULLA DURATA DELLO SPAZIO
COMPRESO TRA IL REGNO DI MENE E QUELLO DI CAMBISE,
SULLA SUCCESSIONE DELLE DINASTIE MANETONIANE,
E SULLA DIVISIONE DEI REGNI EGIZII PER DINASTIE.

I. La cronologia egizia è fondata unicamente sopra la successione dei regni e la durata di ciascuno di essi, siccome apparisce dal consenso degli scrittori e dei monumenti. In fatti nè Erodoto, nè Diodoro, nè gli scritti genuini di Manetone additano altra via per le ricerche cronologiche; coloro poi fra gli eruditi moderni, i quali sostennero, che gli Egizii abbiano fatto uso di ere fisse o di grandi periodi astronomici, pei fasti religiosi e civili, dovettero ricorrere od agli scritti apocrifi di Manetone e della vecchia cronaca, o ad erronea interpretazione di alcuni passi di autori dei primi secoli del cristianesimo, siccome fu già dimostrato dal Biot (1). Coll'anno del regno di tale o tal altro re sono segnati i registri geratici, dei quali è grande dovizia nel Museo Torinese; gli anni di ciascun regno troviamo notati nel papiro cronologico dello stesso Museo; con simile annotazione incominciano le iscrizioni di parecchie steli appartenenti a diverse età, e siffatto uso antichissimo fu di poi continuato sotto i Persi ed i Lagidi, siccome è fatto manifesto da moltissimi papiri tanto demotici quanto greci. Imperò il quesito più rilevante della presente trattazione è di sapere, se noi possiamo per via d'una serie di regni non interrotta, risalire dal tempo ben noto, in cui l'Egitto cadde in potere di Cambise, sino all'età di quel Mene, cui e scrittori e monumenti posero in cima ai re mortali, e che segna il confine tra il periodo mitico e lo storico. La soluzione di siffatto que-

(1) Recherches sur plusieurs points de l'Astronomie Égyptienne. — Recherches sur l'année vague des Égyptiens.

sito importa alla storia egizia, ed insieme alla storia generale della civiltà primitiva dell'umanità: alla storia egizia sotto due aspetti, quanto che rintracciarsi la durata dell'intervallo onde sono divisi i due termini estremi del periodo faraonico, e quanto che per tal via si può giungere ad assegnare nell'ordine de' tempi il luogo ai personaggi ed agli eventi dei quali o gli storici ovvero i monumenti ci trasmisero memoria. Siccome poi la nazione Egizia è senza verun dubbio tra le più antiche, così dove si giunga a stabilire con saldi argomenti il cominciamento storico della medesima, si avrà pure un' irrefragabile prova dell'antichità dell'umano incivilimento.

II. I genuini avanzi delle storie Manetoniane sono l'unico documento, che senza interruzione dai tempi di Cambise possa guidare l'investigatore sino al regno di Mene; la loro autorità fu mostrata non dispregevole nel precedente discorso; tuttavia trattandosi di definire col loro presidio una controversia da oltre due secoli vivamente agitata, prima che ci facciamo ad esporne minutamente il contenuto e riandare gli annali faraonici, stimo necessario trattenermi alquanto nella discussione di alcune questioni generali, dal vario scioglimento delle quali dipende eziandio il vario modo di procedere nell'analitica esposizione della cronologia Manetoniana. In questa discussione io mi propongo di porre a confronto i catalogi Manetoniani con gli scritti d'Erodoto e di Diodoro, e con le scritture dei monumenti, affine di ricavarne 1.º il numero approssimativo dei re; 2.º la somma degli anni decorsi da Mene a Cambise; 3.º la soluzione storica della questione sulla contemporaneità o successività dei regni egizii; 4.º l'origine probabile della divisione dei regni egizii per dinastie.

III. Quanto al numero dei re, il Rosellini seguendo il metodo comparativo succennato, ed estendendo il suo lavoro sino a Dario III, col quale hanno fine le XXXI dinastie di Manetone, si credette di avere approssimato il vero, determinandone la somma per 350 all'incirca. Ma due gravi errori corrupero il risultato della sua ricerca; perchè primieramente egli considerò come compinta la serie dei re egizii riferita da Erodoto, la quale è manifestamente interrotta e notevolmente difettosa: in secondo luogo egli accorciò di circa due centinaia la somma risultante dai catalogi Manetoniani. Quindi parendo a lui che egregiamente concordassero nella predetta somma Erodoto e Manetone, ne trasse argomento per conchiuderla *prossimissima al vero*, e per rigettare sic-

come troppo discorde e poco autorevole l'indicazione di Diodoro, secondo la quale gli Egizii furono governati da 470 re e 5 regine tutti indigeni, oltre agli stranieri (1).

IV. Affine di poter giudicare rettamente le notizie date da Erodoto intorno ai re egizii, è necessario distinguere quelle desunte da documenti scritti, da altre attinte unicamente ai racconti fattigli a viva voce da coloro coi quali conversava. Alla prima classe appartiene il registro dal quale i sacerdoti gli lessero i nomi di 330 re succeduti a Mene, e che non scendeva oltre al regno di Meri (1). Contro alla verità del qual fatto non si può addurre verun argomento positivo; che anzi ad avvalorarla concorrono ed il papiro cronologico del Museo Torinese, ed i catalogi Manetoniani, i quali pei tempi anteriori alla dinastia XVIII contengono un numero di re assai maggiore, siccome fra poco dimostreremo. Ma pei successori di Meri, Erodoto non cita più alcun documento, e l'enumerazione che esso ne fa, ove si paragoni colla serie Manetoniana, e colle notizie date da altri scrittori, apparisce evidentemente scarsa, e mancante di più decine. Imperocchè da Sesostri posto immediatamente dopo a Meri (mentre secondo Diodoro questi sarebbe stato anteriore a quello di sette generazioni) sino a Psammetico I, egli conta undici soli regni, quando più di quaranta sono registrati nei catalogi di Manetone avvalorati dalla testimonianza dei monumenti, anche nella supposizione, che l'insigne conquistatore dello storico greco sia lo stesso personaggio che il Seto di Manetone, capo della dinastia XIX; contro alla quale supposizione militano gravi ragioni, che lo farebbero credere più antico. Gli altri scrittori greci che, o di proposito o per incidenza, accennarono all'età di Sesostri, tutti la fecero più remota, che non è appresso Erodoto, siccome già dimostrarono il Perizonio ed il Zoega (3). Queste cose se avesse considerato il Professore Toscano, sarebbe stato costretto di ammettere una somma non minore di 400 regni da Mene a Dario III.

V. Ma il numero di 400 è tuttavia di molto inferiore a quello che ricavasi da un accurato confronto degli scritti Manetoniani con quelli di Diodoro. L'errore del Rosellini nel ridurre a 356 la somma dei re

(1) Mon. St. I. I. pag. 98.

(2) Herodot. I. I. § 100.

(3) Perizonii Origin. Aegypt. c. XVI; Zoega de orig. et us. obelisc. pag. 600, 601.

delle XXXI dinastie (1) derivò dall'aver esso preferito il catalogo d'Eusebio a quello di G. Africano, e dall'aver ancora in detto catalogo presa per esatta una cifra errata, apposta per somma dei regni contenuti nel secondo tomo di Manetone, la quale cifra in nissuna guisa risponde al totale delle somme particolari attribuite a ciascheduna dinastia (2). Operata la necessaria correzione col mezzo d'una semplice addizione, anche stando al catalogo d'Eusebio, il numero dei re delle XXXI dinastie si accosterebbe a 450. Che poi secondo i principii di sana critica debba deferirsi più all'autorità del catalogo di G. Africano, che a quello d'Eusebio, io credo sia per capacitarsene facilmente chiunque consideri, che il secondo fu desunto dal primo, e che perciò intanto è da seguire, in quanto vi si attenne fedelmente. Ma appunto il Sincello, il quale avea sotto gli occhi gli scritti cronologici di ambedue, riprende Eusebio di avere osato quando mutilare le dinastie, e quando sconvolgerne l'ordine, per servire al proprio sistema (3). E che non ingiusto sia il rimprovero, pochi esempi bastano a provarlo: la XXII dinastia, detta dei Bubastiti, componesi di nove re, e dura 120 anni appresso l'Africano; Eusebio le assegna tre soli re, e 49 anni di durata; i monumenti poi sono favorevoli al primo, e mostrano il difetto del secondo (4). I re Pastori, secondo l'Africano sono distribuiti per tre successive dinastie, la XV, XVI e XVII; nella XV sono i sei, che Giuseppe Flavio citando Manetone (5) afferma essere stati i primi degli Hyk-shos, seguiti da altri nel dominio della conquistata contrada, la quale fu in lor potere per 511 anni; ma Eusebio li ripone nella XVII, ne enumera quattro soli, e limita la durata del dominio degli Hyk-shos a 103 o 106 anni. Il Rosellini riconobbe che in vece di quattro re doveansi leggere sei; ma tacciò d'errore l'Africano che li avesse collocati nella XV, e credette di rafforzare la sua sentenza coll'autorità d'uno scoliaste del Timeo di Platone, il quale citando Manetone pone

(1) Mon. St. t. I. pag. 97.

(2) Secondo il catalogo Eusebiano dalla dinastia XII alla XIX *inclusive*, sommando i regni di ciascuna, rilevasi un totale di 173 re non computati quei della XV, dei quali non è indicato il numero.

(3) Syncelli Chronogr. pag. 60.

(4) Rosellini Mon. St. t. 2. pag. 91-93; Leemans, Monumens Égyptiens portant des légendes Royales, pag. 114.

(5) Nell'opera più volte citata.

nella XVII dinastia i re Pastori (1). Ma quello scoliaste d'incerta età, e certamente meno antico d'Eusebio, prese come parole di Manetone stesso, lo scritto Eusebiano, siccome apparisce dal confronto, perocchè lo copiò alla lettera, scrivendo quattro soli re in vece di sei, ed anni 103, come leggesi in qualche codice d'Eusebio, sebbene non rispondente alla somma risultante dall'addizione dei singoli regni (2).

VI. Il catalogo dell'Africano trasmessoci dal Sincello, contiene 478 re, nel qual numero non sono compresi quei della XIV, in luogo della quale è una lacuna nei manoscritti del cronografo Bizantino. Questa in tutti i codici Eusebiani conta 76 re, che aggiunti ai primi 478 danno la somma di 554. Certamente nissuno può farsi mallevadore, che tale appuntino fosse indicata dall'autografo dell'Africano, considerato quanto facilmente ed in quanti modi poterono dai copisti essere alterate le cifre numeriche degli antichi autori. Ma che siffatte alterazioni non abbiano di molto corrotto l'originale, per quanto importa al quesito presente, in parte si può dedurre dal confronto del catalogo d'Eusebio, ed in parte ancora dalla notizia lasciataci da Diodoro, e più sopra riferita (3). Quest'ultimo indicando il numero dei re indigeni, accenna pure gli Etiopi, i Persi ed i Lagidi: ma non fa alcuna menzione dei Pastori, le tre dinastie dei quali nel catalogo dell'Africano sommano al 81. Togliendo questi, i tre Etiopi della dinastia XXV, gli otto Persi della XXVII, ed i tre parimente Persi della XXXI dalla somma totale del predetto catalogo, rimarranno gl'indigeni in numero di 459, tal che il divario tra Manetone e Diodoro sarà solamente di sedici, e però da considerarsi di nissun rilievo paragonato a sì gran numero. La differenza poi che notammo tra i due scrittori intorno ai re Pastori mentovati dall'uno e passati sotto silenzio dall'altro, non importa nulla quanto alla questione cronologica; perchè, contemporaneamente alle dinastie dei Pastori, continuarono la serie dei Faraoni altre dinastie tebane, siccome dichiareremo trattando di proposito questa materia. Pertanto rimane provato dalla concordanza di Diodoro e di Manetone, che da Mene a Cambise vi ebbe in Egitto più di quattrocento e cinquanta re, senza comprendere in questo numero i Pastori.

(1) Mon. St. I. I. pag. 45.

(2) Ibid.

(3) Vedi il n.º III.

VII. Qui forse a taluno potrà sembrare, che le addotte prove bastino sì per far vedere qual fosse l'opinione dei sacerdoti egizii intorno alla presente quistione, ma siano insufficienti a porre fuor di dubbio la verità storica della cosa, a meno che questa non venga comprovata dalla testimonianza di documenti e monumenti, che per antichità sieno riputati più autorevoli dei due mentovati scrittori. A questa difficoltà quantunque io creda di aver già risposto nel precedente discorso, in cui mostrai l'autorità di Manetone fondata sull'esistenza di annali anteriori all'invasione di Cambise, ciò nulla meno affine di viepiù confutarla, e di accertare il numero approssimativo dei re ricavato dall'istituito confronto, soggiungerò le osservazioni seguenti: 1.° Il registro dal quale i sacerdoti egizii lessero ad Erodoto i nomi di 330 re debbe essere tenuto in conto di storico documento, perchè non abbiamo ragione alcuna di credere, che que' sacerdoti lo avessero supposto, unicamente per ingannare Erodoto; se lo prendiamo per documento autorevole, dovremo ammettere per istorica l'esistenza dei re, i cui nomi vi erano registrati; ammessi 330 re anteriori a Meri, il quale, secondo il computo anche più ristretto, non può essere vissuto più tardi del XVI secolo av. G. C., ma che secondo la sentenza più probabile fiorì prima dell'invasione dei Pastori, non vedo come si possa ragionevolmente negare il numero approssimativo di 450 da Mene a Cambise, riducendosi la questione ad una cinquantina in più od in meno. Arroggi che i due scrittori, i quali confermano la somma di 450, anche con una di soli trecento avrebbero facilmente potuto conseguir fede alla somma degli anni assegnati a tutti que' regni (1). 2.° Vero è che il Rosellini dai monumenti egizii a lui noti non poté ricavare più di cento sessanta nomi reali (2); ma pochi anni dopo la pubblicazione dei due primi volumi della sua opera, il dottor Lepsius ne ebbe raccolto da circa quattrocento, siccome egli stesso me ne accertò mentre stava esaminando in Torino i monumenti del nostro Museo (3). Di fatto il Professore Toscano in detta sua opera non fece verun uso del papiro cronologico del Museo Torinese, il quale anche nel presente suo stato contiene da circa 170 nomi di re, pochissimi dei quali incontransi tra quelli pubblicati dal Rosellini. Abbiamo imper-

(1) Ved. Discorso II. n.° VI.

(2) Mon. St. t. 2. pag. 167-168.

(3) Vedi il *Moniteur* di Parigi del 2 dicembre 1842 sotto l'articolo *Variétés*.

tanto anche dai monumenti tuttora esistenti un valido argomento per confermare la verità sì dell'indicazione sommaria data da Diodoro, e sì delle liste Manetoniane. Nè alcun discreto critico richiederà dopo tante vicissitudini alle quali andò soggetto l'Egitto, e per le quali per la massima parte dei monumenti, che i pochi sopravanzati comprendano tutte le notizie cronologiche registrate da Manetone nella sua storia, per dar fede alla medesima; poichè se tanta copia ci venisse somministrata dai monumenti, la critica non avrebbe più in che esercitarsi per sostenere l'autorità del lodato storico. Basti accennare, che i catalogi Manetoniani trovano conferma nella testimonianza dei monumenti non solo per la dinastia XVIII, e parecchie delle seguenti, ma ancora per la XII, e per molti re delle prime sei, vale a dire pei tempi più remoti della storia egizia, che gli eruditi di mezza levatura troppo facilmente disdegnano per favolosi.

VIII. Abbiain veduto Erodoto male informato della successione dei re da Meri a Psammetico; passando ora al quesito degli anni corsi dal regno di Mene sino all'invasione di Cambise, dobbiamo da bel principio dichiarare alieno dall'uso costante degli Egizii, e lontanissimo dal vero, il computo delle generazioni, dal quale il predetto storico raccolse la somma di 11,340 anni per l'intervallo frapposto tra 'l regno di Mene e quello di Setone sacerdote di Vulcano (1). Imperocchè primieramente, anche posto che tutti quei re fossero succeduti regolarmente uno all'altro per diritto ereditario, sarebbe tuttavia molto incerto il risultato del computo genealogico, e da tenere unicamente qualora mancassero indicazioni cronologiche più precise; ma gli Egizii avevano annali o registri ne quali erano segnati non solo gli anni, ma anche i mesi, e per fino i giorni di ciascun regno in particolare, siccome apparisce dai catalogi Manetoniani, e dal papiro cronologico del Museo Torinese, più volte citato; anzi lo stesso Erodoto nella sua narrazione storica adduce alcune date, le quali non poteano essere ricavate d'altronde se non se da annali (2). Esaminando poi il luogo stesso, dove lo storico espone la durata dei 34 regni, facilmente riconosciamo, come egli sopra le notizie dategli sommariamente dai sacerdoti, ragionasse giusta i principii se-

(1) L. 2, § 142.

(2) L. 2, § 127. 128. 133. 137.

guiti dagli eruditi greci, per la cronologia dei tempi mitici della loro nazione, a cui mancavano annali storici, e che però doveano contentarsi del computo approssimativo delle generazioni. Di fatto prima egli narra, che i sacerdoti egizii contavano trecento quarant'una generazione dal primo re a Setone, di poi argomenta egli stesso quante migliaia d'anni fossero compresi nelle predette generazioni (1). A torto adunque il Volney attribuì agli Egizii l'invenzione di cosiffatto computo genealogico (2), quando e gli storici ed i monumenti dimostrano che quelli mai non ne fecero uso, mentre per opposto fu sovente adoprato dai Greci per necessità, e mentre nel caso che qui trattiamo, una diligente lettura conferma, che Erodoto applicò il sistema greco alla cronologia egizia.

IX. Erodoto confuse i regni colle generazioni, sospinto a tale confusione dall'inverosimile asserzione dei sacerdoti, che fossero stati altrettanti sommi sacerdoti a Tebe, succedutisi di padre in figlio, quanti erano stati i re, il che se prova troppa credulità nel detto storico, dimostra ancora maggiormente la mala fede di coloro, ai quali esso ricorreva per essere ammaestrato nella storia egizia. Impertanto noi dobbiamo cercare migliori fonti per attingere meno corrotte notizie intorno alla durata dei tempi storici dell'Egitto. Diodoro e Maucetone, ai quali ci attenemmo quanto al numero dei re, si mostrano pure degni della nostra fede quanto alla somma degli anni, colla quale circoscrissero il periodo storico dei Faraoni. Il primo, dopo aver detto, che i re mortali governarono l'Egitto da Mene sino a Tolomeo soprannominato Neodioniso (novello Bacco), sotto il cui regno esso visitò quel paese nella CLXXX olimpiade (3), soggiunge in un altro luogo (4) essere stato l'Egitto, per lo spazio di oltre quattromila settecento anni tenuto da re pel maggior numero indigeni (5). Queste due indicazioni insieme paragonate, mostrano che i sacerdoti consultati da quello storico collocavano i principii del regno di Mene verso gli anni 4800 avanti G. C., e se si consideri, che secondo quegli stessi sacerdoti il numero dei re

(1) L. 2. § 142.

(2) *Recherches nouvelles*, L. 2. pag. 322-323.

(3) *Bibl. Hist.* l. 1. § 44.

(4) L. 1. § 69.

(5) Vedi il precedente discorso n.º-VII

indigeni sommava a 475, è impossibile non prestar loro fede quanto alla somma degli anni, la quale pare più incredibile per la sua modicità relativamente ai moltissimi regni in essa compresi, che non sospetta di falsità a fine di esagerare l'antichità della nazione Egizia. Qui ancora vedesi chiaramente che del compunto Erodoteo, testè confutato, non dobbiamo dar carico al ceto ieratico di detta nazione, ma sì alla buona fede di esso storico ed all'ignoranza dei suoi *ciceroni*. Ma Diodoro contento di un'indicazione sommaria, perocchè non era suo scopo particolareggiare la cronologia egizia, non ci additò in qual modo dalla serie dei regni risultasse la predetta somma, e ci smarriremmo in vane congetture a volerlo rintracciare, se all'uopo non sovvenissero i catalogi Manetoniani. Questi contenendo la successione di XXXI dinastie da Menes a Dario III, notano quando la durata complessiva di ciascheduna, e quando gli anni di ciascun re, onde componesi una dinastia. Se non che l'osservazione che sopra facemmo (1) sull'impossibilità di accertare con precisione il numero dei re, per le differenze che incontransi tra catalogo e catalogo, tra manoscritto e manoscritto di uno stesso catalogo, debbe qui essere ripetuta quanto alle cifre numeriche degli anni, le quali non furono meno alterate di quelle dei regni. Ciò nulla meno con un diligente confronto dei varii testi, seguendo le norme suggerite dalla critica correttiva, e colla notizia sommaria trasmessa da Diodoro intorno alla durata totale dei regni, anche quella delle dinastie Manetoniane si potrà conseguire con soddisfacente probabilità, ed approssimazione al vero.

X. Dalle prime sei dinastie, per ciascheduna delle quali il catalogo dell'Africano enumera e chiama per nome ciaschedun re, rilevasi la somma di 1497 anni, la quale non differisce che di un solo anno in meno da quella, che è apposta nello stesso luogo al catalogo d'Eusebio, tanto appresso il Sincello, quanto nella versione Armena di quello. Questa somma divisa pei 49 regni onde sono composte le dette sei dinastie, accenna alla durata media di anni $30 + \frac{27}{49}$ per ciascuno di quei regni, la quale non ha nulla d'inverisimile. Ma dalla dinastia settima sino all'undecima, la durata di ciascuna è indicata soltanto sommariamente, come unicamente sommaria è l'indicazione dei re che vi sono com-

(1) N.º VI.

presi. Questi, secondo l'Africano, sono in numero di 151, ed aggiuntovi Ammeneme che è posto tra l'undecima e la duodecima, senza che venga inchiuso in nessuna delle due, è di 152, pei quali 152 regni è assegnata la durata di 799 anni e 70 giorni. Secondo Eusebio i re sarebbero soltanto 50 e gli anni 444 e giorni 75. Qualunque poi delle due somme si voglia preferire all'altra, resterà tuttora un divario grandissimo ed inesplicabile, tra la durata media dei regni delle sei prime dinastie, e quella delle cinque succennate. Del che tenteremo rendere ragione in luogo più opportuno; intanto qui basterà notare, che se i cronologi desiderosi di accorciare oltre modo l'antichità storica della nazione Egizia, avessero posto mente alla proporzione con che nei catalogi Manetoniani stà la somma degli anni a quella dei regni in queste ed in più altre dinastie, avrebbero facilmente deposto ogni sospetto, che l'autore dei detti catalogi avesse mirato ad esagerare l'ampiezza del periodo faraonico. Quanto poi alle differenze numeriche tra l'Africano ed Eusebio, osservo che questi concordano poi quasi del tutto nella somma apposta in fine del primo tomo, che è chiuso dal regno di Ammeneme, e dove leggo i re delle XI prime dinastie essere 192; gli anni 2350 e 70 giorni secondo Africano, e 2300 anni e giorni 79 secondo Eusebio (1).

XI. Il secondo tomo di Manetone incominciando dalla dinastia XII scendeva sino al fine della XIX. I re della XII sono nominati uno ad uno dall'Africano; se ne contano sette, e regnarono 160 anni: Eusebio ne nomina soltanto quattro, accennando genericamente che la dinastia fu continuata nei loro posteri, ed al complesso di essa assegna 245 anni di durata. Dopo questa i catalogi Manetoniani tornano ad indicare sommariamente i regni ed il tempo che comprendono sino alla XV secondo Africano, e sino alla XVII secondo Eusebio; il quale, come di sopra notammo (2), trasportò immediatamente avanti i re della XVIII, i re Pastori posti dal primo nella XV. La XIII comprende 60 re nello spazio di 184 anni giusta l'Africano, e di 453 giusta Eusebio; la XIV che manca al catalogo del primo appresso il Sincello, è di 76 re in Eusebio, ma per la somma degli anni i codici variano da 184 a 484, senzachè abbiamo alcun soccorso a rintracciare quale delle due fosse

(1) Rosellini *Mon. St. I. I.* pag. 36. 37.

(2) N.º V.

scritta nell'opera di Manetone. Ma gli addotti esempi bastano, senza che altri ne aggiungiamo, a mostrare di che natura siano le difficoltà che incontransi a voler determinare con precisione lo spazio occupato da tale o tal'altra dinastia, dove manchi l'enumerazione e la denominazione individuale dei re in esse compresi. In fine del secondo tomo i due catalogi sono di nuovo concordi nella somma, che è di 2121 anni (1). Rimangono ancora le dodici ultime dinastie, cioè la materia del 3.^o tomo, le quali secondo Africano sono inchiusse in 862 anni, e secondo Eusebio in 831, talchè la durata totale delle XXXI dinastie, per computo approssimativo verrebbe estesa a cinquemila e trecento anni; siccome poi l'ultima di dette dinastie finì verso il 330 av. G. C., così il principio del regno di Mene cadrebbe nel secolo LVII avanti il cominciamento dell'era volgare, e nel LII avanti Cambise. Ammesso questo computo la nazione Egizia avrebbe avuto un' antichità storica maggiore di otto secoli di quella che le attribuivano i sacerdoti egizii interrogati da Diodoro; ma io sono di parere, che tale differenza debbasi ripetere più dalle alterazioni onde furono corrotti i catalogi Manetoniani, che non dal testo originale di Manetone stesso, del che avrò occasione di rendere ragione a luogo più opportuno. Ad ogni modo si può tenere come risultante dalla concordanza dei due predetti storici, che negli annali egizii esistenti nell'età dei Lagidi, fosse computato uno spazio approssimativo di 4300 anni tra 'l cominciamento delle dinastie umane, e l'invasione di Cambise (4800 tra 'l regno di Mene ed il principio dell'era volgare).

XII. Resta ora a trattare la questione gravissima, se il succennato computo debba da noi considerarsi qual fondamento certo della cronologia, ovvero se debba per opposto essere ridotto entro a più ristretti termini. Ma prima di entrare in materia, stimo conveniente dichiarare qui più esplicitamente quello che già indicai verso la fine del secondo discorso, cioè, che io intendo di esaminare la cronologia egizia unicamente secondo i dati dei suoi proprii fonti, lasciando perciò da parte qualunque sistema di cronologia biblica, perchè di quanti finora furono messi in campo dagli eruditi, nissuno è certo, nè immune da gravissime difficoltà, e perchè la Chiesa, al cui supremo magisterio spetta la

(1) Nel testo greco d'Eusebio leggesi 1121, ma questo errore manifesto è corretto dalla versione armena.

decisione delle controversie attenenti al dogma ed alla morale, mai non s'intromise a sentenziare sopra veruno dei predetti sistemi, dei quali un solo può essere vero, mentre tutti per avventura possono essere erronei. Premessa questa dichiarazione, io non dubito di affermare, che nella condizione presente degli studi sopra i monumenti egizii, la cronologia quale ricavasi dai catalogi di Manetone debitamente purgati dagli errori dei compilatori e dei copisti, sola è soddisfacente ai principii dell'arte critica, siccome quella che in gran parte trovasi avvalorata dalla testimonianza dei monumenti, e munita di sufficiente probabilità nella parte rimanente, dove finora non potè essere accertata per difetto di monumenti. Imperocchè primieramente, se ebbero vera esistenza, tutti quei re, la somma dei quali di sopra raccogliemmo dai catalogi di Manetone, dalla storia di Diodoro, e dall'esame dei monumenti, in quelli abbiamo già una prova di gran valore, sebbene indiretta, della moderazione del computo dei due predetti storici, i quali condannato il sistema di Erodoto, a meno di cinquemila anni restrinsero la durata della monarchia egizia avanti Cambise; e però a buon diritto argomentiamo, che abbiano essi seguito scrupolosamente l'autorità degli annali nazionali. Quanto poi alla testimonianza dei monumenti, se ci è dato di poter dimostrare, che i re da questi mentovati tengano l'ordine stesso di successione, col quale sono disposti nei catalogi di Manetone; se in detti catalogi a nissuno di quei re venga assegnata una durata più lunga di quella accertata dall'ordinario corso della vita umana, comprovato l'ordine di successione viene eziandio posta in sicuro la cronologia di Manetone. Nè richiedesi che tale concordia sia in ogni parte dimostrata, ma solo che apparisca qua e colà, purchè in nessun luogo siano indizii contrarii; imperocchè dei monumenti storici dell'antico Egitto, essendo in numero minimo quelli che pervennero fino all'età nostra, dove questi non sieno mai contrarii, ed in moltissimi casi concordino coll'ordine seguito da Manetone, con legittima induzione si argomenta, che se un maggior numero di quelli esistesse, maggiormente ne sarebbe confermata l'autorità dei catalogi Manetoniani. Premessa questa avvertenza che è suggerita dai principii dell'arte critica, io mi farò a discorrere genericamente come la serie dei re mentovati dai monumenti proceda di conserva colla serie delle dinastie Manetoniane; e comincerò dalla dinastia dei Bubastiti che è la XXII, per non dilungarmi inutilmente riandando le posteriori; perocchè un sincronismo certo della storia egizia

e dell'ebraica, ci vieta di porre il cominciamento di detta dinastia più tardi del regno di Salomone, vale a dire dell'undecimo secolo avanti l'era volgare. Da Sesonchi, col quale questa incominciassi, che è il Sisak della Bibbia, risalendo sino al primo re della dinastia XVIII le liste Manetoniane contano trenta e quattro re nello spazio di circa 800 anni, che additano una durata media di 23 anni e mezzo per ciaschedun regno. Ora i monumenti ci forniscono pel detto intervallo una serie di re non minore di quella indicata da Manetone. Pertanto dal paragone dei monumenti e degli scrittori siamo condotti a stabilire con certezza storica il principio della XVIII dinastia verso l'anno 1800 avanti l'era volgare. Sin qui è così evidente la concordia dei monumenti colla cronologia di Manetone, che anche gli eruditi i quali leggermente toccarono questi studii, convengono con gli archeologi di proposito. Intanto se Manetone è comprovato veritiero nel suo computo sino ai mille ottocento anni av. G. C., non sarebbe troppa credulità riputarlo degno di fede anche pei tempi anteriori, quando pure per questi fossino interamente privati del soccorso dei monumenti. I quali poi sebbene per le prime diciassette dinastie siano molto più rari, tuttavia sono ancora tanti, e di tal natura da persuadere qualsiasi discreto critico della scienza storica e della veracità di Manetone.

XIII. Il primo re della dinastia XVIII riunì sotto un solo scettro il paese d'Egitto, gran parte del quale per lo spazio di cinquecento anni era stato occupato dai Pastori, secondo che contava Manetone nel II libro delle sue storie (1). Non recherà però maraviglia che in que' tempi di desolazione e di continue guerre tra i re nazionali e gli stranieri, non sia stato eretto alcun insigne monumento che trasmettesse ai posteri la memoria di que' calamitosi eventi. In fatti finora gli archeologi non ne riconobbero alcuno che appartenga veramente a quel periodo, al quale io riferirei volentieri l'esistenza delle dinastie indigene XIII, XIV, XVI e XVII facendole contemporanee delle tre dinastie de' Pastori rammentate dal catalogo dell'Africano; ma di ciò tratteremo di proposito in altro discorso. La dinastia XII nella supposizione che sia divisa dalla XVIII soltanto per lo spazio di cinquecento anni occupato dai re Pastori (e si può forse credere più antica, ma non posteriore), avrebbe

(1) Giuseppe Flavio nell'opera già più volte citata.

avuto termine verso gli anni 2300 av. G. C. Ebbe sette re secondo l'Africano, fra i quali il Lacare o Labari, che si fece edificare il laberinto per suo sepolcro, e che forse non è punto diverso da Meri. A questa dinastia appartengono i monumenti attribuiti alla XVII e XVI dal Rosellini, indotto dalla falsa opinione, che la tavola d'Abido fosse genealogica. Tali sono quelli rappresentati nella tav. IV ammessa al 1.^o volume de' suoi Monumenti storici dal num. 90 al 94 *α*, dei quali tre portano il nome di Sesortasen, ma con tre diversi prenomi, il che indica tre diversi re (90, 93, 94), e due quello di Améneme, parimente con due distinti prenomi (91, 92). L'argomento che mi pare convincere d'errore il Rosellini, e provare che detti re appartennero alla dinastia XII lo ricavo dalla somiglianza dei loro nomi con quelli di detta dinastia, la quale, trovo in Manetone, aver avuto origine da un Ammeneme, e di sette re onde è composta, due, cioè il 2.^o ed il 6.^o essere chiamati Ammeneme, il 1.^o Sesoncori o Sesincori, ed il 3.^o Sesostrì, nel quale ravviso il Sesortasen 1.^o dei monumenti, il cui prenome leggerebbesi al n.^o 33 della tavola d'Abido, se in quel luogo non fosse interamente mancante (1). A questo Sesortasen appartengono due obelischi tuttora esistenti sul suolo egizio, uno nel sito dell'antica Eliopoli, e l'altro in quel di Crocodilopoli, oltre una importantissima stele trovata nella Nubia, dalla quale apparisce che egli fu gran conquistatore e dominatore non solo di tutto l'Egitto, ma di gran tratto di paese a mezzodì della contrada. E queste grandi imprese, delle quali male potremmo capacitarci, collocatone il regno durante il dominio de' Pastori, non trovano più alcuna benchè menoma difficoltà, dove siano riferite a tempi anteriori, siccome facciam noi guidati dal catalogo di Manetone. Abbiamo adunque la testimonianza di monumenti contemporanei per la verità storica di questa dinastia, i cui principii toccano al 2460 o 2545 av. G. C. secondo che piaccia ad altri attenersi al computo dell'Africano ovvero a quello d'Eusebio.

XIV. Avanti il regno d'Ammeneme, stipite dei re suddetti, le liste di Manetone non offrono che il nome di Actoe Eracleopolita per le dinastie frapposte tra la XII e VI, e così non ci somministrano verun mezzo acconcio a paragonarle co' monumenti per tutta la loro durata,

(1) V. Rosellini Mon. St. t. I, cap. IV e cap. V, § 6, t. III, parte I, cap. II e III.

che è di 783 anni e 70 giorni secondo l'Africano, e di soli 493 secondo Eusebio. Tuttavia siccome delle prime sei abbiamo un compiuto elenco nel catalogo dell'Africano, ed il numero dei re in esse compresi non supera i 49, conviene di necessità ammettere un intervallo tra queste e la XII, al quale si riferiscano quella moltitudine di re dei quali accertammo l'esistenza, e che non potrebbero trovar luogo nè prima, nè appresso. Pertanto ponendo il termine della XI dinastia verso gli anni 2500 av. G. C. (vedi il numero precedente) non potremo collocare il principio della VII più tardi del 3280 av. G. C. Restano i 1497 o 1498 anni delle prime sei, che aggiunti alla presente somma farebbero risalire il cominciamento del regno di Mene verso il 4770 av. G. C. Queste prime sei dinastie sono così particolareggiate quanto al numero, ai nomi ed alla durata dei regni, che la verità storica delle medesime non può essere rievocata in dubbio da nissuno, fuorchè da coloro, i quali non ostante le prove addotte sin qui in favore di Manetone; continuassero tuttavia a tacciarlo d'impudente e gratuito impostore. Imperocchè a qual pro si sarebbe egli mai travagliato in supporre quarantanove nomi di re, in assegnare a ciascuno una particolare durata senza verun fondamento di verità? E perchè mai se suppose i nomi e gli anni del regno di questi più antichi, non continuò la stessa frode nè per le dinastie VII, VIII, IX, X, XI, nè per le XIII, XIV, XVI, XVII, nè finalmente per la XX, delle quali soltanto in termini sommarii indicò il numero dei regni e degli anni regnati? I suoi avversarii dovrebbero pure considerarlo, che se egli avesse scritto la storia egizia con animo d'ingannare i Greci intorno all'antichità di sua nazione, non avrebbe avuto mestieri di ricorrere a così meschino spediente, ovvero se vi si fosse appigliato avrebbe meglio incarnato il suo disegno; e se ancora addi nostri, in meno di venti anni di ricerche monumentali, si poterono già raccogliere da ben quattrocento nomi reali, poca fatica a lui egizio e perito delle scritture nazionali sarebbe costato infilarne con ordine cronologico tanti, quanti bastassero a rendere probabile l'intervallo di 5000 anni all'incirca, che egli poneva tra Mene ed Alessandro vincitore dell'ultimo Dario. A me per fermo, la moderazione del suo computo a petto di sì grande moltitudine di re, pare argomento non dubbio di veracità, quand'anche questa non venisse corroborata dall'autorevole testimonianza dei monumenti, i quali sebbene per le sei prime dinastie non sono così copiosi come per la XVIII e seguenti; tuttavia non sono

affatto mancanti; imperocchè e la tavola d'Abido, ed i dipinti della cameretta di Karnac con quei del Ramessesio, e le piramidi Memfitiche e le tombe di quel vicinato, e finalmente il papiro cronologico del Museo Torinese mostrano qua e colà nomi di re appartenenti senza verun dubbio alle dette dinastie.

XV. Stabilita l'esistenza di più centinaia di re egizii col confronto degli scrittori e dei monumenti, sarebbe opera soverchia dilungarsi in adunar prove intese a confermare il computo Manetoniano intorno alla durata dei tempi storici della nazione Egizia, se da due secoli i cronologi non si fossero affaticati a combattere l'ordine di successione col quale tanto dall'Africano, quanto da Eusebio sono rappresentate le dinastie desunte dalla storia di Manetone. Nissuno, per poco che sia versato negli studii egizii, ignora essere stata dal Marsamo messa in campo, e con grande apparato d'erudizione sostenuta l'opinione già sotto forma dubitativa manifestata da Eusebio (1), cioè, che una parte delle dinastie Manetoniane sieno state contemporanee une delle altre, anzichè successive. E quantunque il lavoro di quel dottissimo inglese per difetto di fondamento non possa reggere a critica disamina, ciò nulla meno, perchè liberava da gravissima difficoltà i sistemi di cronologia universale generalmente ammessi, venne approvato, e con poche mutazioni proclamato e difeso da una moltitudine di eruditi, fra gli altri dal Pézron, dal Fourmont, ed anche dopo gli studii monumentali dello Champollion e del Rosellini, ricevuto come più conforme alla verità storica dall'Heceren (2), e dall'egregio nostro concittadino e valente scrittore, conte Cesare Balbo nella recentissima sua opera delle Meditazioni Storiche (3). Se il numero, e la meritata fama degli scrittori che stettero e stanno tuttora pel sistema delle dinastie contemporanee, bastasse a far tacere gli argomenti validissimi della contraria sentenza, anch'io di buon grado mi sarei accostato a così illustre schiera; ma la severità della critica storica impone, che non il numero e l'autorità dei seguaci di tale o tale altra opinione, ma sì il peso delle ragioni o favorevoli o contrarie ci muova ad abbracciare una meglio che l'altra; e nella questione pre-

(1) Chronie. l. I, p. 201.

(2) Nella sua opera della Politica e del Commercio degli antichi popoli, tom. VI, della traduzione francese, Appendice VI.

(3) Medit. V e XII.

sente i migliori argomenti militano in favore dell'ordine di successione consegnato nei catalogi Manetoniani. A questo si attenne lo Scaligero, quando per la prima volta vennero da lui pubblicati; il dottissimo Petavio andò meglio negar del tutto fede a Manetone, anzichè ammettere l'autorità de' suoi scritti, turbarne arbitrariamente le parti per accomodarle al proprio sistema; ed allo stesso partito si appigliò il critico Perizonio, giustamente notando, che se qualche fede fosse dovuta allo storico egizio, converrebbe pure ricevere le dinastie coll'ordine stesso da lui tramandato (1). Nè al Marsamo primo autore della pretesa contemporaneità di quelle, sarebbe forse caduto in pensiero siffatto sistema, se all'analisi cronologica avesse fatto precedere, come era suo debito, un critico esame dei fonti, ed avesse sceverato diligentemente gli autentici dagli spurii. Imperocchè egli stesso dichiara, che la prima speranza di ridurre in buon ordine la cronologia egizia, fu in lui destata da quel catalogo riferito dal Sincello, che io nel primo di questi discorsi dimostrai doversi riporre tra i documenti evidentemente apocriefi del falso Manetone (2); nè meno del succennato catalogo confessa essergli stato necessario a definire l'antichità della nazione egizia, quello attribuito ad Eratostene, che ci chiama venerandissimo monumento di antichità (3), e che nel citato discorso fu chiarito non meno spurio del primo. Ma perchè trascurò l'esame critico dei fonti, egli si credette di potere dal confronto dei medesimi ricavar con istorica certezza la primitiva divisione dell'Egitto in quattro distinti regni, cioè, di Tebe, di Tis, di Memfi, e del paese inferiore, di cui suppose Eliopoli città capitale, prendendo da Eratostene la lista dei re Tebani, da Manetone quella dei Memfiti e dei Tiniti, e dal Sincello quella degli Eliopoliti (4). A far poi due diverse successioni dei Memfiti e dei Tiniti del catalogo Manetoniano, gli parve sufficiente argomento la diversità dei nomi con che da Manetone sono distinte le varie dinastie; il quale argomento sebbene di per sè è privo d'ogni valore, tuttavia posta l'autenticità della lista d'Eratostene e della Sincelliana, ed ammessa coll'autorità di queste la contemporaneità di più regni, non gli si potrebbe dar grave

(1) Perizonii Origin. Aegypt. pag. 67. 68.

(2) Canon Chron. pag. 7.

(3) Pag. 3.

(4) Pag. 18 et seq.

torto di averne aumentato il numero in proporzione dei nomi diversi che distinguono une dalle altre le dinastie Manetoniane; perocchè nell'ipotesi che tutte le dette dinastie non possano essere considerate per successive, e formanti una sola serie, altro appiglio non rimane al cronologo, fuorchè di collocare in una medesima successione quelle che portano il nome d'una medesima città, e di far procedere parallelamente quelle che sono diversamente denominate. Ma siccome il sistema del Marsamo e di tutti i suoi seguaci è fondato sopra documenti di nessuna autorità, così debbe rovinare per difetto di base. Questa conclusione non poteano opporre ai suoi fautori nè gli Champollion, nè il Rosellini, perchè, come tutti gli altri, essi pure, dove tornasse acconcia, invocavano l'autorità quando della vecchia cronaca, quando del falso Manetone, e quando di Eratostene; ma a buon diritto il possiamo noi in questi discorsi, essendo tal conclusione un legittimo corollario delle cose ragionate da bel principio.

XVI. Rigettati i documenti spurii, ed attenendoci noi unicamente agli autentici, questi concordano tutti in favore della successione delle dinastie, siccome fu già dimostrato dal Rosellini (1), al quale volentieri, per le prove generiche io rimando i miei lettori, per non ripetere inutilmente quel che io stimo già convenientemente chiarito da altri. Ma debbo avvertire, che non in tutti i particolari io consento coll'archeologo Toscano, e specialmente nella chiusa, in cui egli mostrasi scoraggiato dalle difficoltà e dalle dubbiezze che alla sua mente affacciansi maggiori d'ogni argomento e di ogni prova che si adoperasse a svilupparle (2). Infatti, se scrittori e fatti monumentali, come egli dice, non permettono in verun modo che nessuna delle egiziane dinastie, nè anche tra le prime, si possano considerare contemporaneamente regnanti, donde mai possono sorgere le difficoltà e le dubbiezze inestricabili? E se scrittori e monumenti comprovano la successione delle dinastie anche più antiche, perchè mai darla così facilmente vinta agli avversarii, dichiarando di non ardire nè affermare, nè impugnare quel che altri scrisse, cioè, che debbano aversi per favolose le quindici prime dinastie? Perocchè gli scrittori ed i monumenti che ne confermano la successione, di neces-

(1) Mon. St. I 1 pag. 98 e seg.

2 Ibid pag 111.

sità inclindono la prova dell'esistenza storica delle medesime, senza la quale sarebbe inutile disputare se siano state contemporanee o successive. Ma egli procedendo così timidamente, diede appiglio ad altri non versati negli studi speciali dell'archeologia egizia, a considerare come indefinibile, anzi definita in favore della contemporaneità, la presente questione (1). Io stimo quanto altri mai l'acutezza d'ingegno ed il retto senso, con cui il dottissimo Heeren tratta la più parte dei quesiti sulla storia politica dell'antichità; ma non è da far maraviglia, se talvolta in così esteso, per non dire immenso argomento, egli non abbia sempre la cognizione di tutti i fatti particolari necessari a rendere inconcusse le induzioni storiche, e le conclusioni generali; ed un tal difetto appunto riconosco nel suo lavoro sulle origini della nazione egizia, e sull'antichità della medesima, nel quale, assai più che sopra i fatti registrati dagli storici e dai monumenti, sopra ragioni generiche o semplici congetture egli fonda gravissime asserzioni. La storia è frutto di ricerche, il quale non può mai essere contrario ai documenti donde è ricavata; servirsi di questi soltanto dove secondino opinioni preconcepite, e rigettarli dove sieno alle medesime contrarii, è corrompere la natura della storia, ed avviamento allo scetticismo. Le ragioni che egli adduce per sostenere la contemporaneità delle prime diciassette dinastie, e la sua esitanza a determinare in qual tempo abbia avuto luogo per la prima volta la riunione dei diversi stati sotto un solo scettro, manifesta abbastanza, che sole congetture si possono opporre alla testimonianza positiva e contraria degli scrittori e dei monumenti. Anzi preoccupato egli dall'opinione che la civiltà egizia dovesse la sua origine ad una serie di colonie sacerdotali propagatesi da mezzodì verso settentrione, e stabilatrici di molti piccoli stati indipendenti uno dall'altro, credette di poter invocare l'autorità di Manetone in favore di questa molteplicità di stati, mentre per opposto l'ordine con cui questi distribui le dinastie, fa vedere una sola e continuata successione delle medesime, eccettuato il tempo del dominio de' Pastori (2). Quindi egli tiene per lavoro soverchio, il confutare l'opinione dei regni successivi, affermando con massima asseveranza, che le ricerche di molti autori moderni aggiunsero

(1) Vedi Heeren tom. VI, Appendice VI, pag. 494 della versione francese.

(2) Tom. VI, pag. 104.

gran peso a quella della contemporaneità; ma quali sieno questi autori moderni ei nol dice, ed io l'ignoro. Finalmente osservo, che egli considera come fortissimo sostegno della contemporaneità, un passo della versione armena d'Eusebio, il quale tuttavia è ben lontano dall'affermare quel che pretende l'erudito Tedesco, e quando pure l'affermasse, la sua autorità in siffatta materia sarebbe di piccolo momento. Ma il vescovo di Cesarea dopo aver cercato di ridurre a periodi lunari gli anni assegnati alle dinastie divine ed agli eroi da Manetone, perchè la somma di questi quadrasse colla somma delle generazioni antediluviane secondo il computo della Bibbia greca da lui seguito; e dopo avere asserito che la prima dinastia dei re egizii dovea incominciarsi da Mezzarain soggiunge le seguenti parole: « Che se di poi troverassi ancora » molto aumentata la somma dei tempi, converrà di ciò cercare diligentemente la ragione: imperocchè forse sarà avvenuto, che molti re » degli Egizi siano stati contemporaneamente » (1). La quale considerazione d'Eusebio chiaramente dà a divedere, che esso dubitava bensì, ma non avea alcuna testimonianza positiva di questa contemporaneità; infatti la sua cronaca espone come successive, e non contemporanee le dinastie Manetoniane. Tanto è vero che chiunque applica a seri studi sopra la storia antica, non dee contentarsi della lettura degli scrittori moderni, per quanto grande sia la fama di questi; ma fa mestieri che risalga ai fonti originali per poterne citare la testimonianza con certezza, e secondo il vero senso dei medesimi.

XVII. I fantori della contemporaneità delle dinastie Manetoniane, e di una più stretta cronologia, non potendo invocare alcun testimonio storico a difesa della propria opinione, si studiano di rendere incredibile il fatto d'una monarchia egizia, che si estendesse dal confine meridionale al settentrionale di quel paese fino dai tempi, ai quali risalirebbero le prime dinastie di Manetone; ogni grande imperio essersi formato lentamente per la successiva riunione di più piccoli stati; essere contro al verisimile, che trecento e più re di diverse famiglie siano regolarmente succeduti uni agli altri per lunga serie di secoli, come darebbero a credere i racconti d'Erodoto, di Diodoro e di Manetone; la condizione della nazione egizia per que' tempi doversi argomentare

(1) Chron. Græc. - Armen. - Lat. I. I pag. 201 - 202.

dalla storia di tutte le altre antiche nazioni, le quali prima del XX secolo av. C. C. appariscono divise in piccoli principati (1). Ma queste ed altre simili ragioni a me non sembrano di tanto peso, da distruggere l'autorità degli scrittori antichi e dei monumenti, sulla quale è fondata la successione delle dinastie egizie, che serve di base alla cronologia. Primieramente io posso ammettere senza detrarre all'autorità degli scrittori e dei monumenti, che da principio l'Egitto sia stato diviso in molti e piccoli stati; perchè le scrittori e monumenti accennano ad imperio monarchico soltanto cominciando il regno di Mene e successivamente, ma quel regno donde ha principio l'età storica della nazione egizia, era stato preceduto da un periodo mitico, rappresentato e dagli scrittori, e dal papiro cronologico del Museo Torinese, e da altri monumenti, coi regni degli Dei e Semidei. Io non cercherò per ora se sotto il velo del mito sia nascosta la teocrazia, od altra politica condizione dell'Egitto in quel primitivo periodo, nè qual durata abbia avuto; solo mi basta per la presente questione, togliere di mezzo un errore invalso sino dai primi secoli del cristianesimo, cioè, che Mene debba essere considerato come un medesimo personaggio col Mezraim della Bibbia, e che debba perciò essere creduto primo padre della gente egizia. Di questa sognata identità nessuna prova ci forniscono i libri sacri, ed il contrario raccogliasi dalla storia egizia. Pertanto nessuna ragione ci vieta di credere, che sotto il regno di Mene i vari e piccoli stati in cui era per l'addietro diviso il paese, siano stati riuniti in una più grande monarchia; poichè leggiamo nel catalogo d'Eusebio, che Mene fece chiaro il suo nome per militari imprese, e condusse le sue schiere fuori dei confini del suo paese. Fu dunque conquistatore, e come tale potè formarsi un imperio di più stati che prima fossero divisi; che poi la cupidigia di dominare sia antichissima, ne abbiamo una prova nel Nembrod rammentato dalla Bibbia nell'età prossima del diluvio (2).

XVIII. Ammessa la successione delle dinastie quale è data dai catalogi Manetoniani, non ne viene per conseguente, che debbasi parimente ammettere, essere seguite tante mutazioni di dinastie senza verun turbamento politico, come mostra di credere l'Heeren, affinchè per questo

(1) Heeren loc. cit. Balbo, Meditazioni storiche I. I. Med. V e XII.

(2) Genes. c. X.

fatto inverisimile metta in dubbio l'antecedente (1): « Se furono successive le XVII prime dinastie, osserva ingegnosamente il sig. conte Balbo, elle accennano per sè, implicano XVII rivoluzioni, o mutazioni, e sarebbe pure un gran che, se fossero succedute queste senza mai una divisione di regno » (2). Certamente questa difficoltà è grave; è impossibile rispondervi col mezzo della storia, perchè troppo scarse e mancanti sono le notizie tramandateci dagli scrittori sopra i fasti faraonici. Senza i catalogi di Manetone ignoreremmo la divisione dei regni egizii per dinastie, e i detti catalogi contengono poco più, che mere nomenclature ed indicazioni cronologiche; però rimane campo libero alle congetture intorno all'origine di siffatta divisione, la quale tuttavia debbe avere un saldo fondamento, del che tratteremo in appresso. Intanto ad appianare, per la questione puramente cronologica, la difficoltà mossa dall'illustre autore delle Meditazioni storiche, dalla cui cortese liberalità confido mi verrà permesso di emettere schiettamente il mio parere dissentendo dal suo, risponderò, che se il passaggio da una dinastia all'altra è sempre una mutazione, non implica però una rivoluzione, ovvero uno sconvolgimento politico, potendo tal passaggio effettuarsi senza violenta commozione, o per diritto ereditario o per elezione; per diritto ereditario, quando spento un ramo della schiatta regia è chiamato un altro a questa attenente; per elezione, seguendo estinzione totale degli aventi diritto: l'uno e l'altro caso potè aver luogo per le dinastie egizie. Dai catalogi di Manetone impariamo, che sotto la seconda dinastia, regnando Binotri o Biofi, fu fatta una legge, in virtù della quale anche le femmine potessero regnare, la qual legge suppone ancor più antico il diritto di successione pei maschi, come lo comprova il fatto della prima dinastia, nella quale è indicata la discendenza dei sette primi successori di Mene. Che poi talvolta gli Egizii ricorressero a regno elettivo, massime nei più antichi tempi, fu notato da Diodoro Siculo (3), ed il modo dell'elezione ci è riferito dal vescovo Sinesio (4), il quale potè averlo appreso da scritti più antichi ed autorevoli, che insieme con tanti altri non pervennero sino a noi. Del resto che talvolta le mu-

(1) Tom. VI, pag. 491.

(2) *Med.* V, pag. 119.

(3) *L. I.* § XLIII sul fine.

(4) *Synesii oper.* pag. 93, 94-95, ed. Lutetiae 1612, in fol.

tazioni di dinastie siano state operate violentemente, ciò nulla proverebbe contro alla successione delle medesime, come dallo avere i Pastori dominato sopra gran parte dell'Egitto per cinque secoli, non segue in verun modo, che debbasi avere per sospetta la successione della dinastia XVIII, il cui capo ebbe la ventura di cacciare interamente dal paese quei dominatori stranieri. Ed anche ammesso, che più d'una volta sia stata divisa in più regni la monarchia egizia, per intestine commozioni o per altre cause tacite dalla storia, non per ciò verrebbe meno la fede dovuta ai catalogi di Manetone quanto alla successione delle dinastie in essi mentovate, potendo essere accaduto, che nella sua storia questo scrittore facesse menzione di più regni estranei alle dette dinastie, e dei quali non siasi dato pensiero il primo compilatore dei catalogi, perchè nulla importassero alla serie cronologica se non unico, certo precipuo scopo di tal compilazione. Io ravviso indizii oscuri di eventi straordinarii e d'insolite mutazioni di regni egizii in molte delle dinastie anteriori alla XVIII, nelle quali un numero grandissimo di re è compreso in brevissimo spazio di tempo, come a cagion d'esempio nella XI in cui sedici re durano soltanto quarantatre anni, nella XIII che conta sessanta re nello spazio di 184 anni secondo l'Africano, o di 453 secondo Eusebio, e nella XIV di settantasei re per 184 o 484 anni secondo la varia lezione dei varii codici Eusebiani.

XIX. Quanto all'obbiezione contro alla rimota antichità della monarchia egizia, ricavata dal confronto della storia delle altre nazioni prima del 2000 av. G. C., le quali appariscono tutte *in condizione non di regni e nazioni grandi, ma di regni e genti piccole* (1), siasi concesso di osservare, che le nostre cognizioni sopra la storia antichissima dell'umanità sono così poca cosa a petto di quel che ignoriamo, per assoluta mancanza di documenti contemporanei, che è prudente consiglio non avventurarci a troppo generiche conclusioni, dove a mala pena possiamo sollevare una piccolissima parte del velo densissimo, onde sono avvolti i tempi, non dirò solo gli anteriori al 2000 av. G. C., ma anco i meno remoti. La storia Mosaica che è il libro più antico, al quale possiamo ricorrere in simili questioni, contiene bensì molte e preziosissime notizie sui popoli di una parte dell'Asia occidentale, e la condizione po-

(1) Balbo Medit. V. pag. 119.

litica in cui sono essi rappresentati, quadra colle osservazioni dell'Heeren e dell'autore delle Meditazioni storiche, ma da questa sola parte non si può trarre legittimamente un' induzione generalissima. Per opposto se noi interroghiamo gli annali Cinesi, questi ci mostrano la nazione unita sotto un solo principe fino dai tempi mitici, e divisa in più stati verso il fine del XII secolo av. G. C. Non possiamo addurre alcuna prova tratta dalla storia Indiana, perocchè quantunque già molti siansi affaticati a scriverla, questa rimane tuttora incertissima ed oscurissima. Nè più chiare e satisfacenti notizie abbiamo degli Assiri e de' Babilonesi pel periodo di cui trattasi presentemente; ma se qualche fede si potesse prestare ai racconti degli storici greci, ed alle liste Berossiane, sarebbero seguite e conquiste e mutazioni d'imperii in quelle contrade assai prima dell'età di Nino, che secondo i più degli scrittori fu contemporaneo d'Abramo. Del rimanente, per non entrar qui in discussioni difficili ad un tempo ed aliene dal nostro argomento, ci restringiamo ad affermare, che essendo storicamente dimostrata l'esistenza antichissima della monarchia egizia, quant'anche fosse questa un'eccezione, il che neghiamo, alla condizione generale delle nazioni vissute in quel primo periodo, la natura tutta particolare del paese egizio basterebbe a togliere ogni inverisimile a siffatta eccezione. Imperocchè chiunque considera essere l'Egitto una valle stretta nella massima parte della sua lunghezza da due giogaia di monti, una a levante e l'altra a ponente, e percorsa nella stessa direzione dal Nilo, senza il cui beneficio sarebbe un'arida solitudine, non avrà difficoltà a persuadersi che fin dai primi tempi ne' quali ricevette dall'Asia i suoi abitatori possa essere stato riunito in un solo regno, mentre le altre contrade dell'Asia più aperte, più estese, divise da monti, da fiumi o da deserti ebbero bisogno dell'opera di più secoli per divenir parti d'un grande imperio.

XX. Accennai di sopra (n.º XVII circa il fine), che l'autorità dei catalogi Manetoniani non iscapiterebbe, quando pure si potesse dimostrare con istoriche testimonianze l'esistenza di più regni contemporanei e non compresi nelle dinastie dei detti catalogi. La quale asserzione potendo a taluni parere contraria al retto senso, mi corre obbligo di farne più ampia dichiarazione prima di chiudere il presente discorso. Io distinguo la questione sulla successione delle dinastie Manetoniane, dalla questione sulla successione dei re egizii; e non dubito di affermare, che se alcuni indizii ricavati dagli scrittori antichi, ed anche dai mo-

numenti possono indurci a credere, che talvolta l'Egitto abbia avuto più re contemporanei, non perciò si dee ammettere contemporaneità di dinastie date per successive da Manetone. Per dimostrare il mio assunto, abbisogno d'una concessione dai fautori dell'opposto sistema, la quale, spero, mi verrà facilmente consentita, perchè troppo conforme alle loro opinioni. Io voglio tenere per cosa certa, che l'Egitto prima del regno di Mene fosse diviso in molti stati o del tutto indipendenti uni dagli altri, ovvero con qualche soggezione verso un solo, per esempio, verso il principato di Tebe, attesa la maggiore sua antichità, e lo splendore del tempio d'Amone venerato qual re degli Dei. Voglio ancora credere, che Mene fattosi monarca di tutta la contrada, lasciasse gli altri principi ciascuno al governo del suo stato, contentandosi di averli suoi vassalli, e permettendo loro di trasmettere la dignità principesca ai discendenti per successione ereditaria; tale concessione troviamo fatta dai conquistatori Asiatici, dei quali non possiamo supporre Mene nè più feroce, nè meno politico. E questa mia opinione divien poi molto più verosimile, se insieme coll'Heeren vogliamo ammettere che i capi di quei piccoli stati egizi, fossero ad un tempo e principi e sacerdoti. La cosa quando si fosse continuata con tale andamento per molte generazioni, l'Egitto avrebbe avuto una dinastia di monarchi esercenti la piechezza del regio potere dall'uno all'altro confine del paese, e nello stesso tempo parecchie minori dinastie di regoli o principi soggetti al gran monarca, il quale perciò non altrimenti che i re di Persia, poteva intitolarsi *re dei re, dominatore dei dominatori, signore dei diademi*, come usarono di fare i Faraoni sopra i monumenti. Ora, per passare da semplici congetture a fatti storici, dico, che Manetone, la Bibbia, e Strabone accennano alla suddetta divisione dell'Egitto in molti principati, e nello stesso tempo alla primazia d'un monarca sopra tutti i regoli. Manetone appresso Giuseppe Flavio narra (1), che mentre i Pastori dominavano sopra una gran parte del paese egizio, fu mossa loro un'aspra e lunga guerra dai re della Tebaide e delle altre parti d'Egitto, la quale essendo terminata coll'espulsione degli stranieri, Amosi o Totmosi Tebano, diede principio alla grande e gloriosa dinastia XVIII. Isaia, vaticinando gravissime calamità all'Egitto, annunzia che sorgerà

(1) Contra Apion. l. 1. § 14.

uomo contra uomo, città contra città, e *regno* contra *regno* (1), le quali ultime parole sono interpretate *uomo* contra *uomo* nella versione greca, appunto per significare guerre intestine tra i vari regoli. Strabone poi, parlando del laberinto, adduce l'opinione di alcuni egizii, secondo i quali, così straordinario monumento edificato d'ordine d'un antichissimo re, avrebbe contenuto tante aule regie, quanti erano i *nomi* (2); il che significa, che in quel tempo i vari *nomi* d'Egitto erano quasi altrettanti principati, e nome regio aveano i capi di ciascuno di essi. Ma che ad un tempo a tutti soprastasse un gran monarca, raccogliesi dall'essere quell'edifizio attribuito ad un solo re, e non ai diversi regoli, i quali vi erano poi convocati in certe solenni ricorrenze. A queste tre testimonianze così positive si possono aggiungere altre, le quali, sebbene meno formali, non mancano ullatto di peso a convalidare vieppiù la nostra opinione. Diodoro narra che alla dominazione dell'etiope Sabaco succedette un'anarchia di due anni (3). Il traduttore latino espresse la voce greca per *magistratum solitudo*; ma io giudico che l'*anarchia* di cui ivi trattasi, significhi soltanto mancanza di *monarca*, cioè del faraone esercente il supremo potere sopra le varie parti dell'Egitto, le quali erano governate ciascuna da un regolo o *nomarca*. Erodoto dice, che dopo la morte di Setone gli Egizii liberi da regio freno, non potendo in nessun tempo vivere senza re, se ne fecero dodici, diviso tutto quanto il paese in dodici parti (4); ma questo racconto paragonato con quello di Diodoro ci conduce ad un'altra conclusione. Diodoro accenna a gravissime turbazioni e stragi intestine seguite dopo la partita del monarca etiope, alle quali fu posto fine dai *dodici duci massimi*, che convenuti in Memfi giurarono solennemente i patti di concordia, e si dichiararono re della nazione. Io credo non dilungarmi dal vero, interpretando che quella guerra intestina non avesse altro scopo fuorchè di definire colla fortuna dell'armi, a quale dei principali duci o regoli o dinasti, dovesse toccare la dignità di gran re (di *faraone* secondo il linguaggio della Bibbia) lasciata vacante per la ritirata spontanea del monarca etiope. In conferma di ciò giova osservare,

(1) Cap. XIX. 2

(2) Strab. Geogr. I. 17. § 37.

(3) Diod. I. I. § LXVI.

(4) L. 2. § 117.

che i prossimi antenati di Psammetico uno della dodecarchia, avevano tenuto principato in Sai loro patria mentre regnavano gli etiopi, siccome non oscuramente ricavasi dal confronto di Manetone con Erodoto. Diffatto nelle liste Manetoniane la dinastia XXVI, detta dei Saiti, apresi presso Africano col nome di Stefnate, al quale succede Nerepso o Nerepso, a questo Necao, dopo il quale comparisce Psammetico padre di un secondo Necao, cui egli morendo trasmette il regno. Secondo Erodoto, padre di Psammetico fu pure un Necao, fatto uccidere dal dominatore etiope, dal quale temendo Psammetico per la propria vita, erasi allora rifuggito nella Siria; di poi quando l'Egitto fu rimaso libero dalla dominazione dello straniero, esso Psammetico fu ricondotto in patria dagli abitanti del nome Saite. La morte di Necao ordinata dal monarca etiope, la sollecitudine dei Saiti dopo la partita di questo a richiamare in patria Psammetico, il quale vedesi figurare subito appresso nel numero dei duei massimi dell'Egitto, renderebbe già molto valida la congettura, che il suo casato avesse ereditario l'onore del principato sul nome Saite, quando a togliere ogni dubbio non soccorresse il catalogo di Manetone, che nomina Psammetico a quarto re della dinastia Saite.

XXI. Dissi che gli antenati di Psammetico tenuero principato in Sai durante la dominazione degli etiopi, sebbene non ignoro che nelle liste di Manetone, Stefnate primo re della dinastia XXVI è posto a successore immediato dell'ultimo di quei re. Ma per conservare in questo luogo l'ordine di quelle liste, e tenere per veri monarchi d'Egitto i tre immediati predecessori di Psammetico, sarebbe necessario rigettare la dodecarchia, di cui non è fatto motto nelle medesime, e negar ogni fede al racconto di Erodoto e Diodoro intorno a quella, il che non mi pare conforme ai principii della critica. Concedo volentieri non potersi fare gran fondamento sopra molti particolari narrati dai detti due storici; ma quanto alla sostanza del fatto non posso rivocarla in dubbio, perchè quando Erodoto lo udì a raccontare, non erano ancora trascorsi tre secoli dacchè era seguito; perchè la memoria di quello potè facilmente essere trasmessa non solo dagli Egizii, ma anche dai Greci, ai quali fu aperto l'Egitto da Psammetico; e perchè finalmente non lo trovo contraddetto da verun altro scrittore, nè pure da Manetone, purchè le sue liste siano rettamente interpretate. Nè mi muovono le ragioni addotte in contrario dal Rosellini (1), poichè le sono mere congetture;

(1) Tom. 2 Mon. St. pag. 125-128.

e la storia cessa di essere storia ogniqualvolta si abbandonano le testimonianze positive per correr dietro a congetture. Le liste di Manetone tacciono sì grande avvenimento della dodecarchia, perchè raccontarlo non importava alla cronologia, quando la durata di quella venisse computata nel regno di Psammetico, al quale da Erodoto e da G. Africano sono dati cinquantaquattro anni, spazio abbastanza capace a contenere i quindici anni della dodecarchia (1), ma poco verisimile secondo l'età che dovea avere quando divenne monarca di tutto l'Egitto, ove s'intendano principiare da questo avvenimento; perocchè non abbiamo alcun ragionevole motivo di non credere ad Erodoto, quando narra, che Psammetico si fuggì fuori dell'Egitto dopo la morte del padre, che stette esule finchè non fu richiamato dai Saiti; i quali aggiunti dimostrano che egli dovea già essere molto innanzi nella vita, quando vinse gli undici colleghi del regno.

XXII. Nel precedente discorso recammo gli argomenti che ci parevano acconci a stabilire l'autorità dei catalogi Manetoniani quanto al complesso cronologico in essi contenuto, ma non fu, nè è intendimento nostro difenderli come inconcussi in tutti i loro particolari. Venendo al caso presente, non sarebbe forse troppo malagevole sostenere, che i tre primi re della XXVI dinastia fossero successori degli etiopi, e che alla morte del terzo fosse seguita l'anarchia e la dodecarchia, che Diodoro riferisce immediatamente dopo la ritirata di Sabaco, tanto più che Erodoto dopo la partita di questo e prima dell'anarchia pone il secondo regno del cieco d'Anisi, e quello di Seton sacerdote di Vulcano (2). Ma essendo questo storico generalmente male informato delle cose anteriori a Psammetico, e la sua narrazione sopra Anisi essendo più incredibile che verisimile, il regno poi di Setone dovendo essere stato più contemporaneo, che posteriore alla dinastia degli etiopi, come tra poco vedremo, io persisto nella mia sentenza a far contemporanei a detta dinastia anche i tre primi della XXVI. Diodoro Siculo avea appreso dai sacerdoti egizii che l'Egitto era stato soggetto alla dominazione degli etiopi: questi erano stati quattro, ma con intervalli frapposti tra l'uno e l'altro, tra tutti aveano regnato per lo spazio di poco men che trenta

(1) Diod. l. 1, § LXVI.

(2) Herodot. l. 2 § 140 141

sei anni (1); la quale notizia così precisa in cose di cui gli Egizii non avevano alcun motivo di corrompere la verità storica, è da essere tenuta come fondata sopra antichi ed autorevoli documenti, e come tale possiamo senza sospetto valercene per concludere, che il catalogo di Manetone, il quale assegna tre regni continui alla detta dinastia per lo spazio di quarant'anni non sia in questo luogo immune da errore. Ma se suppongasi, che i detti tre primi re della XXVI abbiano tenuto principato durante la dominazione etiopica, sotto la quale fu ucciso l'ultimo di essi, e che gli anni assegnati al loro principato siano risultanti dall'intervallo non computato nella somma dei regni etiopi, in tal caso resterebbero salve le ragioni cronologiche, e Manetone sarebbe conciliato con Diodoro. Ora negli studii storici è sempre partito più sicuro conciliare le dissidenze degli scrittori, che preferire bruscamente uno all'altro. Anzi con Manetone, con Diodoro, e colla Bibbia stessa viene a conciliarsi un fatto riferito da Erodoto, ammessa l'esistenza di principi o regoli egizii contemporaneamente al dominio degli etiopi. La Bibbia narra (2), che il re Ezechia assalito dalle armi di Sennacherib re degli Assirii, cercò di stringere alleanza con Taraca re d' Etiopia, il quale veramente mosse con un esercito incontro all'Assiro. Taraca è appunto il nome del terzo re etiope nelle liste di Manetone; ma Erodoto in luogo di Taraca racconta di Setone, il quale non è mentovato presso Manetone, che fu abbandonato dai soldati egizii in una pericolosissima guerra, che ebbe a sostenere contro a Sennacherib re degli Arabi e degli Assirii, e che andò debitore della salvezza del suo regno ad un prodigio (3). Il vero miracolo è raccontato dalla Bibbia; la medesimezza del fatto non può essere rievocata in dubbio; ma il re egizio di Erodoto è in tutto diverso dal re etiope rammentato dalla Bibbia, e mal si appose il Rosellini argomentando dall'identità del fatto l'identità di Seton e di Taraca (4). La qualificazione di sacerdote di Vulcano, ossia di Flù, manifesta Seton essere stato principe Memfita, e nulla aver avuto di comune coll' etiope. Ora ponendo che Taraca re dell' Etiopia e supremo dominatore dell'Egitto fosse accompagnato in quella spedizione da

(1) L. 1. § XLIV.

(2) Regum I. IV. XIX. 9. Isaiae XXXVII. 9.

(3) Herodot. I. 2. § 143.

(4) Mon. St. I. 2, cap. VII, § 4.

Setone principe egizio, ma suo vassallo, ogni cosa procede con massima verisimiglianza, ed è tolta via ogni contraddizione e colla Bibbia, e colle liste di Manetone, le quali rammentano solamente i grandi monarchi e tacciono i regoli, eccettuati gli antenati di Psammetico, ai quali la gloria e la potenza dei nipoti meritò l'onore di essere registrati in cima alla dinastia, di cui vero fondatore fu Psammetico.

XXIII. Non solamente poi durante l'imperio dei Faraoni, ma ancora dopo che l'Egitto ebbe perduta la nazionale indipendenza, e sotto i Lagidi io trovo indizii dell'esistenza di regoli o dinasti. Infatti Polibio (xvi, 19, 1, ed. Didot) chiama *dinasti degli Egizii* i capi di una ribellione seguita sotto il regno di Tolomeo Epifane, sotto la quale denominazione, con ragione congettura il Letronne (1) essere additati i governatori dei *nomi*; ed è molto probabile che la prudenza politica dei primi Tolomei avesse lasciato continuare un'istituzione, la quale forse risaliva sino ai principii della nazione egizia. Che più? ai tempi stessi di Strabone un'ombra della regia dignità onde in età più remote erano stati insigniti i principi dei *nomi*, mi pare di ravvisarla nel magistrato detto dal geografo, Esegete *πρῶτον ἀμπεχόμενος, καὶ ἔχων πατρίους τιμὰς, καὶ ἐπιμέλειαν τῶν τῇ πόλει χρησίων* (2). Alle testimonianze che siam venuti finora adunando per dimostrare la continuazione della divisione politica dell'Egitto in parecchi principati dai più antichi tempi sino al dominio dei Cesari, aggiungono peso le osservazioni fatte da Erodoto sopra i diversi istituti, usi, e riti religiosi, e sopra la diversità, anzi opposizione di culto divino tra i diversi *nomi* (3), di cui l'autore delle Meditazioni storiche si valse per impugnare la successione delle dinastie Manetoniane (4), poichè veramente accennano più ad una primitiva divisione di genti, che ad una mera partizione governativa o territoriale. Ma avendo noi con positivi e storici argomenti confermata l'esistenza di monarchi universali dell'Egitto per ogni parte del suo periodo storico, siamo condotti a conclusione alquanto diversa da quella del prelodato Autore, cioè ad ammettere due maniere di dinastie per l'antico Egitto, una di grandi monarchi, e l'altra di piccoli principi soggetti ai primi.

(1) Inscription de Rosette pag. 23.

(2) Strab. Geogr. l. 17 § 12

(3) Herod. l. 2. § 42.

(4) Med. V, pag. 119

Vero è che taluno dei principati di secondo ordine potè talvolta crescere in potenza a tale, da rivaleggiare colla monarchia stessa, minacciarla, ed ancora recarsene in mano le redini, privandone l'antico possessore. La storia ed i monumenti comprovano questo fatto; poichè e gli scrittori non dubitano di paragonare alla grandezza Tebana la Memfitica, considerando l'una e l'altra città per capitali del paese egizio, ed i monumenti additando costantemente l'Egitto diviso in due parti, danno pure ai grandi faraoni il titolo di padroni dei due regni, distinguendo con simboli e vocaboli speciali il Tebano dal Memfitico. Ma invano da siffatta distinzione altri vorrebbe dedurre l'indipendenza e la formale divisione politica delle due contrade, e quindi la contemporaneità delle dinastie Manetoniane anteriori alla XVIII (1). Imperocchè quegli stessi monumenti che mostrano l'Egitto distinto in due grandi parti, e in due regni, mostrano nello stesso tempo, che sopra tutte e due le parti ed i regni aveano dominio que' faraoni. Anzi tanto era radicata appresso gli Egizii la persuasione dell'unità di governo, e della sua estensione dall'uno all'altro confine dell'Egitto, non ostante la divisione predetta in alto e basso, che non dubitavano di affermare e consegnare sopra i monumenti, la cosa non essere stata altrimenti fin dall'età mitica dei regni divini (2).

XXIV. Dalla premessa discussione intorno alla grande monarchia ed ai principati minori d'Egitto, io credo che possa meglio essere compresa la divisione dei regni per dinastie, fatta da Manetone, sulla quale tacciono tutti gli altri scrittori antichi, e che un critico moderno inteso a screditare ad ogni modo lo storico egizio, tacciò di « arbitraria, fatta ad unico fine di recidere i tempi, senza riguardo alla serie » delle diverse schiatte regnanti, nè agli eventi che le innalzarono » o le fecero cadere, nè alla durata di ciascuna di esse, nè alla discendenza dei re, nè ai nomi di questi » (3). E veramente se noi prendiamo il vocabolo *dinastia* secondo il significato datogli dall'uso comune, cioè per indicare una serie di principi di una medesima schiatta, e che abbiano regnato sopra uno stesso paese, difficilmente potremo renderci ragione sì di alcuni passaggi da una ad altra dinastia mento-

(1) Balbo Med. V loc. cit.

(2) Herodot. I. 2. § 144, Diodor. I. § 44. Il papiro cronologico del Museo Torinese ecc.

(3) De Boet, les Dynasties Égyptiennes pag. 20.

vati dai catalogi di Manetone, e sì ancora di trovar ivi registrati in una sola dinastia principi di diverso casato. Così per cagion d'esempio, dopo la dinastia undecima di Tebani, troviamo riferito il regno di un Ammeneme, il quale non fa parte nè della predetta, nè della seguente, che è pur di Tebani, e di cui il primo re è appunto detto figliuolo dell'Ammeneme precedente. Il primo re della XVIII Amosi o Totmosi, è asserito figliuolo di Misfratotmosi suo immediato predecessore, in Manetone citato da Giuseppe Flavio (1). Parimente figliuolo di Amenofi ultimo della XVIII, fu Ramesse Seto capo della XIX. Per opposto poi Amasi affatto estraneo per lignaggio ai discendenti di Psammetico, insieme con questi è collocato nella dinastia XXVI. Queste difficoltà in parte furono lasciate intatte dal Rosellini, ed in parte troppo debolmente combattute: perocchè quanto ad Amasi egli non fece alenn'altra osservazione se non questa, che « quantunque ci fosse ribelle al proprio » re, ricevette dall'elezione del popolo autorità e diritto; e quindi nelle » liste di Manetone comparisce successore immediato di Vafris » (2). Una ragione assai più valida ci somministrano i monumenti, che ci fanno conoscere, aver Amasi menato in moglie una figlia di Psammetico II; col quale matrimonio, secondo le leggi egizie, egli poté essere chiamato continuatore della dinastia, alla quale era stata fatale la ribellione di lui verso di Aprieo (3). Quanto poi al mutamento di dinastia senza che fosse mutata la schiatta dei regnanti, parve all'archeologo Toscano sufficiente spiegazione il dire, che Amenofi I. (erroneamente da lui, dopo Champollion, creduto capo della dinastia XVIII) per aver liberato totalmente il paese dalla presenza degli Hyk-shos, ben fu degno di venir salutato capo di una nuova dinastia, quantunque fosse figlio dell'ultimo re della dinastia precedente (4). Ma condurre a glorioso fine imprese militari, dilatare l'imperio, immortalare il suo nome con fatti egregi basta sì ad un principe per dar principio ad un'era novella nel suo regno; ma è contrario all'uso comune di parlare, farlo perciò stipite di nuova dinastia, quando veramente è continuata in lui e ne' suoi discendenti quella incominciata dai suoi avi.

(1) *Contra Apion* l. 1. § 14.

(2) *Mon. St.* t. 2, pag. 148.

(3) Champollion-Figeac, *l'Égypte*, pag. 375.

(4) *Mon. St.* t. 1, pag. 203.

Io credo benissimo che nella condizione politica degli antichi Egizii potessero accadere, e che infatti più d'una volta accaddero di tali avvenimenti, pei quali fosse posto termine ad una dinastia, e fatto principio ad un'altra, senza che fosse necessaria mutazione di schiatta nei regnanti. Ma la natura di cotali avvenimenti non fu sinora convenevolmente ricercata, nè studiata, perchè, a dir vero, nella scarsità delle notizie storiche di que' tempi si può meglio congetturare, che dimostrare con positive testimonianze; ma l'uso delle congetture se mai può essere legittimo negli studi storici, allora è per certo, quando trattasi di cercare la spiegazione di fatti grandi attestati dalla storia, negli antecedenti e nei conseguenti, anche solo oscuramente a noi noti. Or dunque, attenendomi a questo principio, e valendomi delle osservazioni sparse nei precedenti numeri, io dico, che principalmente pei tempi anteriori alla dinastia XVIII, il passaggio da una ad altra potea aver luogo in una medesima schiatta in due opposti casi, cioè quando un dinasta minore era innalzato alla monarchia universale di tutto l'Egitto, riunendo sul suo capo le due corone, dette così unite il *Pischent*, delle quali la prima simboleggiava il dominio dell'alto, e la seconda quello del basso paese; poichè quello stesso vocabolo, il quale ci è noto pel testo greco della lapida di Rosetta, disciolto negli elementi che lo compongono, altro non è, a mio giudizio, se non se il *PI-CTH-DEHT*, ossia il regno alto e basso, e risponde compiutamente ai due segni del ramoscello e dell'ape, il vero significato dei quali fu per la prima volta posto in chiara luce dal dottore Lepsius (1). L'altro caso in cui per opposta ragione dovea farsi luogo a mutazione di dinastia senza mutazione di legnaggio, è quando o per invasione di stranieri, o per ribellione intestina avvenisse, che i discendenti del monarca universale perdessero uno dei due regni, e fossero ridotti a condizione di dinasti minori. Ora appunto io trovo il primo caso avverato nella persona di quell'Amosi o Totmosi, che quantunque fosse figliuolo di Misfratotmosi re Tebano, ciò nondimeno è fatto capo della dinastia XVIII. Dalle storie di Manetone, appresso Giuseppe Flavio, in fatti apparisce che ci fu l'espulsore degli Ilyk-shos, per la partita dei quali fu riconosciuto signore dell'alto e basso regno; e possiamo congetturare non senza verosimiglianza, che

(1) Annales de l'Institut. Archéol. 1838 cah. I.

tal ricognizione avesse luogo in modo solenne e religioso con una nuova inaugurazione in Memfi, siccome dalla citata lapida impariamo essersi praticato sotto i Lagidi. Quindi ei fu proclamato capo di nuova dinastia, perchè i suoi predecessori aveano bensì potuto portare il titolo di CTH, ma no l'altro di Het o HENT finchè la Memfide era stata in potere degli Hyk-shos. E che soltanto da quella inaugurazione siano stati computati gli anni della nuova dinastia, rilevasi dal confronto dei catalogi d'Africano e d'Eusebio, colla storia di Manetone presso Giuseppe, imperocchè quelli assegnano ad Amosi venticinque soli anni di regno, mentre la citata storia afferma che egli regnò ancora venticinque anni dopo la cacciata degli stranieri; dunque il tempo anteriore del suo regno dovette essere assegnato alla dinastia precedente. Nella stessa guisa spiegasi come il figliuolo dell'ultimo Amenofi abbia dato principio alla dinastia XIX, perchè appunto Amenofi avendo perduto il regno per una nuova invasione di Hyk-shos, fu di fatto spenta la sua dinastia; e cacciati di poi da Seto Ramesse suo figliuolo, questi fu inaugurato monarca, e diede principio alla XIX. Così ancora io mi capacito che Ammeneme I sia escluso tanto dalla dinastia XI, quanto dalla XII, considerando la prima come semplice dinastia di Tebe, e forse appartenente ad altra schiatta che non alla sua; e che Sesincori suo figliuolo sia stato il primo ad essere riconosciuto legittimo signore dell'alto e basso Egitto, innalzatosi a tanta dignità sulle rovine delle dinastie Memfitiche, siccome già la III e la IV di queste cransi elevate dopo le prime due, Tiniti d'origine. Del rimanente io son lontano da sostenere con ostinatezza, che storicamente vera debba credersi la spiegazione da me data ai succennati fatti, ma ella mi è paruta così verisimile, che non dubito di ritenerla, finchè altri dotato di più acuto ingegno e di maggior corredo d'erudizione monumentale non me ne avrà dato una migliore: intanto basti l'aver accennato ad un quesito ben degno di essere attentamente esaminato e storicamente definito.

XXV. Riepilogando le cose dette nel presente discorso, parmi di aver sufficientemente dimostrato, 1.º che il numero dei regni contenuti nelle liste Manetoniane si approssima all'indicazione sommaria data da Diodoro, ed è in massima parte confermato dai monumenti: 2.º che la somma di cinque mila anni all'incirca additata da Diodoro e dai catalogi Manetoniani, per l'intervallo che divide il regno di Mene dall'età del detto storico, considerata unicamente secondo i dati storici e mo-

numentali dell'Egitto, non dee essere creduta esagerata: 3.º che il consenso degli storici ed il testimonio dei monumenti non comportano che, da poche eccezioni in fuori, siano interpretate per contemporanee le dinastie date per successive dai catalogi Manetoniani: 4.º finalmente che furono appresso gli Egizii dinastie maggiori e dinastie minori, faraoni e regoli, ritenuta la quale distinzione, si può facilmente rendere ragione, perchè Manetone, più degli scrittori greci versato nello studio della storia egizia, abbia diviso per dinastie la serie cronologica dei regni, mentre di questa divisione non è fatto alcun cenno da verun altro storico.

STUDI CRITICI

LA LETTERATURA ITALIANA

di G. B. B. B. B.

1880

1881

1882

1883

1884

1885

1886

1887

1888

1889

1890

1891

1892

1893

1894

1895

1896

1897

1898

STUDI CRITICI

SOVRA

LA STORIA D'ITALIA

A' TEMPI DEL RE ARDOINO

DEL CAVALIERE

L. G. PROVANA

*Agendum est, ut non quod placet splendidiusque videtur,
sed quod verum est exquiratur.*

MURATORI.

Approvata nell'adunanza del 16 di maggio 1843.

PROEMIO

Ardoino marchese d'Ivrea e re d'Italia, uno egli è di quegli storici personaggi, de' quali perchè poche ed incerte notizie sono rimaste nelle storie contemporanee, gli scrittori de' tempi seguenti s'impossessarono, vestendoli di quelle forme fantastiche e capricciose, che meglio ad essi talentavano, o più lusingavano le passioni delle età loro.

L'esistenza d'Ardoino si rannoda con fatti importanti, e mal noti della storia d'Italia. Il regno suo fu appunto in su quel cominciar del secolo XI, nel quale furono fatti dagl' Italiani i primi passi per la conquista de' loro municipali diritti, e le maggiori sebben perdute prove, per impedire che l'Italia non ricadesse sotto il dominio de' forestieri, dal quale affrancata l'aveva la morte dell'ultimo degli Ottoni della stirpe di Sassonia.

Non era rimasta aliena da simili movimenti d'opposizione l'altra parte d'Italia posta fuori de' limiti del regno e non soggetta alla signoria de' Greci.

Viva ed accesa era in Roma, anzi in tutto lo Stato Romano, la resistenza alla potenza tedesca che tre imperatori avea testè dati all'Occidente, e dove l'influenza degli Ottoni nelle nomine pontificie avea portato alimento novello alle fazioni sorte fin da' tempi dell'occupazione di quella città per Arnolfo re di Germania. E comechè non sia stato Ardoino cagione diretta di tali novelle agitazioni di Roma, tuttavia se si considera siccome nella lotta ch'egli per tanti anni sostenne contro il suo potente rivale Arrigo II, egli trovò fuori del suo reame caldi aderenti e zelanti aiutatori, e come le cose a'suoi tempi operate dagli Italiani della Lombardia si rappiccano a quelle che allora accaddero in Roma, l'esistenza del re Ardoino piglia una storica importanza assai maggiore, che non s'avesse di per sè quella di un Grande di quell'età, cui nessun'altra causa che la propria ambizione avesse portato sul trono: e quale infatti non ebbe la vita di lui scritta dagli amplificatori seicentisti del Piemonte, o le memorie che di lui ci lasciarono i favolosi storici della Borgogna.

Le novelle spacciate da costoro suscitavano opinioni contrarie e non meno false: così fra coloro, che per utile o per audazzo amano di scorgere nelle storie i fatti a modo loro, gli uni si posero a magnificare le sue virtù, ed il suo regno; gli altri all'opposto a deprimerne totalmente la memoria, ed a porre in dubbio se non l'esistenza d'Ardoino, quella del regno suo, o la durata almeno di questo.

Quanto alle virtù d'Ardoino, e come privato e come principe, i fatti che siam per narrare troppo chiaramente palesano, ch'egli, come la maggior parte de' Grandi di que'tempi burrascosi, più d'ogni altra cosa cercava l'utile suo e la propria potenza: ma circa la durata del regno non è più caso di dubitarne.

Troppe testimonianze contemporanee ci fanno sicuri che appena passato di vita Ottone III imperatore, un marchese d'Ivrea, per nome Ardoino, fu dalla Dieta Italiana eletto re: che questo re ebbe lunga guerra col re di Germania successore di Ottone III, il quale dopo la morte soltanto di lui ricondusse l'Italia sotto la dominazione tedesca.

La durata del regno d'Ardoino fu dall'attento Muratori segnata dall'anno 1002 al 1015. La sua sentenza appoggiasi a molte testimonianze, e sono: una delle cronichette de're d'Italia da lui pubblicate (1):

(1) R. I. T. IV p. 149, 2.^a col.³ — *Annali d'Italia* dal 1002 al 1015

varie carte delle donazioni fatte dal re Ardoino a' monasteri, alle chiese, a' privati (1): le poche notizie che ne lasciarono Landolfo il vecchio ed Arnolfo, storici milanesi di quel medesimo secolo: e le copiose maledizioni mandate contr'esso dagli storici contemporanei della Germania (2). Recentemente poi una prova novella e più luminosa venne a confermare la sentenza di quell'illustre rinnovatore della Storia Italiana.

Lunga pezzà infatti io m'era doluto meco, che mai non mi fosse venuta fra le mani veruna moneta del re Ardoino, di quelle solite ad essere coniate nelle nuove elezioni de' re d'Italia, chè pur mi pareva impossibile che durante il suo regno nessuna non ne fosse stata battuta. Ma era dovere che quanto era sfuggito a me, non isfuggisse alle infaticabili ricerche del cavaliere G. di S. Quintino, il quale con quella profonda dottrina sua per molti lavori specialmente numismatici a tutti ben nota, prese particolarmente a raccogliere e ad illustrare le monete italiane de' secoli di mezzo.

Egli si fu dopo molte infruttuose indagini, che finalmente, siccome egli medesimo ne ragguaglia, venne a lui fatto di trovarne tre, argentee (come solevano essere le monete in quel tempo) coniate nella zecca di Pavia, per tipo diverse, e per la rarità loro preziosissime (3).

La diversità del tipo parmi un argomento imponente sopra la durata del regno d'Ardoino; perciocchè se questo regno fosse stato di due soli anni, siccome da taluni si vorrebbe (4), a che quelle tre monete di

(1) Questi Documenti furono pubblicati in gran parte dal TATTI, dal ROVELLI e dal BLEANDI, e noi li riproduciamo nell'Appendice.

(2) Di questi scrittori, sono principali il DITMARO, e l'ADALBOLDO, questi narratore della vita di Arrigo I imperatore, quegli cronista dell'anno 919 al 1018 (vedi PERTZ, *Monum. Germaniae Historica* T. V et VI).

(3) *Lezioni intorno ad argomenti numismatici* di Giulio di S. QUINTINO (estr. del Tom. V, Serie II delle Memorie della R. Accademia dello Scienze di Torino, ann. 1842, in-1.º, p. 4 e seg.).

(4) Si riferiscono costoro alla prima delle due Cronichette summentovate, che dice così: « Die » qui fuit dominico, et fuit XV die mens. febr. in civitate Papia, inter basilicam S. Michaëlis » fuit coronatus Ardoinus rex, et regnante annos duos et menses duos ». Nella 2.ª Cronichetta questa notizia è meglio spiegata: « Post ipsius decessum (Ottonis III) regnavit Ardoinus rex annos » duos et menses duos cum dimidio ». E poco di poi aggiunge: « Et habet modo regnatum IX ann. » et dies IX ». Ciò è a dire, che questa cronica toglie dal regno d'Ardoino lo spazio di tempo passato dal re Arrigo in Italia: ed è dall'aprile del 1004 all'aprile 1005, e dal Natale 1013 alla Pentecoste del 1014. Tutto questo ridurrebbe il regno d'Ardoino ad anni 12 e mesi 5 in circa: il MURATORI non avendo fatta questa deduzione lo fa durare 13 anni e mesi 10; e giustamente, poichè l'essere stato il re di Germania coronato re d'Italia da una fazione, non toglieva ad Ardoino i propri diritti, tanto più che una parte del reame sempre rimase da esso posseduta.

peso e di valore eguale, ma di conio diverso, e battute tutte nella medesima zecca? Sembrami invece naturale supposizione l'avvisare che una di esse sia stata coniata nel 1002, al tempo della coronazione di Ardoino: una seconda nel 1005, quando rotto l'assedio dal quale dopo un anno era cinto nella rocca di Sparrone dalla fazione che aveva incoronato Arrigo suo rivale, egli fece ritorno nella sua fedele Pavia: ed una terza, nell'anno 1014, allorchè dopo la ritirata d'Arrigo in Germania, Ardoino ebbe per la terza volta recuperato colla città di Pavia gran parte del suo reame. Tre epoche certamente importanti per Ardoino e per gl' Italiani, epperiò celebrate da esso con quelle tre diverse monete, le quali io verrò cercando di chiarire in questi miei studi. Una sola di queste monete porta sul rovescio il titolo d'IMPERATOR invece del CIVITAS GLORIOSA che si legge in giro sull' una delle faccie nelle altre due. Il cavaliere di S. Quintino è d'avviso, che un tal titolo non debba riferirsi ad Ardoino il cui nome col titolo di re leggesi sull' altra faccia, e che la voce IMPERATOR non fosse quivi altra cosa che una sciocca imitazione delle monete Ottoniane in corso dopo più d'un mezzo secolo, delle quali metteva conto (dic'egli) al nuovo re di ritenere modulo, stile, titolo, peso e disposizione delle lettere, per procacciare facile spaccio alle sue. E siccome, prosegue questo scrittore, le monete degli Ottoni tenevano la leggenda IMPERATOR, così questa volle Ardoino ripetuta nelle sue. Così il cavaliere di S. Quintino. Ma allora io chiederei per qual ragione le altre due monete non tengano pure la stessa indicazione? Forse perchè questa sia stata la prima battuta da Ardoino? Non abbiamo verun indizio di questo: ond' è che ci sarà lecito di supporre il contrario: ne conchiuderò pertanto che essa fosse piuttosto, come già dicemmo, la terza, in ordine, fra quelle monete, e fosse coniata nel 1014, dopo che Arrigo re di Germania, ottenuta la corona imperiale, s'affrettava di ripassare le Alpi appena scampato dalla congiura scoppiata in Roma al tempo della di lui coronazione; e che Ardoino per far contrapposto all'emulo suo, nel ripigliare Pavia e gran parte del suo reame, ponesse sovra le sue monete il titolo di IMPERATOR, che sotto quello di CAESAR gli era stato, secondo si ha dallo storico Arnolfo, attribuito nel 1002 dalla Dieta Italiana (1).

(1) « Ardoinus ... Papiac eligitur, et vocatus Caesar ab omnibus regnum perambulat universum ». (ARNOLPHI *Histor. Med.* Lib. I, c. XIV, R. I. T. IV).

L'esistenza di queste monete parmi pertanto una maggior prova di quanto aveva per altre testimonianze dichiarato il Muratori sopra il regno d'Ardoino; il dubitare altrimenti della durata del di lui regno è cosa superflua o capricciosa.

Ma Ardoino essendo stato l'ultimo re nazionale che gl'Italiani opposero alle invasioni de' principi della Germania, e la lotta di cui parlammo essendo terminata col trionfo del re forestiero, chiara si fa la ragione per cui mentre abbondano nella Germania gli scrittori del re Arrigo, mancano invece in Italia quelli del re Ardoino: e chiara altresì la causa che solletica taluni anche modernamente, a mover dubbi sul di lui regno.

Di fatto la mancanza di scrittori italiani in quell'età lasciò libero il campo a quelli del re tedesco di narrare le cose come piacque a loro. Nè certo peccarono di parzialità nè per gl'Italiani, nè pel re loro. Così il più antico fra essi, quegli al quale come a fonte attingono tutti gli altri, Ditmaro, storico contemporaneo di quegli avvenimenti, chiama ribellione degl'Italiani, l'esercizio del diritto che dava loro l'antica legge longobarda, di eleggere il proprio re: ed usurpatore sentina d'ogni vizio il Principe da essi posto sul trono (1). Imitò amplificando le esagerazioni di Ditmaro, un altro scrittore suo coetaneo, Adalboldo biografo speciale d'Arrigo: e così fecero più tardi altri scrittori della Germania, come l'*annalista Sassone* pubblicato dall'Eccardo, il *Cronografo della Sassonia* dato dal Leibnizio (2), ed altri molti di quella nazione.

Questi sviarono dalla verità gli scrittori italiani che vennero dopo, diversi da que' lodatori di Ardoino, di cui abbiamo parlato. I quali pigliando per vere quelle appassionate narrazioni, cui non se ne potevano

(1) « Longobardi autem audito Imperatoris (Otton. III) discessu (decessu) de futuris nihil solliciti, neque de dignis poenitentiae fructibus cupidi, Hardwigum (Ardoinum) sibi in regem elegerunt, destruendi potius gnarum artis, quam regendi ». (THIETMARI Chron. Lib. IV, n.º 34 apud PERTZ, *M. H. G. T.* V) « sed quid cum singulis villis circumscribere conor, cum in regno ei populo appareat: quae turba iniquitatis ad haec perpetranda cum armaverit ». (Ibid. Lib. V, n.º 16) « Hardwigus a Longobardis falso rex appellatus ». (Ib. VI, n.º 37). Per chi poi fa a fidanza colle etimologie de' nomi, si può aggiungere a tutte queste ingiurie tedesche l'interpretazione poco benigna del nome d'Ardoino o di Artwigo (come appella DITMARO il re italiano): *Ardoino* vale *dura reggitore*, ed *Artwigo*, *duro e molle* (FRAPPORTI, della *Storia e condizione del Trentino*, dall'anno 952 a tutto il secolo XI, p. 267).

(2) *Annal. Saxo.* ap. ECCARDUM Corp. Hist. M. AE. T. I. — *Chronogr. Saxo.* apud LEIBN. in *Acces. Hist.* P. I.

altre contrapporre di scrittori di parte contraria, ne risultò una congerie di fatti poco tra se coerenti, sì che la storia di quegli esordi del secolo XI ne rimase non solo come prima poco nota, ma di più falsata e confusa.

Appena fra moderni scrittori di Germania ricordo i *Commentari sull'impero Romano-Germanico* del Mascovio ed il *Corpus Hist. Germanicae* dello Struvio: opere pubblicate verso la metà del secolo scorso, nelle quali, sia per la specialità dell'argomento che pel metodo con cui sono condotte, gli autori non potevano far altro che affastellare e ripetere quelle cose che già avevano lasciato scritto i loro antichi cronisti. Si fa gran caso da' dotti di certa Dissertazione di Gio. Davide Koeller, professore di storia nell'Accademia d'Altdorf, pubblicata anch'essa verso quel tempo. Questo lavoro fatto non si può negare con molta cura, non è con tutto ciò scevro d'errori cagionati da falsi documenti: quindi siccome l'autore non ne cita veruno fra i gemmini che non sia notissimo, l'opera sua riesce di poca utilità per uno scrittore italiano (1).

Ma fra i nostri meno antichi, primo ad esser tratto in errore fu il Sigonio: chè tacerò di Gualvano Flamma, e di Filiberto Pingone, questi scrittore allobrogo di nessuna perizia per le cose anteriori a' suoi tempi (sec. XVI), l'altro di dugent'anni anteriore al Sigonio, e storico come ognun sa di poca critica, anzi imperterrito narratore di volgari diccricie (2). Vero è che a' tempi del Sigonio molti de' documenti, che quindi furono dal Tatti, dal Muratori, dal Giuliani, dal Rovelli e da altri strappati a' tarli degli archivi, ancora giacevano ignoti: epperò le narrazioni sue, comechè scritte con molta storica maestria, per le cose che riguardano alle guerre d'Ardoino contro Arrigo di Baviera, peccano per anacronismi, e per altre men che sincere notizie, e tengono poco merito oltre quello d'essere scritte in bellissimo latino (3). Quindi ancora, quella quasichè superstiziosa reverenza da lui professata

(1) Questo lavoro fu stampato in *Thes. Dissertationum etc.* del MARTINI, T. II, P. I (novemb. 1765). Il titolo ne è: *De Ardoino March. Eporediae, electo post Imp. Ottonem, et ab Henrico I. Aug. profligato rege Italiae. Dissertatio* I. D. KOELLER ecc.

(2) Philiberti PINGONII *Augusta Taurinorum* — Taurini I vol fol. 1577. — V. MURATORI *Præf. in Gualvani de la Flamma Manip. Florum.* R. I. T. XI. p. 534.

(3) V. in *Vit. Henrici I. Imp.* (BOLLAND. T. III die XIV Jul.). *Comment.* I. B. SOLERI. — V. etiam in SIGONII *De Regno Italiae* Lib. cit., notas (5) et (7).

per la maestà dell'impero romano passato ne' Principi Tentonici, lo rese intollerante verso Ardoino, ed ingiusto verso gl' Italiani del secolo XI: e sì dopo di avere sul principio del librò VIII lodato in questi l'altezza dell'animo, la quale rendendoli impazienti di vedere passato ne' barbari il doppio onore della regia e della imperiale corona, li aveva spinti a riconquistare coll' elezione d'Ardoino l'antico nazionale diritto, poco di poi parlando di Arrigo re di Germania (perchè questi conseguì poi la corona imperiale) ammette le pretensioni germaniche, chiama arroganti le mire d'Ardoino, sediziosi i desideri degl' Italiani, e conturbando tempi, fatti e persone fa planso all' infedeltà de' vassalli del re italiano, ed al trionfo del re forestiero (1).

Seguirono più o meno il Sigonio gli altri scrittori più moderni, e reca meraviglia siccome fra questi annoverar dobbiamo il Muratori ed anche in parte il Giulini (2), amendue così valenti nelle cose di critica, e scopritori di nuovi documenti, che chiariscono false molte di quelle censure germaniche ripetute dal Sigonio. Se non che alla qualità del lavoro dell' uno e dell' altro di que' valentuomini, la quale non faceva loro abilità d'addentrarsi a considerare per minuto la natura de' rivolgimenti che accaddero in Italia a' tempi del re Ardoino, nè qual parte vi avesse egli avuta, e sopra tutto poi all' andamento che allora tenevano gli studi storici, vuolsi per avventura attribuire questo difetto. Perciocchè sebbene il Muratori con tanti e quasi incredibili lavori abbia eretto un nobile ed eterno monumento alla comune patria italiana, egli lasciandosi trasportare alla corrente dell' uso che favoriva gli studi municipali e genealogici, con singolare amore attese a corteggiare e ad illustrare la famiglia degli Estensi: contento poi nel rimanente alla severa ricerca de' fatti, egli li espose tali e quali gli si avvenivano, senza brigarsi di soverchio della loro connessione.

Quanto al Giulini, l'opera sua essendo una speciale monografia delle antichità milanesi, egli non parlò d'Ardoino che facendo incidenza; con tutto ciò utili e preziose scoperte furono da lui fatte, alle quali soventi volte ci riferiremo.

Ad ogni modo dalle accuse oltremontane ripetute dal Sigonio, accettate

(1) *De Regna Italiae* Lib. VIII. Oper. T. II. col. 471 et seg.

(2) GIULINI, *Memorie della Città e della Campagna di Milano, ne' secoli Bassi*. P. 2.^a e 3.

dagli uni, martoriate, amplificate, falsificate da altri scrittori, ne risultò essere stato Ardoino non un re legittimamente eletto dalla Dieta Italiana secondo le antiche leggi costitutive del reame, il quale alla testa delle sue legioni, e come voleva la poca scienza militare di quell'età combattè lungamente per l'indipendenza del regno; ma un pazzo, un empio, un forsennato senza legge e senza fede, come piacque agli scrittori tedeschi d'appellarlo, *re di nome e ribelle al suo legittimo signore il re di Germania* (1).

Questa meno che retta o benevola opinione verso Ardoino era già siffattamente accettata per vera pochi anni dopo il Sigonio (2), che giusta quanto abbiamo dal Baldessani nella sua ms. Storia ecclesiastica del Piemonte, il cardinale Ferrero abbate commendatario del monastero di Fruttuaria verso la metà del secolo XVII, non la perdonò nemmeno allo scheletro di lui, che dopo l'anno 1045 dormiva nella chiesa di quel cenobio: « preso (dic' egli) da certo scrupoloso zelo, che mai nullo » antecessore per tanti secoli aveva sentito » apriva la tomba, e levatene le insegne regali, cioè lo scettro, la corona e l'anello, di che egli ornava certa sua privata galleria, faceva torre ed infossare nel nudo terreno quelle ossa disturbate, « acciocchè (soggiunge) non rimanessero » in nessuna venerazione » (3). Nè con ciò ebbero pace; pochi anni dopo, il conte Filippo d'Agliè (4) le faceva disseppellire un'altra volta, e rinchiuse in una men che semplice arca di legno, le trasportava nel suo vicino castello, esempio più assai della caducità degli onori terreni, che non argomento d'ambiziose ricordanze.

Mancava che una catastrofe drammatica ed inattesa venisse a coronare

(1) « Quidam episcopocida Harduinus nomine, non regnabat, sed villis in se regnantibus sub- » serviebat » (ADALBOINI *Vita Henrici II.* § 15. ap. PERTZ *Mon. Germ. Hist.* T. VI). « Arduinus » rex adulterinus » (ibid. § 33) — « Hardwig (Arduinus) nomine tantum rex » (THIETMARI *Chron.* lib. VII. § 17. ap. PERTZ T. V).

(2) « Ardoino ribelle dell'imperatore, che qual furia infernale di mente imperversata, guidato » da superba alterigia, d'eccessiva bestiale ambizione di dilatar i vani del suo imperio ... per » il che conoscitosi sacrilego, omicida, e reo di siffatte enormità ecc. ». (CUSANO. *Discorsi Ist- » oricali sopra i Vescovi di Vercelli* p. 139. Vercelli, 1676, in-fol.).

(3) BALDESSANI op. cit. presso il CASTIGLIONI, nota (585) *al regno d'Italia del TESALRO* p. 714. — Vedi pure il TENIVELLI *Biografia Piemontese*, Dec. I. p. 205.

(4) FILIPPO Conte n'AGLIÈ, marchese di S. Damiano e di Rivarolo, cavaliere di gran croce de' Ss. Maurizio e Lazzaro, maresciallo di campo, sovrintendente generalissimo delle finanze, consigliere del secreto consiglio di stato, gran mastro di Savoia, cavaliere della SS. Annunziata.

quella serie di patetiche scene, di che Ardoino è vivo e morto era stato il protagonista. Nè questa venne meno. E siccome non v'ha, ch'io sappia, memoria scritta di questo curioso episodio, giunto a noi per oral tradizione, non avviserò riesca inutile il riferirne qui il fedele racconto (1).

Negli ultimi anni della sua vita il re Carlo Emanuele III (2) volendo provvedere all'appannaggio del suo figlio secondogenito, il Duca del Ciabrese (3), s'invogliò d'aggiungervi il sontuoso castello d'Agliè rifabbricato ed adorno di ameni giardini dagli eredi ed agnati del detto conte Filippo. Non fece fallo il possessore (4) di aderire al desiderio del suo Principe: il castello fu venduto, e con esso il ricco mobile, e tutta la suppellettile quivi da tanti anni affastellata (5). Di questa fece parte la cassetta de' fossili avanzi del re Ardoino.

Ma la marchesa Cristina contessa di Saluzzo-Miolaus (6), donna di spiriti accesi e insofferenti, cui dispiaceva non tanto di vedersi priva della deliziosa sua villa, quanto che la signoria ne fosse passata alla Corte di Torino, presso la quale non godeva di molto favore, ebbe per ingiuria fatta a se stessa, quella, che, come a lei pareva, il marito aveva commesso contro a' numerosi feudatari del Canavese, cedendo nella

(1) La tradizione che riferisce questo fatto, non forse privo di qualche curiosità, può essere da me garantita senza veruna esitazione. Io la tengo da una onoranda e colta matrona, che per rispetto m'astengo di nominare, la quale nell'inoltrata età di 83 anni conserva una freschezza di memoria, ed una chiarezza d'idee veramente invidiabili. Essa mi accertò aver più volte udito questo racconto dalla bocca del cavaliere Giacomo Valperga di Masino, abate del Monastero di S. Benigno (già Fruttuaria), fratello del conte Carlo Francesco, contemporaneo perciò di quella cavalleresca spedizione.

(2) Regnò dall'anno 1730 al 1773.

(3) Benedetto Maria Maurizio Duca del Ciabrese nato nel 1741 di Elisabetta Teresa Principessa di Lorena, terza moglie del re C. E. III.

(4) Sao Martino, Carlo Emanuele Fr. Giuseppe marchese d'Agliè, primo scudiere e gentiluomo di camera di S. M., figlio del marchese di S. Germauo.

(5) Il castello d'Agliè fu rifabbricato un'altra volta nel 1775, ampliato su disegni del conte Borgaro dal Duca del Ciabrese, e più tardi nuovamente arricchito dal re Carlo Felice. Fra i dipinti in una delle sale vedonsi quelli assai mediocri di Paolo Ricci da Como, i quali rappresentano la coronazione di Ardoino, ed i fasti di lui secondo le favolose descrizioni de' seicentisti. Il che non toglie, che i ciceroni non ti asseriscano gravemente, che quelle pitture sono state eseguite 800 anni fa.

(6) Il ramo della casa Saluzzo-Miolaus si estinse in Cristina: essa fu perciò erede del ricco patrimonio composto di molti feudi, che volle divisi co' titoli ne' suoi tre figliuoli. Così il primo ebbe il titolo di marchese di Garesio: il secondo quello di conte di Miolaus: ed il terzo di marchese Cardè di S. Germauo.

vendita del castello e quasi in soprammercato d'odioso contratto, le spoglie di quel re, che que' nobili patrizi vantavano come stipite comune delle loro famiglie.

Lo sdegno che bolliva nelle vene di quell'altiera castellana era confortato da un sentimento di opposta natura, il quale poetizzando agli occhi suoi le stranezze della sua immaginativa, la rendeva sprezzatrice d'ogni critica, e indifferente alle altrui dicerie. Preferiva Cristina, fra i molti cavalieri che la corteggiavano, il conte Carlo Francesco Valperga di Masino, il più ricco fra que' signori del Canavese, uomo che allo splendore de' natali e delle cariche (1) accoppiava quelle doti del cuore e della persona, che furono mai sempre potenti ausiliarie presso la più bella metà della umana generazione.

Doleva altamente al conte di Masino l'atto di non curanza usato dal venditore del castello d'Agliè verso i poveri avanzzi d'Ardoino, ma non potendo in virtù delle sue cariche cortigianesche mostrarsene risentito, od esporsi ad un rifiuto col fare formale richiesta della obbliata cassetta, deliberò di tentare celata via per averla ad ogni modo nelle sue mani. Volgevasi per questo alla sua dama: e come quegli che molto bene ne sapeva l'indole altiera e corruciosa, fatti servire al suo fine i femminili rancori di lei contro la Corte, ed il dispetto che le aveva cagionato la perdita del castello, poco penò ad accenderla nel desiderio di una capricciosa vendetta.

Per una notte fitta d'inverno partiva l'ardente marchesana da Masino, castello del suo fedel cavaliere, posto a poche miglia dalla città d'Ivrea, e con una mano di scelti bravi traeva inopinatamente verso la rocca d'Agliè. Colà o per sorpresa, o per impeto, od in virtù dell'antica signoria, fatte spalancare le porte, trascorreva in un batter d'occhio per le ben note sale, e trovata la fatale cassetta, con essa ripigliava trioufante la via di Masino, lasciando scornati ed attoniti i guardiani del violato castello. Forse quell'atto di femminile baldanza non dispiaque in segreto a chi l'avrebbe potuto punire: checchè ne sia, gettato sovra' esso un velo si finse d'ignorarlo.

Quindi poi le ceneri d'Ardoino rimasero custodite nel castello di

(1) Carlo Francesco Valperga di Masino fu ambasciatore in Ispagna ed in Francia, quindi Viceré in Sardegna.

Masino, dove i nobili eredi del conte Carlo Francesco tengono a' giorni nostri ad onoranza, che nella più splendida villa del Canavese abbia sicuro riposo l'ultimo re italiano.

A tali peripezie degne più assai de' tempi burrascosi e lontani ne' quali era vissuto Ardoino, che non della cavalleresca civiltà de' nostri maggiori, era andata sottoposta la memoria di questo re per le esagerazioni di quegli storici appassionati, e de' loro poco attenti imitatori.

Per forma di compenso altri scrittori del secolo XVII, de' quali già abbiamo fatto parola, stranarono dalla verità in opposta maniera. Appoggiati ad una cronaca falsa (o per lo meno a bello studio falsificata) del monastero di Fruttuaria e ad un subbisso d'immaginari documenti, costoro coll'amorevolezza di quel secolo iperbolico, edificarono pompose genealogie, insussistenti racconti, favole sperticate: e non contenti a questo, sublimarono il loro Ardoino all'altezza degli eroi dell'età dell'oro, e de'santi del Cielo. Ma tutto ciò non resse e non poteva reggere lungamente contro una savia critica. La data sola della morte di quel re, che dalle ricerche del Mabillon abbiamo essere accaduta nel dicembre dell'anno 1015 (1), basta a chiarir false le celesti visioni ad esso attribuite, e supposti i portenti in suo favore operati nel 1018: come una semplice occhiata bastò al Muratori per mostrare apocrifi, certi diplomi ed altre carte assegnate al re Ardoino onde corroborare codeste finzioni.

Ricorderò per tutti gli altri un solo di questi falsi documenti che servì per molti somiglianti d'esemplare, sovra il quale venne da quegli scrittori fondata la genealogia di lui, che imparentarono con ogni maniera di Principi.

Quest'è il diploma di una ricca donazione che si suppose fatta da Ardoino nel giorno stesso della di lui coronazione al monastero di s. Ambrogio di Milano. Documento del quale parla il Muratori in certa sua lettera di risposta a quella che G. T. Terraneo, allora in età di 23 anni, aveva a lui scritta in lingua latina, mandandogli con giovanile ardimento le sue copiose osservazioni sopra la falsità di quel diploma (2).

(1) *Necrolog. S. Benigni Divion.* apud MABILLON, Ann. O. S. B. T. IV.

(2) Avvisai cosa inutile di qui pubblicare questo diploma dichiarato spurio dal MURATORI, e che si legge stampato nel libro *Gloriosa Nobilitas famil. Viscomitum* di Gerol. BIFFI: ma mi parve di far uota la lettera di quel Padre della Storia Italiana, a quegli che meritò poi co' suoi lavori

In mezzo alle strancezze delle opinioni contraddittorie sorte sul conto d'Ardoino, era cosa difficile il scèverare il vero dal falso; vi si adoperò ma non ottenne che imperfettamente lo scopo; Carlo Tenivelli, altro scrittore Piemontese noto all'Italia più che per l'operel sue per l'intemerata sua vita; e per le pietose e immortali parole, con cui Carlo Botta ne raccontò la sorte infelice (1). La Scriveva e egli in quell'epoca transitoria, nella quale gli studi storici andavansi in Italia ridestando da quella nullità, o peggio che nullità, in che da gran tempo erano giaciuti, merchè i soccorsi dell'arte critica rimessa in onore in tutta l'Italia dall'immortale Muratori, e nell'Italia Subalpina dal già nominato Terraneo (2).

(1) «Botta, Storia d'Italia dal 1789 al 1844, T. II, Lib. XI, p. 367 e seg. (Parigi, Baudry).

il titolo di *Padre della Storia Subalpina*, accio spolia e la stima che quel Grande faceva di quel giovane ingegno, e come ne indovinasse i futuri frutti.

Lettera di Lod. Ant. MURATORI a G. T. TERRANEO (Dallo schedo di G. T. TERRANEO: *Tabular. Celto-Ligust. T. II. ab an. DCCCCL. ad an. MXL.* MS. della R. Università, vedi all'anno MII).

« Prima d'ora non mi ha permesso la mia poca sanità di rispondere all'elegantissimo foglio latino, che mi ha fatto godere V. S. Illustrissima. Ora che respiro alquanto, soddisfaccio come posso al mio dovere, con ringraziarla del comunicatomi diploma del re Ardoino. S'è Ella abbastanza accorta, che il medesimo possa essere un' impostura. Tale infatti è, ed autore n'è stato il Galluzzi milanese, falsario famoso; che avea preso a far discendere la famiglia de' Visconti da Desiderio re de' Longobardi, con far venire da esso il re Ardoino e da Ardoino essi Visconti. Osservi quel *rex Desiderius antiquus avus noster*, che bella maniera di parlare! Noti: *Berengarii et Adalberti regum, patrum nostri*: tutto va a lessere la inventata genealogia: ne allora si diceva in *marchionatu nostro*, ma beasi in *marcha nostra*. Manca il giorno, io qui fu dato il diploma: vi si dice beasi in *die incoronationis*, ma vi si dovea esprimere più chiaramente quel di, ed il Galluzzi non lo sapeva; oltre di che, quell' *Incoronationis* è ridicolo: avrebbe detto *Coronationis*. Nè l'Ego marchese di Toscana era allora vivo. Sappiamo da s. Pietro Damiano, ch'egli morì prima d'Ottone III. imperatore, ed Ardoino solamente dopo la morte di Ottone fu coronato. Nè i marchesi d'Este aveano per anche la denominazione d'Este. Erano marchesi e furono poi nel susseguente secolo solamente chiamati d'Este. Io tralascio il resto, che di più non occorre per conoscere la falsità del documento, il quale, se ben mi ricordo, fu intruso dal Galluzzi nell'archivio delle monache del monastero maggiore di Milano.

« Io non lascio per questo di ringraziare V. S. Illustrissima, per la sua benigna intenzione di favorirmi. E mi congratulo poi seco per l'elegante suo stile latino, ed avendo con ciò conosciuto la felicità del suo talento, sono ad esortarla, che lo coltivi, e seguiti lo studio dell'erudizione per dar poi que' buoni frutti, di cui la trovo capace. Intanto con assicurarla di tutta la mia stima, ed offerirmi a' suoi cenni, mi protesto ecc.

« Modena 14 agosto 1737.

Lud. Ant. MURATORI ».

(1) BOTTA, *Storia d'Italia dal 1789 al 1844*, T. II, Lib. XI, p. 367 e seg. (Parigi, Baudry).

(2) « *Subalpinæ Historiæ parens.* » Così lo appella il VERNAZZA nell'epigrafe postagli sulla tomba nella chiesa di S. Dalmazzo di Torino, da lui suo discepolo ed amico.

Discepolo suo C. Tenivelli prese con diligente biografia ad illustrare Ardoino, marchese d'Ivrea e re d'Italia, come il dotto maestro suo aveva illustrato l'Adelaide contessa di Torino. Ma alieno, come scrive il Botta, dalle opinioni politiche d'oltremonti, che già a' suoi tempi cominciavano a pullulare, favoriva per indole e per abitudine quanto sapeva d'opinioni contrarie: sì che mentre i novatori voleano proscritti i titoli di nobiltà e le sequele genealogiche, egli stimando meglio illustrare il suo protagonista, accettava per veri alcuni fra que' spuri documenti di cui parlammo che ne magnificavano la provenienza e ne nobilitavano il casato: così senza volerlo s'allontanò da quella verità ch'egli caldamente andava cercando (1).

Non molti anni dopo, il presidente Iacopo Durandi in un'operetta sulla Marca d'Ivrea, scritta per far seguito d'opera maggiore, fu condotto a parlare del marchese Ardoino. Il che fece con altrettanta dottrina che criterio. Reiette tutte le favole divulgate da' suoi predecessori, e chiariti molti documenti che a quell'età appartengono, con quella brevità che s'addiceva al suo lavoro, considerò Ardoino sotto il vero suo aspetto, non disgiungendo le cose che specialmente lo riguardano dagli avvenimenti che accaddero a' suoi tempi, quando per la morte dell'ultimo degl'imperatori della stirpe d'Ottone s'aprì un nuovo campo in Italia alle novità che que' principi vi avevano loro malgrado provocate (2).

Questo suo lavoro, tuttochè brevissimo, è tanto più pregievole in quanto che l'aspetto sotto il quale prese a considerare la parte fatta da Ardoino in quella rivoluzione italiana, è diametralmente opposto a quello col quale egli pure ingannato da' precedenti scrittori aveva dipinto questo re in una prima opera sua (3): prova, se altra mai, che retto era il giudizio di quel valoroso scrittore, e che già alle vecchie formule adulatorie prese dalla Storia Italiana dopo la caduta di Firenze, cominciavano a sottentrare modi più razionali, intendimento più generoso e spassionata ricerca del vero.

Questa tendenza novella, questo progresso manifestansi maggiormente nella dotta e bella Storia di Como, scritta da Giuseppe Rovelli coetaneo

(1) TENIVELLI, *Biografia Piemontese*, Decade 1. p. 173.

(2) DURANDI, *Il Piemonte Cispadano e Transpadano antico*, Torino, 2 vol. in-4.°, 1771, 1803.

— DURANDI, *Della Marca d'Ivrea*, Torino, 1 vol. in-4.°, 1801.

(3) DURANDI, *Dell'antica condizione del Vercellese*, Torino, 1 vol. in-4.°, 1766.

del Durandi. L'opera è divisa in tre parti, e queste in sedici epoche, più un'appendice; narra le vicende dell'antica città di Como da' tempi di Tarquinio Prisco re di Roma, fino alla rinnovazione del regno d'Italia per Napoleone imperatore (1). Nella breve prefazione l'Autore dichiara quali siano le sue dottrine in fatto di storia: e queste, se non vengono da esso nè pomposamente, nè bellamente descritte, non difettano per tutto ciò di profonde e generose vedute. « Lo scrivere una » Storia (dice il Rovelli) egli non è l'esporre soltanto una serie di » fatti appartenenti a quella nazione, provincia o città, di cui s'*im-* » *prende a scriverla*, ma egli è inoltre un penetrare dentro lo spirito » de' fatti medesimi, e sceglierli e disporli sotto quel punto di vista, » che interessano l'uomo e la civile società. Egli è un svolgere i rap- » porti che hanno gli avvenimenti sì morali che fisici, alla felicità, o » alla miseria degli uomini, e far conoscere esattamente e in tutti i » varii periodi de' tempi, lo stato del popolo, che ne è il soggetto » (2).

Dopo codeste sentenze l'autore, siccome egli medesimo osserva, non poteva trattenere la sua storia dentro i limiti che riguardano la sola città di Como, a quel modo che fatto avevano i tre di lui predecessori, Benedetto Giovio, Francesco Ballarini ed il P. Tatti. Epperò la estese egli non solo a tutto il regno d'Italia, del quale Como col suo territorio faceva parte, ma talvolta a tutta l'intera penisola italiana. E questo fece con molto discernimento, non entrando in inutili particolari, ma non tralasciando neppure que' fatti che collegar potevano il suo speciale argomento cogli interessi generali di quella.

Codesta connessione viene dimostrata per eccellenza nella Dissertazione preliminare, ch'egli divise in vari *Articoli*. Fra' quali il primo che tocca della dominazione di Carlo Magno, e de' Carolingi, e quindi in singolarissimo modo l'altro, che ritrae il prospetto politico della Lombardia da Ottone I fino alla successione di Arrigo III imperatore, sono svolti con isfoggio di molta dottrina, e con non minore sagacità, e novità di citazioni. Delle conseguenze ch'egli deduce dalle sue considerazioni sovra lo stato degl'Italiani sul cadere del secolo X, e sovra

(1) *Storia di Como*, descritta dal marchese Giuseppe ROVELLI, patrizio Comasco, divisa in tre parti, in 5 vol. in-4.^o Milano e Como, 1789 e 1808.

(2) *Storia di Como*. P. I. Prefaz.

le cause che agevolarono il loro risorgimento, noi avremo più volte opportunità di far parola nel corso di questi studi. Fra tali cause pone a buon diritto il Rovelli il regno di Ardoino.

Era infatti impossibil cosa, che sfuggisse alle sue considerazioni siccome quel regno quasi misterioso per la spontaneità colla quale ebbe inatteso principio, per la durata sua di circa quattordici anni a fronte di un nemico forestiero, potente ed aiutato da una parte de' perfidi vassalli d'Ardoino, in mezzo a mille difficoltà di guerre interne ed esterne, di tradimenti, di pesti, d'incendi, di carestie, era impossibile ripeto, che sfuggisse al Rovelli siccome questo regno che durò sì lungamente a fronte di tante opposizioni, è un fatto caratteristico di quell'età, che va connesso co' nuovi bisogni, colle nuove tendenze che in quel punto sentivano i nostri padri.

Con tutto ciò si direbbe che la novità dell'aspetto con cui gli si profieriva il personaggio d'Ardoino tanto diverso da quello che da' precedenti scrittori gli era attribuito, rendesse dubbioso l'animo dello storico di Como: epperò nel parlare delle conseguenze del di lui regno, ecco in qual modo le avviluppa di parole ambigue e quasi contraddittorie: « *Ardoino (morendo nel 1015) finì d'inquietare la Lombardia, e di* » *avvolgerla in discordie e guerre civili*, ma non finirono le conseguenze » *nè di quella funesta rivalità*, che si risvegliò tra Popolo e Popolo, » *nè di quella esaltazione di coraggio*, che lo sperimento delle proprie » *forze suole ispirare*, e la quale animando alle più ardite imprese » *agevolò a' nostri maggiori l'acquisto della libertà* » (1).

A codeste conseguenze, in qualsiasi modo le vengano espresse, era stato condotto il Rovelli, per aver considerato in modo più largo e più razionale i fatti di quegli anni. Avvegnachè paragonando lo stato in cui trovavansi nel 1002 gl'Italiani alla morte d'Ottone III, con quello in che poi li lasciò nel 1015 il re Ardoino, egli potè ravvisare siccome le condizioni de' tempi furono quelle che crearono Ardoino, e come la stessa natura indomita e ambiziosa di questo principe, aiutò lo sviluppo di quelle novità che andavansi manifestando nelle risorte popolazioni.

Simili conseguenze non aveva dedotto il Denina. Il quale nel trattare

(1) *Storia di Como* P. II, Epoca IX. Cap. I. p. 84.

di questo oscuro periodo di storia nell'opera sua delle *Rivoluzioni d'Italia*, seguì l'andamento de' suoi predecessori, e considerò Ardoino come uno di que' tanti re che dopo la morte di Carlo il Grosso avevano occupato colle violenze il trono d'Italia. Epperò tenendolo soltanto come un pazzo e come un ambizioso che a furia di raggiri e in virtù delle sue ricchezze aveva usurpato la corona, sdegnò venire indagando quale fosse stata l'influenza reciproca tra le vicende generali dell'Italia ed i fatti principali del regno di questo principe.

Di questi ultimi anni finalmente, uno scrittore Tedesco, il dottor Leo, professore di Storia nella celebre Università di Halle, dotto come sogliono essere i letterati suoi connazionali, pubblicò colle stampe una *Storia d'Italia* dalla caduta dell'impero romano sino a' tempi nostri, dettata da lui nella sua lingua nativa ed elaborata sovra un piano affatto nuovo, con una ricchezza di peregrine citazioni, veramente germanica, e tale da svergognarne i più dotti bibliofili italiani.

Le considerazioni colle quali egli collega le sue narrazioni sono sempre profonde e logiche, cioè conformi ad un dato suo modo di vedere i fatti ch'egli racconta. Forse gli si potrebbe domandare maggior tolleranza nelle sentenze che toccano in qualche modo le dottrine religiose, nelle quali egli si mostra non solo seguace, ma caldo difensore della riforma, con un zelo che ricorda tempi già molto lontani. Tutto questo non toglie alla sua storia il pregio d'essere stata elaborata con molta dottrina.

La dominazione de' tre Ottoni in Italia è saviamente meditata da esso con una parzialità non di troppo eccessiva. Da quella deduce gran parte degli elementi che ne' secoli XIII e XIV diedero (siccome egli stesso si esprime) alle rivoluzioni italiane un movimento ed un aspetto speciale (1). E siccome egli attribuisce un tal risultato all'essere stati costretti i successori degli Ottoni sul trono d'Italia a seguire il sistema politico messo in opera da que' principi, così fu condotto a ragionare d'Ardoino immediato successore di Ottone III.

Ecco in qual guisa viene da esso considerata l'elezione d'Ardoino: « Dopo la morte di Ottone III l'Italia (così il Leo) ebbe anche una

(1) *Storia degli Stati Italiani dalla caduta dell'Impero Romano fino al 1840*, di E. LEO, professore di Storia all'Università di Halle, prima versione dal Tedesco di A. LOEWE ed E. ALLERI. Firenze, 1842, Lib. IV, Cap. I, § III pag. 146.

» volta un sovrano di sua nazione. Ma cadrebbe in grande errore chi
 » lo volesse paragonare agli antichi re ed anti-re, che abbiamo veduto
 » succedersi allora con tanta rapidità, portati sempre a quel grado da
 » una fazione. Il nuovo monarca del quale abbiamo a parlare sorse uni-
 » camente per fatto suo proprio » (1).

Questa sentenza sovra l'elezione di Ardoino, della quale ripareremo nel Capitolo VII di questi studi, sebben contraria al parere che abbiamo attribuito al Rovelli, e che io pure professo sovra il medesimo argomento, basta a chiarirci siccome lo scrittore Tedesco va per lo meno d'accordo col nostro, nel ravvisare come cosa speciale di quell'età l'atto di legittima indipendenza che portò Ardoino sul trono. Le conseguenze poi che egli deduce dall'influenza del regno di questo principe sovra le cose italiane, aggiungono l'autorevole testimonianza di un uomo di vaglia, come il dottor Leo, sovra l'importanza storica che vuoisi attribuire ad Ardoino: importanza o non avvertita, o male avvertita da' nostri scrittori prima del Rovelli e del Leo.

Ma se questo dotto Professore non ricusò, come il Denina, d'associare il personaggio d'Ardoino a' fatti storici, egli andò fuori via appellandolo cogli antichi scrittori Tedeschi un usurpatore, un masnadiero, e col dire, che egli s'appigliò per disperato al partito di proclamare se stesso re d'Italia per isfuggire i meritati gastighi: singolar ripiego al certo! Gli uomini del medio evo non si piccavano di soverchia previdenza: nè io so qual timore, in quel punto, potesse destare in Ardoino un re di Germania, non ancora eletto, posciachè la potenza imperiale reale di Ottone III dopo tante sentenze fulminate contr'esso, non aveva fatto prova veruna di snidarlo dalle sue rocche d'Ivrea.

Quanto al titolo di masnadiero, s'egli lo riferisce a' modi barbarici con cui prima e dopo d'esser eletto re, Ardoino portò la guerra a' vescovi del suo marchesato, od a' fautori de' Tedeschi, diremo, che molto bene gli è dovuto: aggiungasi tuttavia, che non il solo Ardoino, ma tutti i principi di que' tempi combattendo a quel modo, tutti vogliono essere appellati masnadieri. Che se il nome di *masnadiero* implica come l'altro di *usurpatore*, la qualità di ribelle, egli è vero che Ardoino non fu tale nel cingere la corona d'Italia datagli da' suoi *Pari*. Perciocchè

1) LEO. Ibid. p. 154.

(se, contro l'avviso di severi scrittori (1), si vogliano per poco ammettere le pretese germaniche) alloraquando Ardoino fu eletto re, non solo nè Arrigo di Baviera, nè altro principe non era succeduto al morto Ottone III re di Germania, ma i popoli di questo reame garrivano coll'armi impugnate per la scelta di un successore. Ad ogni buon conto colla morte dell'ultimo Ottone senza prole, era stato disciolto il patto di soggezione corso tra gl' Italiani e que' tre Principi della casa di Sassonia, se patto poteva chiamarsi l' avere gl' Italiani riconosciuto per loro re ognuno de' tre Ottoni re di Germania, ma dopo soltanto che la Dicta Italiana lo aveva legittimamente eletto e proclamato re d'Italia.

Nè meglio raccaprezzo da' quali documenti il signor Leo abbia tolto, che Ardoino mentre era marchese de' comitati d'Ivrea, ed in virtù della potenza di Conte del sacro palazzo, facesse ammazzare Pietro I vescovo di Vercelli ed ardere il di lui cadavere per punirlo di certe usurpazioni vere o supposte (2). Il grado di Conte del sacro palazzo accresceva certamente in quel punto l'autorità e l'alterigia del marchese Ardoino, ma noi vedremo dal confronto di alcuni diplomi di Ottone III, e coll'aiuto di altri documenti, siccome Pietro fu ucciso mentre all'uso di quasi tutti i grandi ecclesiastici di quell'età combatteva contro le genti d'Ardoino, le quali dopo di aver preso la città davano l'assalto alla chiesa di Vercelli, ammazzando, incendiando, dilapidando, come sogliono soldatesche sfrenate.

Del rimanente queste osservazioni ch'io di buona fede contrappongo a quelle del professore di Halle, non mirano punto ad assolvere il marchese d'Ivrea da' molti suoi eccessi, e meno ancora a tesserne il panegirico. Chè sebbene io non ammetta in modo assoluto la sentenza degli antichi cronisti della Germania, i quali pel vecchio peccato d'adulazione stamparono sul capo d'Ardoino un' ingiusta nota d'infamia, io non vo co'seicentisti fantasticando meraviglie sul conto suo. Ardoino scompagnato da' fatti storici de' suoi tempi, non è nulla per me, che uno di que' tanti grandi d'Italia, per lo più, come di modi così di natura efferata e barbarica, de' quali non può venir in pensiero a nes-

(1) ROVELLI. *Storia di Como*. P. II. Diss. prelim. art. 2.

(2) LEO I c.

suo di farsi il panegirista. E sì spero che nel corso di questi studi apparirà più d'una volta che le mie indagini non mi condussero verso di lui a giudizi o troppo favorevoli o meno che spassionati. Egli si fu pertanto col fermo intendimento di scoprire la verità, ch'io presi a fare nuove ricerche sovra Ardoino, sovra le cose accadute a' suoi tempi non solo nel reame d'Italia, ma in tutte le altre parti della terra italiana, indagando se i fatti che vi si operarono, si collegassero, ed in qual guisa, con quelli de' quali fu parte il re Ardoino.

Poco mi sono brigato sia della provenienza che della discendenza di questo marchese d'Ivrea. Il regno d'Italia essendo a' suoi tempi tuttora elettivo, egli non vi aveva nessun diritto, quand' anche l'origine sua fosse stata regia, e che suo padre Dadone fosse nato da Berengario II re d'Italia, come ad un dotto scrittore sembrò probabile (1), prima che un documento recentemente da me trovato in Vercelli non venisse a provare il contrario; nè parve a me potesse essere stato un titolo per Ardoino l'essere nipote di Berengario II re odiato e tradito da' padri di quegli elettori che ora a lui ponevano sul capo la corona d'Italia. Quindi dunque ogni ricerca sopra i di lui maggiori riesciva perfettamente estranea al mio scopo, come lo era pure e molto più, il tessere un albero genealogico de' di lui discendenti.

Le minute indagini da me fatte ne' principali archivi d'Italia, ed in quell'immenso pelago della biblioteca reale in Parigi, non mi fruttarono dapprima, che un solo documento inedito, ed è un diploma di Ardoino di poca importanza (2). Quelli parimenti inediti, che lo storico di Como enumera come esistenti nell'archivio di quella città, od in quello dell'isola Comacina, furono invano da me cercati: mi fu risposto essere periti nell'invasione de' Franzesi del 1798.

Vero è, che da questa disdetta (qualunque ne sia stata la vera cagione) poco danno me ne incolse, perciocchè la maggior parte di que' documenti, i quali non sono che ripetizioni di formole beneficarie, essendo stati nelle mani del Rovelli, nulla di più non vi avrei probabilmente potuto scoprire di quanto egli stesso vi ha scoperto.

Più tardi poi, e dopochè il mio lavoro era quasi che terminato,

(1) S. QUINTINO. *Lezioni intorno ad argomenti numismatici*, p. 9 e seg.

(2) Vedi al Capo X. di questi Studi, e nell'Appendice al n.º 26.

alcune membrane furono trovate negli archivi capitolari di Vercelli e d'Ivrea; di queste or ora parleremo, e meglio nell'appendice, dove useremo al testo di esse alcuni schiarimenti.

Il non avere trovato nè diplomi nè altri scritti che trattino di questi fatti nella biblioteca vaticana, non era ragione bastante per poter asserire che nessuno non ve ne esistesse, posciachè ognuno sa con quante difficoltà, quasi sempre insuperabili, si ottenga d'aver fra le mani alcune delle carte, che compongono quell'immensa congerie: ma il non averne rintracciato nessuno in quella di Parigi, dove alle facilità d'ogni maniera s'aggiunsero per me l'amorevolezza e la longanimità di quegli scienziati, che vegliano alla conservazione della biblioteca reale (1), mi valse se non altro di una prova negativa della loro esistenza, e d'un plausibile argomento per sospettare che quanto sul conto d'Ardoino potè essere stato scritto da contemporanei, sia stato distrutto o per terrore da' vinti o per invidia dal vincitore. Epperò lo storico Arnolfo, il quale scriveva una cinquantina d'anni dopo, nel rendere breve ragguaglio delle geste del re Ardoino, non adduce verun'altra testimonianza che un'*oral tradizione* (2). Come compenso di tale difficoltà vennero, sebben tardi, i documenti ch'io dissi trovati nelle città di Vercelli e d'Ivrea.

L'archivio capitolare di Vercelli, ricchissimo, come ognuno sa, di codici, di diplomi e d'altri documenti, era stato più volte visitato da valorosi paleografi: questo fece (e me ne incolpo) ch'io trascurai di recarvivi quand'era miglior tempo, persuaso di non trovar nulla che già non fosse stato veduto e raccolto. Ripeto ch'io me ne incolpo, perciocchè in eotal maniera di ricerche egli non si vuole mai fare a fidanza con chi dice d'aver veduto; quegli che fa indagini generali non suol brigarsi di minuti spogli: e le particolari vogliono esser fatte da chi attende ad uno speciale lavoro, e solo può conoscere quello che fa pel caso suo o non fa.

(1) Non poteo io qui ricordare individualmente tutti que' dotti e cortesi signori Conservatori della biblioteca reale, nomino il signor di CHAMPOLLION-FIGEAC, cavaliere della Legion d'Onore e de' Ss. Maurizio e Lazzaro, al quale io era specialmente raccomandato, pregandolo di gradire l'offerta della mia sincera gratitudine, per le sue infinite gentilezze, e per le facilità d'ogni maniera con cui si compiacque di favorirmi nelle penose mie ricerche.

(2) «Superiori volumine Audita tantum utcumque exsummare tentavimus». ARNOLFI *Mediol. Hist. Lib.* 2. c. I. R. I., T. IV.

Arrivato adunque colà in pessimo punto, mentre da quel venerando Capitolo si attendeva ad un nuovo ordinamento dell'archivio, non mi fu dato di eseguirvi quel minuto spoglio che altrove con minor fiducia, ma con più frutto, ebbi a fare, e due soli documenti mi si lasciarono trascrivere (1). In questo, i canonici di Vercelli usavano la pienezza de' loro diritti.

Uno di questi documenti, sebbene di secondaria importanza per me, vale a vincere alcuni errori volgari sulla provenienza d'Ardoino: l'altro che è un'omelia detta da Leone vescovo di Vercelli sul principio del secolo XI, giova a correggere quelli di cui è piena la pubblicazione fattane dall'Ughelli (2). La scoperta di quelli d'Ivrea fu fatta nell'ultimo settembre dal cavaliere Peyron, e fu inopinata, poichè gli si affacciarono mentre egli attendeva a maggiori e più erudite ricerche. Ma siccome tutte queste carte d'Ivrea sono di tempi anteriori al regno di Ardoino, così riescono di mediocre aiuto per collegare i fatti di lui colle Vicende Italiane. Tuttavia la narrazione di quelle cose municipali, non è disutile, se si considera alla qualità de' fatti, che in varie città d'Italia in quel tempo accadevano, tutti tendenti ad un medesimo scopo, sebbene con mezzi e rivoluzioni diverse, e senza colleganza, nessuna fra essi, l'affrancamento cioè della risorta popolazione, dalla tirannide de' maggiori vassalli. Ivrea seguì l'esempio di altre città, e le gare che ell'ebbe col proprio vescovo, delle quali fu gran parte Ardoino, riempiono nella storia di questo principe un vacuo occupato nelle narrazioni de' seicentisti da un subbisso di favole. Ond'è, che per quello che a lui s'appartiene giova non solo a chiarir di menzogna quanto s'andò da quegli scrittori spacciando sovra la civiltà e la santità d'Ardoino, ma a farne anzi meglio conoscere l'impetuoso e sfrenato carattere. Ed avvegnachè le cose che vi sono narrate precedano immediatamente la chiamata di lui al trono d'Italia, così logica deduzione sarebbe stata l'avvisare che questa dovesse essere in qualche modo connessa con que' fatti, ed apparirne il naturale risultato. Eppure, non solo la conseguenza non tiene qui colle premesse veruna attinenza, ma di più vi si mostra

(1) Non cessò per questo di rendere le dovute grazie al signor canonico De-Candenzì archivista del Capitolo, per le molte gentilezze a me compartite.

(2) UGHELLI *It. S. T.* IV. *De Ep. Vercell.* col. 773. — Anche il FERRARIO ne ha pubblicato un estratto nel Libro *Vitae Episcoporum Vercell.* Edit. romana

in aperta contraddizione. Nel Capitolo VII di questi studi, trattando dell' inopinata esaltazione d'Ardoino, noi svolgeremo maggiormente questo curioso antagonismo, marchio caratteristico delle passioni di quell'età novella.

Dalle cose fin qui discorse ognuno vedrà siccome questo lavoro non poteva oggimai aggirarsi che sovra que'dati medesimi che avevano servito d'argomento a' precedenti scrittori. Poca speranza adunque di ottenere quello scopo ch'io gli aveva prefisso, di diradar le tenebre da un curioso tratto di Storia Italiana. Tuttavia io non me ne sconsolai, avvisando che uno scritto speciale di critica, dovendo per l'intrinseca sua qualità addentrarsi in molti più particolari, che non sono quelli richiesti da una generale storia, come gli Annali del Muratori, o da elogi biografici: e che cercando questi particolari nel paragone de' sincroni monumenti appena accennati da quell'illustre scrittore, e non interrogati da que' biografi lodatori, io verrei pur sempre ad eseguire un lavoro intentato ed utile se non a scoprire tutto il vero, a torre per lo meno di mezzo molte inutilità. Di questo mi persuase il confronto de' cronisti e de' pochi storici di quel tempo, co' diplomi imperiali, con quelli di Ardoino, colle carte private e pagensi, e colle altre poche scritture che per me si trovarono, confronto che pone in chiara evidenza quale fosse la vera causa della rivalità sua con Arrigo di Germania. Egli si sa che in un tempo in cui nuovi bisogni e nuove tendenze si manifestano in una Popolazione, una parte solo di questa dapprima accetta le novità, quando la parte maggiore, sia per uso che per proprio utile, ama gli ordini antichi ed avversa ogni mutazione. Certo non la persona d'Ardoino, uomo ambizioso e prepotente, doveva trarre a sè per propria virtù l'amore degl'Italiani, e tanto meno in paragone d'Arrigo di Germania, che aveva fama di pio, di giusto, d'osservator delle leggi. Eppure fra gl'Italiani che parteggiarono per Arrigo, noi troviamo i Grandi, gente corrotta e di costumi efferati e tirannici, che altra fede, altra legge, altra patria non conoscevano che l'utile loro, mentre all'incontro coloro che tenevano per Ardoino erano i *secondi militi*, cioè i liberi uomini del ceto inferiore, quelli, siccome vedremo, che su' varii punti della terra italiana s'armarono per difendere se stessi ed il minuto popolo dall'oppressione de' principi, e che in Ardoino scorgevano il rappresentante dell'indipendenza da' forestieri: uomini cui se la corruttela del tempo e della schiavitù sofferta non avea resi nè virtuosi nè inci-

viliti, pur qualche scintilla di virtù e di civiltà sentivano in petto, qualche carità pella comune oppressione, qualche pudore pel dominio forestiero. La rivalità non era dunque tra uomo e uomo, tra principe e principe, ma tra il diritto e la forza, tra l'indipendenza e la tirannide. Che se la causa non fu vinta in quel punto, forse in gran parte per la colpa dello stesso intemperante Ardoino, pure fu nobile il movimento e generosa la resistenza, grossa di splendido ed onorato avvenire.

Riepilogando pertanto le cose fin qui discorse, conchiuderò col dire che se la mancanza di nuovi documenti, che oggimai posso chiamare assoluta, non mi ha concesso di dare al mio lavoro quel più ampio sviluppo ch'io mi andava ripromettendo, non avrò del tutto fallito al mio scopo, ove colla lunga e disgustosa mia fatica io sia riuscito a distrurre le favole che ingombravano finora l'esistenza di quest'ultimo re d'Italia, ed a chiarire in parte almeno i primordi della nuova vita che saprò in quegli anni agli Italiani, sola e vera cagione dell'innalzamento d'Ardoino.

CAPITOLO PRIMO

SUNTO DELLE COSE ITALIANE SOTTO LA DOMINAZIONE DEGLI OTTONI

961-1002.

Allorchè Ottone I re di Germania scese in Italia nell'anno 961 contro i re Berengario II ed Adalberto, un esercito di sessantamila Italiani stava a campo presso le Chiuse dell'Adige per difendere l'ingresso nelle provincie del reame.

Quivi i capitani, grandi vassalli del re, cioè i duchi, i marchesi ed i conti, signori delle varie città e provincie italiane, protestarono al re Adalberto, siccome essi non farebbero resistenza, ove Berengario suo padre non rinunciasse a lui la corona. Alla qual cosa, per gli uffizi di Willa sua moglie non avendo Berengario acconsentito, l'esercito si disciolse, ed Ottone ebbe il regno d'Italia (1).

Questo solo fatto è bastante di per se a dimostrare le fineste condizioni, nelle quali si trovava l'Italia alla metà del secolo X.

In quel fluttuare perenne da un re nazionale ad un re forestiere, cui soggiaciuto aveva questo reame dopo la morte di Carlo il Grosso (888), la potenza de' grandi vassalli già nominati, a' quali conviene aggiungere alcuni vescovi, e gli abbati de' maggiori monasteri, tutti distinti col nome di *Principi* (2), questa potenza, dico, s'era fatta quasi

(1) « Volueramus, domino rex, ut Papiam cum paucis pergas, et tuo genitori dicito, quatenus » Bardorum regnum sub vestra ditione committat, quia nos minime sub illius potestate amplius » perduramus. Si vobis committit regnum, totis viribus pugnamus; sin autem, Italiae regnum ex- » lero regi committimus: quia saevitiam illius, suaeque coniugis omnimodo sustinere nequimus. » Sed dum talia patri, matrique intimasset, pater vero dictis eius obtemperavit: mater namque » dicto eius nullo modo assensum dedit. Quapropter ad Clusas reversus est, et suis Comitibus » omnia propalavit. At illi omnes irati sunt, proficiensque illum reliquerunt, et unusquisque in » suis urbibus remansit. Otto rex namque sine impedimento Italiam introivit, atque Italiae re- » gnum obtinuit. » (*Hist. Princ. Longob. Anon. Salernitani. Pars VII in Rer. Ital. Ser. T. II. p. 299*).

(2) « Principes regni » (*Annulphus Hist. Mediol. Lib. I. Cap. 15, R. I. T. IV*).

assoluta ed indipendente. Grandissima già era l'autorità loro per la costituzione di Carlo Magno, avvegnachè oltre al possedere il comando delle soldatesche raccolte ne' propri Comitati, e che alla chiamata del re ogni vassallo di prim' ordine doveva portare in campo, la qualità di elettori e quella di legislatori di cui godevano i conti nelle diete generali, l'amministrazione della giustizia, il maneggio delle cose civili, e finalmente l'inamovibilità delle loro cariche, dalle quali fuorchè in certi difficili casi, e sempre diffiniti dalle leggi, non potevano essere rimossi (1), mettevano in loro balia tutto il nerbo della pubblica forza.

Temperavano alquanto quest' eccessivo potere, le cariche di *regio Messo* e di *Conte del sacro palazzo*, qualità di magistrati supremi, l'uno per a tempo, l'altro durevole, a' quali salivano le appellazioni dalle sentenze e da' soprusi de' conti. Ma le nomine a questi uffizi eransi fatte più rare in quegli anni tempestosi e pieni di sommovimenti, ne' quali inoltre per la debolezza di que' re s'andava accomunando l'abuso (più tardi stanziato per legge), che nel governo de' comitati a' padri succedessero i figliuoli (2).

Per le quali cose più e più s'erano i principi del regno iti avvezando a tenere se stessi come signori assoluti delle loro provincie, epperò a non curare la potestà del re, usando a loro talento ogni maniera di tirannidi.

Quale fosse in quel tempo lo stato del popolo, non è cosa difficile l'immaginarlo. La maggior parte giaceva ne' varii gradi di quella schiavitù, trista eredità del mondo romano, che più era rinvigorita sotto l'effferato dominio de' Longobardi: e la mancanza delle municipali istituzioni (soprattutto nella superior parte del regno, prima provincia stata da que' barbari manomessa), o la prepotenza de' Grandi, che impediva il beneficio di quelle che forse erano qua e là rimaste, tenevano i pochi liberi uomini in una condizione, se vale il dirlo, peggiore della schiavitù stessa, cosicchè molti di essi sfiduciati d'ogni salute, per affrancarsi dalle vessazioni del fisco aveano fatto traffico della nominale loro libertà, vendendo se stessi e le loro sostanze al servizio de' più

(1) ROVELLI, *Storia di Como* P. II. pag. VIII. Milano 1794, in 2.^o

(2) *Chonradi I. Augusti lex*, in *Rer. Ital. T. I. P. II. p. 177.* — ROVELLI l. c. p. LXXIII — GIUCINI, *Memorie della città e della campagna di Milano*. P. II. p. 302.

potenti monasteri e delle chiese, od a quello degli stessi loro oppressori (1).

In tanta bassanza adunque stavano gl' Italiani sul finire di quel tempo, cioè negli ultimi anni di Berengario II. Pessimo e lamentevolissimo stato, che gl' storici di quell'età, forse perchè scrissero sotto la dominazione degli Ottoni, si compiacquero di riferire alle tirannidi di Berengario, sebbene, come già osservava il Muratori (2), non abbiano specialuente dichiarato quali si fossero coteste tirannidi, rese quand'anche necessarie dall'insolenza de' Grandi.

In condizioni assai diverse appariscono gl' Italiani sul principio del secolo XI. Le predicazioni che annunziavano la fine del mondo dopo l'anno millesimo aveano scosso gli animi. Il timore de' meritati castighi spingendo i ricchi peccatori a ricomparsi da' loro delitti con opere di cristiana carità, aveva rese più frequenti le manumissioni degli schiavi, e la possibilità d'ottenere la libertà, aveva in sul cadere del secolo precedente accesi in questi gli animi a conseguirla. Molti che prima torpivano nella schiavitù, svegliandosi a nuova speranza s'erano industriati di ottenere, comperare, carpire in qualche modo la libertà (3). Così una superstiziosa credenza aveva dato aiuto al vero spirito della legge di Cristo, la quale col proclamare sin da principio la fraternità e l'eguaglianza degli uomini, voleva distrutta la schiavitù: La cosa portò i suoi frutti; dal desiderio della individuale libertà, gl' Italiani (per le

(1) MURATORI. *Ant. Med. Aev.* Diss. 67 et 68. — ROVELLI l. c. art. I. e II. — « Libertas tunc » vocabatur Episcoporum subiectum esse imperio ». (PAGI, *Critica in Ann. BARONI ad an. 966*).

(2) MURATORI. *Annali d'Italia ad an. 960*. — ARNOLFO storico italiano assai veridico scriveva verso la metà del secolo seguente: « Oderant autem compatriotae regem Berengarium, propter » nimiam uxoris tenaciam, quam Willa dicebatur, et suam ex parte sacvitiam. » (*Hist. Mediol.* lib. I. c. 6), le quali parole concordano col testo dell'Anonimo Salernitano citato nella nota (1) sul principio di questo Capitolo. — Del resto la qualificazione di tiranno attribuita dagli storici moderni a Berengario fu stabilita ancora sopra un errore assai curioso dell'amanuense di cui s'ebbe a servire il MURATORI per la Cronaca della Novalesa, nel T. II. P. II. della sua raccolta. Ivi ne' frammenti del Libro V. Cap. V. col. 232 leggesi: « Huius temporibus quidam vir exstitit clarus genere, sed » clarior fide, nomine Albertus marchio, pater huius Berengarii tyranni. » Invece di quest'ultima parola, il Codice originale che si conserva in Torino ne' R. archivi tiene: « pater huius Berengarii, » ut aiunt. » Questo codice, che ora per le cure della R. Deputazione sopra la Storia Patria, si sta pubblicando, riuscirà di molto interesse per gli studiosi: esso fu ridotto a miglior ordine, ed a più retta lezione per opera del signor avvocato Combetti regio impiegato negli archivi suddetti.

(3) *Epistola LEONIS Monachi, Vercellensis Episc., apud FERRERIUM in vita s. Eusebii. Romae,* p. 154

cause che poi si vedranno) passarono presto a quello della libertà collettiva. Noi vedremo ne' primi anni dopo il mille in alcuna delle città principali dell'Italia superiore i *buoni uomini*, cioè i *liberi*, già essere a parte del governo delle proprie cose (1): in altre, soprattutto nelle marittime, affrancarsi dalla signoria de' conti, far trattati, combattere per proprio conto, or contro i barbari, or contro i vicini, usare insomma una parte di quell'autorità, che nel secolo precedente stava in apparenza nelle mani del re, e di fatto in quelle de' principi del regno. Ma anche costoro aveano provato in quegli anni mutazioni essenziali. Una porzione di quella loro smodata potenza era da essi con parte del territorio passata ne' capi del clero, d'onde poi suddividendosi, scendeva nelle altre classi della popolazione. Ma se la prepotenza loro aveva con ciò trovato un qualche freno, la corruzione che, siccome abbiamo detto, a' tempi di Berengario II lussureggiava fra i principi, non solo non era cessata, ma coll'accrescersi delle ricchezze delle chiese e de' monasteri, non avea fatto che estendersi dagli uni agli altri. A' tempi de' quali intraprendo lo studio, essa era intollerabile soprattutto ne' Grandi ecclesiastici (2). Le contumelie pertanto che frequenti gli scrittori tedeschi di quel tempo mandano contro gl'Italiani, non vogliono, come si usa, essere riferite al popolo d'Italia, appena appena sulle prime mosse del suo risorgimento, ma a' soli Grandi tanto secolari che ecclesiastici, per lo più d'origine forestiera, presso de' quali quelle mutazioni di signoria non avevano fatto altro che suscitare sdegni ed invidie, ed ogni altra maniera di basse e vergognose passioni. La qual cosa io riferisco non per vano risentimento di orgoglio nazionale, ma per amore di verità, avvegnachè non solo ingiuste, ma nulle riescono quelle accuse tedesche, se si considera quale fosse lo stato del popolo d'Italia in quegli anni, e quanto tempo ci dovesse correre prima che pel beneficio di leggi migliori e di più onorate istituzioni, gl'Italiani dalla condizione di schiavi passassero in un grado di civiltà più confacente alla dignità d'uomini e di cristiani.

Ma sebbene in preda alla corruzione, più non aveano i principi d'Italia in quello spazio di tempo (961-1002) rinnovato la prova di opporre alla dominazione de' re che aveano occupato il trono d'Italia dopo la

(1) ROVELLI. *Storia di Como*, P. II. p. LXXIX e LXXX.

(2) GLABRI Rodulphi *Hist. Lib.* II. c. VI; ap. DUCHESNE *Hist. Francor.* T. IV. p. 17. — ROVELLI l. c. P. II. p. 10.

morte di Ottone I, quella di altri principi, tante volte messa in uso da' Grandi, e che dopo la morte di Carlo il Grosso, siccome scrive Liutprando, fornava la base della politica italiana (1).

Tali mutazioni occorse nello spazio di quarant'anni erano in gran parte il frutto della dominazione de' tre Ottoni della stirpe di Sassonia; frutto immenso e cagione di frutto maggiore, perchè principio della quasi assoluta indipendenza delle Repubbliche Italiane dalla soggezione tedesca, prodotta per una enriosa anomalia dall'essere il reame d'Italia passato in questo tempo da' principi italiani ne' principi della Germania.

La dominazione imperiale degli Ottoni fu dunque suo malgrado favorevole alla indipendenza italiana. Il carattere arrisicato di questi tre principi, sparso di un non so che di generoso, che temperava la nativa loro barbarie, e l'usata burbanza di chiunque tiene la forza: l'immenso potere di cui la dignità imperiale giunta a quella di re di Germania e d'Italia gli ebbe investiti, e più d'ogni altra cosa la costanza loro nell'usare i modi medesimi per arrivare quel fine a cui miravano, cioè la depressione de' grandi vassalli, posero gli Ottoni in grado di operar cose che invano avrebbero tentato di fare principi nazionali. Con tutto ciò, quantunque questi principi pe' tempi loro assai colti nelle liberali discipline, s'invogliassero d'imitare gli uomini grandi dell' antichità, non si dee tacere siccome gran parte ebbe nelle cose da essi operate in Italia, più che un generoso intendimento, la necessità de' tempi.

Del resto la venalità e l'ingordigia de' principi, co' quali Ottone I dovette essere largo di ricompense, l'ammonivano che, siccome più assai all'avarizia loro che non alle tirannidi di Berengario da lui superato col tradimento di quelli, andava debitore del suo trionfo, così nel concedere i nuovi *onori* patteggiati o richiesti da' traditori, egli dovea far opera di levare a' principi d'Italia il modo di rinnovare a suo danno somiglianti sperginuri, e collegarne siffattamente gl'interessi con quelli della sua potenza, che nulla contro di lui potessero quindi intraprendere senza porre a repentaglio la propria fortuna (2).

Così fin dall'anno 932, nel restituire a Berengario a titolo di feudo il reame d'Italia (d'onde poi le pretese tedesche), egli creava suo

(1) « Semper Italienses geminis uti dominis volunt, quatenus alterum alterius terrore coercerant. » (LIUTPRANDI *Antipodosis* Lib. I. § 37; ap. PERTZ *Monum. Germ. Historica* T. V. p. 284).

(2) LEO *Hist. d'Italie*, traduct. de M. DOCHERZ, T. I. Liv. IV, Ch. 2.

arcicapellano Manasse, già arcivescovo d'Arles, uomo avaro e insaziabile, e lo soccorreva d'armati per impossessarlo dell'arcivescovato di Milano, ma lo rimuoveva con questo dal passo delle Alpi che affidava ad Arrigo suo fratello, e che Manasse come possessore delle chiese di Trento, di Verona e di Mantova aveva tenuto fino allora in sua balia ed aveva aperto a lui stesso (1). E allorchè dieci anni più tardi, dislato interamente il medesimo Berengario, e già cinto della corona imperiale tornava Ottone in Lombardia, egli concedeva a' principi che aveano per lui parteggiato, nuove cariche, provincie ed onori, ma molti trasportava da un luogo ad un altro, alcuni arricchendo di nuovi comitati, altri privando di parte degli antichi, come meglio avvisava acconciarsi colla propria di lui sicurezza (2).

Ma largo soprattutto e munifico facevasi Ottone verso i grandi ecclesiastici, i quali si erano mostrati primi ad abbandonare Berengario, e ad accostarsi al re di Germania (3).

Già sotto la dominazione de' Franchi era l'uno e l'altro clero cresciuto in ricchezza e in potenza. Le donazioni di castella, di curtì, di benefizi fatte da' re o da' privati, aveano destato di molte nuove relazioni fra il clero e i donatori, e tra questi ed i conti, a' quali i beni donati e gli uomini che ne dipendevano erano prima sottoposti. Cominciarono pertanto i vescovi, gli abbatì e gli altri capi delle chiese a ricorrere a' re od agli imperatori per sottrarre le cose donate alle opposizioni ed alle molestie de' conti, ed in ciò la destrezza del clero non fece fallo. Ottennero però facilmente l'*esenzione* di que' beni dall'autorità de' vassalli nel cui territorio erano situati. Tali parti de' comitati strappate dal dominio de' grandi vassalli, perchè rese immuni dall'autorità loro, ebbero il nome di *immunità* (4). Questo fu soprattutto a' tempi di Carlo il Grosso. Sfasciatasi di poi per la morte di quell'imperatore la vasta monarchia de' Carolingi, seguirono in Italia gli agitatissimi tempi delle lotte tra Berengario I duca del Friuli, e Guido duca di Spoleto, ed i non meno

(1) Cfr. LIUTPR. *Antapod.* Lib. V. c. 26. l. c. p. 334. — GIULINI *ad ann. 951. 952* in Mem. di Milano, P. II. — MURATORI *ad ann. 935, 932.*

(2) MURATORI e GIULINI *ad ann. 962.* — DOMNIZONIS *Vit. Mathild.* Lib. I c. I. R. I. T. V p. 349. — SCHEIDT *Orig. Guelf.* Lib. II. §§ 6 et 7.

(3) MURATORI e GIULINI l. c.

(4) VESME *Vieende della Proprietà in Italia*, in Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, T. XXXIX. Cap. IV. pag. 399.

tristi sotto Lodovico III, Rodolfo, Ugo di Provenza, Lottario e Berengario II, ne' quali i vescovi e gli abbatì de' più insigni monasteri vendevano i voti loro come elettori del regno a' pretendenti il trono d'Italia, e questi non fallivano alle profferte, largheggiando cogli elettori di donazioni, d'*immunità* e d'ogni maniera di diritti regali, e quindi d'interi comitati (1).

Questo sistema che arricchiva il clero e limitava l'autorità de' conti, tanto più doveva gradire ad Ottone in quanto che come principe forestiero tenendo egli la sede del suo impero in Germania, era costretto lasciare l'Italia troppo tempo in balia di que' prepotenti vassalli. Ancora per esso e riparava all'uso già accennato dell' eredità de' primarii beneficii; perciocchè i vescovi e gli abbatì investiti di queste nuove donazioni non avendo eredi necessari, poteva il sovrano alla morte loro, coll'influenza ch'egli sapeva usare nelle elezioni ecclesiastiche, far cadere la scelta a suo talento, e così arricchire colle fatte donazioni i propri aderenti, gli amici e gli stessi suoi congiunti.

Per la qual cosa i diplomi che largivano al clero somiglianti immunità ed esenzioni, furono moltiplicati con una frequenza grandissima sotto Ottone I e sotto gli altri due Ottoni di lui successori, e le conseguenze che ne derivarono rapide e fondamentali. Ma se per un lato la regia autorità tarpava in tal guisa l'ali alla prepotenza de' conti, e ne frenava la soverchia indipendenza, essa cadeva in un male non meno funesto all'esercizio della propria potenza. L'uso che andava facendo, lecito a' grandi vassalli sì secolari che ecclesiastici, di concedere a titolo di beneficio le loro tenute a un ordine di vassalli secondari, ed a questo dava lo stesso diritto verso altri vassalli inferiori, infievoli per modo l'autorità suprema suddividendola in molti, che alla fine essa più non potè reggere al popolo, il quale s'avvide d'esser egli il solo vero possessore d'ogni pubblica forza (2).

Questo intellettuale progresso agevolò nella popolazione italiana lo sviluppo di un altro elemento di vita, che da gran tempo andava serpendo negli animi, ma che la feroce anarchia del secolo X aveva tenuto attutato e sepolto, ed ecco quale e' si fosse.

(1) MURATORI *Ant. Med. Aevi* T. VI passim et col. 39 et 40.

(2) Cfr. MURAT. *Ant. M. Aevi* T. IV. Diss. XLV pass. — ROVELLI *St. di Como* P. II. p. LXXVIII.

Le invasioni de' Saracini, che nel precedente secolo avevano posto loro stanza nella Puglia, nella Calabria, e sulle falde orientali delle Alpi marittime: le più feroci invasioni degli Avari o Magiari od Ungri, che dir si vogliano, gente Finnica o Scita (1), avevano trovato l'Italia incapace di resistenza. Per la lunga pace che aveva preceduto a quelle invasioni, le antiche fortificazioni, opere de' Romani e de' Goti, erano cadute in rovina: rare perciò le città cinte di mura: rari i castelli con torri o baluardi: aperti i borghi, le terre, i casati: esposti gli abitatori a chiunque si facesse ad assalirli.

Questo avevano provato le popolazioni allorchè quasi ad un tempo con quelle invasioni barbariche sorsero le contese per la corona d'Italia tra i duchi di Spoleto e del Frinli. La strettezza de' tempi e gl' imminenti pericoli resero (come sempre in casi somiglianti) liberali di privilegi i re d'Italia di quegli anni; e se prima la gelosia loro avea per legge proibito a' privati, anche possessori di benefici e d'onori, l'avere nel proprio territorio castelli cinti di baluardi e muniti di torrioni (2), allora il timore aveva mosso gl'imperatori e re d'Italia ed i principi Longobardi pe' ducati di Salerno e di Benevento, a concedere la facoltà di cingere di mura e di bastite le città, castella, borghi, curtì od altri beni allodiali, a chiunque o per cariche o per benefici o in altra guisa ne fosse possessore (3). Questa facoltà, osserva il Muratori, fu cagione che poco per volta le cose d'Italia cambiassero d'aspetto (4). Noi vedremo come le fortezze rinnovate in quel tempo giovassero quindi alla causa italiana, e come tardi si pentissero gl'imperatori tedeschi di queste facoltà concedute da' loro predecessori. Colla possibilità del poter difendere se e le cose sue, tornò l'amore del luogo natìo, e il desiderio vicendevole degli uomini d'una medesima città o terra, d'aiutarsi nella comune difesa, desiderio che colla forza d'associazione più rapidi avrebbe portato i suoi frutti, ove più presto fosse stata distrutta l'insolenza di coloro che si frapponavano al suo sviluppo.

Ad ogni modo non può rimaner dubbio, che la depressione della po-

(1) GIBBON *Hist. de la décadence etc. de l'Emp. Romain*, Paris, 1812, T. XI. cb. LV. p. 48 et suiv.

(2) MURAT. *Ant. M. Aev.* Diss. XXVI. col. 460.

(3) MURAT. *Ibid.* col. 465.

(4) MURAT. *Ibid.* col. 461.

tenza de' conti operatasi durante il dominio de' tre Ottoni, non sia stata la causa di un fondamentale cambiamento nelle cose d'Italia (1). Lo dimostra evidentemente l'uso introdottosi e già stabilito a' tempi dell'ultimo di quegli'imperatori, delle pubbliche adunanze del popolo co' vassalli e co' militi, cioè co' nobili (2), nelle quali s'agitavano, dibattevano e si stanziavano gli affari propri non solo nelle grandi città, ma ancora nelle terre e nelle ville, e vi si addiveniva a trattati ed a transazioni tra luogo e luogo (3).

Inoltre le nuove relazioni di cui si è fatto parola, insorte tra il clero, il popolo ed i vassalli aveano resi necessari nuovi magistrati e nuovi uffizi: gli uni dapprima esosi alle popolazioni, tutti indispensabili per la tutela de' diritti acquistati dalle chiese, dalle corporazioni d'uomini liberi, e da nuovi ordini di vassalli, e per le novelle transazioni che si operavano. E sebbene codeste innovazioni avessero luogo poco per volta, e che perciò le creazioni di nuovi uffizi progredissero lentamente, tuttavia sul finire del decimo secolo e sul cominciare del seguente alcune carte pubbliche fanno cenno di giudici municipali col nome semplice di *giudici*, vale a dire di *giudici del popolo*, a differenza degli altri sempre detti *giudici del re*, *dell'imperatore* o *del sacro palazzo* (4).

Così via via le popolazioni delle varie città e terre della superiore Italia andarono riacquistando dalle mani del duplice ordine de' vassalli l'esercizio degli interni regolamenti, al che tenne dietro dove più presto, dove più tardi il possesso del politico governo (5).

Ma mentre la è cosa evidente, che la rivoluzione operatasi nella so-

(1) L'osservazione di questo fatto trovasi più che espressa, accennata in qualche maniera dal ROVELLI nella sua *Storia di Como*, P. II. p. LXVI, LXVII e LXVIII, stampata in Milano sul finire del secolo scorso, prima perciò che il professore LEO, applicando all'Italia la dottrina delle *Essenzioni* stata già svolta ed esposta dall'EXCHORN verso le città di Allemagna (v. VESME op. cit.), non ne facesse ampia spiegazione nella sua *Storia d'Italia*, e nell'altra delle *Vicende della Costituzione Longobarda*.

(2) Nell'anno 996, primo dell'impero d'Ottone III, Giovanni vescovo di Modena stabilisce un cenobio di monaci presso quella città « cum consensu et notitia omniū eiusdem Ecclesiae Canonorum eiusdem civitatis Militum et Populorum. » (MURAT. *Antiq. Med. Aev.* T. V. Diss. 65 col. 374).

(3) ROVELLI op. cit. P. II. p. LXXXV.

(4) ROVELLI l. c. p. LXXXV. — *Charta an. 999. Ind. XII. an. II. Ottonis III. Imp. et Charta an. 1003. Ind. II an. II. Arduini regis.* — Anche il Cronista della Novalesa ricorda tali giudici. V. *Chron. Noval. Lib. V.*

(5) ROVELLI l. c. p. LXXXIX.

cietà italiana, la quale fa tempo dalla dominazione di Ottone I, è frutto del sistema delle esenzioni per cui gli abitatori delle campagne ed i vassalli, quasi tutti d'origine romana, col mezzo delle unive relazioni furono associati alle corporazioni d'uomini liberi, per lo più di stirpe germanica (1), la è cosa non meno chiara, che questi miglioramenti essendo accaduti grado a grado, di molto troppo dal Sigonio, e da quanti con esso opinarono, furono magnificate la munificenza e la liberalità di Ottone I, attribuendo ad esso il vanto di aver dotato la superiore Italia di municipali istituzioni, e riferendo a' tempi di lui la rinnovazione de' consoli annuali, a' quali più tardi le Repubbliche Italiane, a imitazione dell'antica Roma affidarono il loro reggimento. Bastante gloria è per Ottone l'aver dato la maggiore spinta verso un miglior ordinamento: e le esenzioni da lui concesse in gran copia o confermate, ne furono il mezzo (2). Molte altre cagioni quindi ne affrettarono e provocarono l'effetto. Delle quali una parte fu già accennata, ed alcune meglio appariranno in appresso.

Calcarono l'orme stesse del padre e dell'avo, e guidati alla medesima corrente, i due Ottoni re di Germania che tennero il trono d'Italia e quello dell'impero successivamente dopo la morte di Ottone I. Le parole scritte dal monaco Gerberto (papa Silvestro II) sulla tomba di Ottone II (3), ed i molti diplomi d'esenzione dati da questo principe alle città d'Italia, fanno fede siccome esso non meno di suo padre attese a frenare l'insolenza de' conti. Ancora attesta la stessa cosa, e dimostra a un tempo la già moderata tracotanza de' grandi vassalli alla morte di questo principe, il non essere quelli tornati agli antichi abusi durante la lunga minorità di Ottone III già riconosciuto a re d'Italia dalla Dieta generale adunata dal di lui padre in Verona: nel qual tempo, opportunissimo a siffatti turbamenti, essi non avrebbero cessato d'insolentire, ove già non fossero stati avvezzi a frenare la loro tracotanza, o fatti incapaci di usarla. Cinto poi la corona imperiale, mostrò Ottone III

(1) LEO *Histoire d'Italie* Liv. IV. Ch. I. p. 185.

(2) V. le citazioni precedenti.

(3) CVIVS · AD · IMPERIVM · TREMVERE · DVCE · TVLIT · HOSTIS
QVEM · DOMINVM · POPVLIQVE · SVVM · NOVERE · PARENTEM
OTTO · DECVS · DIVVM · CAESAR · CHARISSIME · NOBIS
IMMERITIS · RAPVIT · TE · LVX · SEPTENA · DECEMBRIS.

GERBERTI, *Epitaph. Ottonis*; apud DUCHESNE *Hist. Franc.* T. II. p. 807).

zelo non minore co' frequenti diplomi d'esenzione concessi all'Italia (1). Noi vedremo nel seguente Capitolo, trattando de' primordi d' Ardoino marchese d'Ivrea, come quest'imperatore s'adoperasse a punirlo dello aver portato l'armi contro il vescovo di Vercelli, il quale adducendo o protestando un'antica *esenzione* conceduta da Carlo il Grosso, occupava il comitato di quella città, uno di quelli compresi nella Marca d'Ivrea. Ma si vedrà siccome verso Ardoino gli uomini liberi di Vercelli si mostrarono animati da spiriti assai diversi da quelli che solevano dimostrare per lo avanti le popolazioni verso i loro conti. Avvegnachè se prima della dominazione ottoniana la tirannia de' principi, grandi vassalli del reame, faceva a quel modo che si è detto rifuggire i poeli liberi uomini al patrocinio delle chiese, qui all'incontro i Vercellesi rifuggirono ad Ardoino per iscampare dal dominio del vescovo; indizio che gl'Italiani già avevano ricevuto l'impulso che li traeva a un ordine novello. I tempi maturi faceano forza: le popolazioni invogliavansi di cose nuove: la gioventù italiana (così ricaviamo da Adalboldo scrittore di quegli anni (2)) sperava in Ardoino, cosicchè morto l'ultimo degli Ottoni, noi vedremo a lui volgersi in un baleno gli sguardi non solo de' principi clettori, i quali pe' loro fini chiamarono quel marchese d'Ivrea al trono d'Italia, ma quelli ancora di tutti gli uomini liberi e di quelli che aspiravano a libertà.

Noi vedremo come Ardoino corrispondesse a cotante speranze.

(1) VESME, *Vicende delle Proprietà in Italia* l. c. Lib. 3. c. 7.

(2) « Cum maioribus (Hardoinus) nihil tractabat, cum iuvenibus omnia disponbat. » (ADALBOLDI Traiectensis Episcopi *Vita Henrici Imp.* n.º 15 apud PERTZ *Mon. Germ. Hist.* T. VI. p. 627).

CAPITOLO II.

ORIGINE E PRIMI FATTI D'ARDOINO.

L'origine d'Ardoino e le cose da esso operate prima ch'egli fosse chiamato al trono d'Italia furono, come già si è detto, argomento di favolosi racconti. Di questi è cosa inutile il fare una rassegna; solo dirò pertanto della prima e delle seconde quanto ho potuto raccapezzare di vero, o di più probabile. Nè avrò a dilungarmi di molto, avvegnachè di que' tempi confusi, e malamente illustrati da' moderni, poche memorie siano rimaste nelle antiche storie e negli altri monumenti di quell'età. Tuttavia i nuovi documenti degli archivi capitolari d'Ivrea e di Vercelli (1), ci pongono in grado di accennare una parte de' fatti di quel principe prepotente, affatto ignota a' precedenti scrittori: ma circa all'origine della di lui famiglia poco potremo aggiungere a quanto già se ne poteva conoscere, ove non sia di chiarir sempre più per favolosa quella che le viene attribuita.

Una di queste carte (2) ci palesa un fratello di Ardoino, del quale nessuna cronica o d'altra maniera documento, nè prima nè dopo non fa punto parola. Il nome suo d'*Amedeo* destò il pensiero, che nella famiglia d'Ardoino cercar si dovesse il ceppo di quella degli Amedei, che dal finire del secolo XI in poi, si resero illustri come principi della nobil parte d'Italia appellata più tardi *Piemonte*, e che perciò un'origine stessa fosse comune alle due famiglie. Favoriva questo supposto il conoscersi dalle antiche storie siccome un altro Amedeo *nobilissimo milite* (così lo dichiara Liutprando) aveva fiorito fra noi a' tempi del re Berengario II (3): che un terzo di tal nome era sul cadere del secolo XI Conte del sacro palazzo e Messo di Lamberto imperatore (4): ed un

(1) Vedi il Proemio, e l'Appendice in fine.

(2) Doc. n.º 9. Append.

(3) LIUTPRANDI, *Antapod.* Lib. V. § 18; apud PERTZ *M. G. H. T. V.*

(4) MURATORI, *Ant. M. Aev.* Diss. 10. col. 497, ed *Ann. d'Italia ad an. 897.*

altro ancora nell' 828 Conte e Vasso di Lodovico Pio (1), da' quali non teneva il Muratori per impossibile congettura potessero discendere i reali principi di Savoia: sia ch'egli avvisasse che tutti quegli Amedei scendessero da un ceppo comune, sia che ad ognuno di essi si potesse rannodare egualmente quella generazione di principi.

Ma per quello dapprima che spetta agli Amedei che poi tennero il Piemonte, oggimai vuolsi abbandonare e questa ed ogni altra qualsiasi congettura. Un nuovo importantissimo documento da me testè trovato nell'archivio episcopale di quella medesima città d'Ivrea (2), potente argomento ci porge per affermare che Umberto II figlio di Amedeo II, e nipote d'Adelaide contessa di Torino, progenitore certissimo de' Reali di Piemonte, scende per via diretta da quell'*Ottone Guglielmo*, il quale dopo la caduta di Adalberto suo padre dal trono d'Italia fu trafugato bambino in Borgogna, ed ivi divenne conte di quella provincia (3).

Quindi per ciò che spetta all'origine di Ardoino il trovarsi il nome d'Amedeo nella sua famiglia, ed in tutta quella serie d'antichi militi e vassalli imperiali da me ricordati, con quegli altri che ancor si potrebbero aggiungere, gioverà forse un giorno a dilucidarne i primordi: perciocchè, siccome osserva il Muratori (4), Amedeo era nome non così esclusivamente romano, che di spesso non trovisi fra coloro che vivevano di legge salica e tra i Franchi. E infatti salico anch'esso era l'Amedeo fratello d'Ardoino, poichè abbiamo dalle scritture contemporanee che la famiglia di lui professava una tal legge, come la professava quell'altro conte Amedeo di sopra nominato, che viveva a' tempi di Lodovico Pio. Ad ogni modo questo Amedeo fratello d'Ardoino vivente di legge salica, gioverà, ripeto, a maggiori scoperte, ma quando solo qualche inedita carta verrà ad aiutare questo dato novello. Non è a dire con tutto ciò, che tra la famiglia d'Ardoino e la famiglia di Berengario, e più direttamente con quella de' Conti di Torino non esistessero vincoli di prossima parentela. Di

(1) MURATORI *Ant. M. Aev.* T. II. Diss. 22. col. 263.

(2) Vedi in Mem. della R. Accad. di Torino T. V. Ser. II. *Notizia ecc.* di L. G. PROVANA.

(3) Rodulphi GLABRI *Hist. Lib. III et II.* apud DUCHESNE *H. F.* T. IV. — Il cavaliere CIBRARIO nella sua *Monarchia di Savoia* induvinò questa provenienza di Umberto II. Ond'è cosa molto onorevole per esso la conferma che con questo Documento ricevono le dotte e costanti sue investigazioni. Vedi *St. della Mon. di Savoia* T. I.

(4) « Equidem certum puto non ita Romanorum fuisse proprium Amedei nomen, ut inter Francos » et salicæ legis professores numquam legatur. « (*A. M. Aev.* T. II. col. 263).

questi or ora riferiremo quanto da' legittimi titoli si vien deducendo. Ma ripigliando dall'indicata provenienza sua salica, dirò siccome questa provata sua qualità, e come le non meno certe possessioni allodiali di che Ardoino era ricco (1), avrebbero potuto mettere i suoi biografi scien-
centisti sulla via di supplire al silenzio de' cronisti, e d'indagare la di lui provenienza, ove essi caldi d'accrescer lustro alla di lui famiglia, trascurata ogni altra cosa, non avessero preso a farlo ad ogni costo discendere da' precedenti marchesi d'Ivrea, e da' re d'Italia, annoverando fra' di lui maggiori l'uno e l'altro Berengario, e un supposto re Bernardo, e il re Desiderio, e l'imperatore Carlo Magno: fabbricando a questo fine o producendo falsi documenti, che tuttora a' di nostri si leggono in alcune raccolte.

Nè punto considerarono, che il reame d'Italia essendo elettivo, nessun lustro non poteva per Ardoino vantaggiar quello della concorde elezione della Dieta Italiana: e che sebbene i primi signori della Marca d'Ivrea mercè de' tempi disordinati se ne fossero da padre in figlio tramandato il possesso, ciò non poteva essere accaduto a favore d'Ardoino, il cui padre Dadone, umile conticello di non so che città o provincia, mai non riceve dagli storici il titolo di marchese, al quale avrebbe avuto diritto, se egli avesse tenuto la Marca d'Ivrea (2). Nè meglio s'avvidero siccome nell'innestare la famiglia d'Ardoino a quella del re Berengario, andavano incontro ad altre difficoltà; avvegnachè non si possa conciliare la protezione che gli Ottoni, al dire di questi scrittori, avrebbero concesso ad Ardoino ne' suoi anni giovanili, ove egli fosse stato nipote di quel re Berengario, contro la cui famiglia essi si mostrarono mai sempre nemici implacabili (3).

E queste cose asseveravano i nostri scrittori piemontesi, in un'età che ricca ancora di legittimi documenti, con colpevole facilità ammetteva

(1) V. Dipl. di Ott. II e di Arrigo I per la chiesa di Vercelli in *II. P. Monum.* P. I. chartar. e qui nell'Append. ; ne' quali trovansi enumerati i beni di Ardoino. — *LEO Hist. d'Italie* T. I. p. 203.

(2) DURANTI, *Marca d'Ivrea tra le Alpi, il Ticino, l'Amaloue ed il Po*. Torino an. 12 Repub., p. 32. — Vedi pure il placito dell'anno 1001 a pag. 106.

(3) « Otto filiis Berengarii circumquaque dispersis. » (*ARNULFI Mediol. Hist.* Lib. I e VII in R. I. T. IV). — Nell'*UGHELLI Ital. S. T.* II. col. 104 si legge un diploma di Ottone (Dat. 2. id. sept. an. 963), col quale egli dona a Guido vescovo di Modena e suo arcicancelliere i beni di Guido e di Cotrado figliuoli del re Berengario II, posti in su quel di Bolegna e di Modena. — V. pure *SIGONUM De Regno Italiae ad an. 963.*

come veri i più insipidi strafalcioni che aiutassero le ampollose narrazioni, delizie di quel secolo, mentre trascurava que' sinceri titoli che quindi dopo ducent'anni agitati da guerre e da sconvolgimenti andarono in gran parte perduti, o con fatica veniamo uno ad uno spigolando.

Laonde gli scrittori che vennero dopo e dacchè l'arte critica fu rimessa in onore, difettando di sinceri documenti, furono costretti a fare ipotesi più o meno probabili sovra la famiglia d'Ardoino, e sovra le principallissime sue imprese, ondeggiando talvolta tra il desiderio di dire il vero probabile, ed il timore che le loro supposizioni non gradissero a chi avrebbe voluto che la storia si fosse piegata a secondare gl'intendimenti loro ambiziosi.

Rimane pertanto tuttora libero l'arringo a coloro che degli studi di genealogia specialmente si dilettaano, il fare maggiori ricerche: chè noi per quella parte che ciò si collega co' fatti storici, staremo contenti a riferire le opinioni di due valentuomini il Muratori ed il Terraneo, i quali guidati appunto dalla legge salica, che la famiglia sua professava, e dalla qualità delle sue possessioni, convennero nel collegarlo colla famiglia Arduinica de' nostri conti, anch'essi di salica generazione, ma differirono nel modo con cui presero ad ordire questo innesto.

Il Muratori partendo dalle espressioni di un placito di Pavia tenuto a' tempi di Ottone III, che chiamano il re Ardoino figlinolo del conte Dadone (1), ed appoggiandosi ad altra carta di Arrigo I imperatore pel monastero di Fruttuaria (2), lo annoverò nel suo albero genealogico de' Conti di Torino come cugino di Manfredi II dal lato di padre (3).

Parimenti cugino del medesimo Manfredi II conte di Torino, ma dal canto di madre, lo argomenta il Terraneo da un altro diploma (4), dichiarando a un tempo che l'Ardoino creduto dal Muratori il re d'Italia

(1) « *Placitum Ottonis comitis S. P. Papiac habitum coram Ottone III. Imp. an. 1001.* » (MURATORI *Ant. Estensi*, P. I. p. 125).

(2) « *Teneat iam dictus locus (monasterium Fructuariense) omnia illa praedia, quae dederunt* » Manfredus marchio et Berta eius uxor, et frater eiusdem Manfredi, idest Alricus episcopus » (Astensis), et Ardoinus consobrinus eorum. » (Privil. Henrici I. imper. pro monasterio Fructuariense, apud GUICHENON *Bibl. Sebusiana*, Cent. 2, cap. 39).

(3) MURATORI *Antichità Estensi* P. I. cap. XIII. p. 105.

(4) « *Charta dotationis monast. S. Iusti Segusini ab Alrico episcopo Astensi factae, nec non ab* » Odetrucio sive Magnifredo march. eius fratre, atque Berta Magnifredi coniuge. *Dat. Taurini die* » nona mensis iulii Ind. XII an. 1029. » (In *Hist. P. M. T.* I col. 479).

era un altro cugino del marchese Manfredi, di quell'istesso nome, e figlio pure di un Dadone o Oddone, ed appoggiò quest'asserzione ad una carta di dotazione del monastero di S. Giusto di Susa, concessa da quel Manfredi II nell'anno 1027. E quanto all'Ardoino detto il IV dal Muratori nell'albero genealogico sopra riferito, egli dichiara non poter essere quello che fu marchese d'Ivrea e re d'Italia, dal sapersi ch'esso ancor viveva tra gli anni 1016 e 1020; mentre Ardoino re d'Italia morì in Fruttuaria nel 1015, siccome a suo tempo vedremo (1).

Fra queste due opinioni quella del Terraneo sembra dunque la più probabile; ad ogni modo l'origine e le possessioni allodiali di questo marchese d'Ivrea, il nome stesso d'Ardoino, il quale si trova essere quello dell'avolo suo paterno secondo il Muratori, o dell'avolo materno secondo l'altro scrittore, formano bastanti indizi per istabilire fra il marchese Ardoino ed i Conti di Torino la consanguineità od un prossimo grado di parentela.

Ad Ardoino furono attribuiti di molti figli; consta per legittimi documenti che tre ne avesse, due maschi ed una femmina; e sono: Ottone conte, ed Ardicino od Ardiciono (idiotismi del nome d'Ardoino) principe, marito che fu di Willa figliuola di Ugo marchese di Toscana (2), ed Ichilda: questa, s'io non erro, maggiore de' fratelli, imperocchè nell'anno 987 già era moglie di Corrado figlio del fu Berengario II re d'Italia. Monsignore Agostino Della-Chiesa aveva anch'esso accennata l'esistenza di questa figlia del marchese Ardoino: ma siccome egli non riferivasi a veruna carta speciale in prova della sua asserzione, e citava solo gli archivi di Vercelli, il Terraneo non gli prestò fede. Ma questo scrittore segniva in ciò un altro impulso: chè avendo egli preso a illustrare la famosa Adelaide contessa di Torino, smaniava per formarle una ricca famiglia d'antenati: e così per arricchire di una figlinola di più Ardoino Glabrione conte di Torino, bisavolo d'Adelaide, a ogni costo volle che quest'Ichilda nascesse da quello (3).

(1) TERRANEO, *Adelaide illustrata*. Torino 1739 P. I. p. 187 e 188 e P. II. p. 198.

(2) « *Charta donationis Ottonis comitis, Arduini regis filii, pro ecclesia S. Syri Papiensis anno 1009, Ind. VII.* » (Appendice n° 36). « *Tabularium canonicor. Lucensium* » ap. Fiorentini (MANZI) *Memorie della contessa Matilde*, p. 401. — Cfr. TERRANEO, *Note agli Annali del MURATORI* (ms. della R. Università di Torino, T. VI. P. I.).

(3) Per uno di que' tanti idiotismi che si commettono dagli amanuensi, e talvolta pure da chi è poco pratico delle antiche scritture, quest'Ichilda divenne Richilda presso il CHIESA, e quindi presso tutti: e questo perchè il nome di una Richilda si legge in altre carte. Un altro curioso

Ora ogni dubbio è tolto da un documento appunto dell'archivio Vercellese, del quale avremo più volte a parlare (1).

Di Berta poi, moglie di Ardoino, nominata in varii diplomi, non si conosce la famiglia: molti scrittori piemontesi la scambiaron con Berta figliuola di Oberto II progenitore degli Estensi, ma il Muratori dimostrò che questa era stata sposata da quel Manfredi II conte di Torino, cugino di Ardoino (2).

Piuttosto sembrerebbe ammissibile l'opinione di un altro de' nostri scrittori piemontesi, il Tenivelli, il quale pensa che questa moglie di Ardoino potesse essere figlia di altro Oberto marchese di Toscana nato da Ugo re d'Italia, e padre di Ugo marchese pure di Toscana. Quest'Oberto essendo morto o ito in esiglio nel 953, il di lui figlio Ugo avrebbe potuto dare in isposa al marchese Ardoino la propria sorella: e questo parentado essere di poi cagione dell'altro tra il figlio d'Ardoino e Willa figliuola del marchese Ugo (3).

Per ultimo sappiamo che Ardoino oltre ad Amedeo nominato di sopra, ebbe un altro fratello per nome Viberto, ed una sorella: questa appellata Perinza fu moglie di Roberto conte di Volpiano, ch'essa fece padre di molti figli, fra quali il celebre S. Willelmo abbate del monastero *Divionense* nella Borgogna, e fondatore di quello di Fruttuaria nelle terre paterne (4). De' due fratelli non si sa quale fosse il maggiore, forse Amedeo, giacchè di Viberto non comparisce il nome che più tardi, e dacchè Ardoino fu salito sul trono: ambi costanti zelatori di lui, il primo ucciso probabilmente nelle civili commozioni d'Ivrea, l'altro fido ad Ardoino insino alla morte di questo re (5). Dicesi che Ardoino passasse la prima sua giovinezza parte in corte degli Ottoni, parte in quella

errore di chi copiò primo la citata donazione (vedi la nota qui appresso) diede a Conone o Cerrado, figlio del re Berengario II, il soprannome di *Ricius*.

(1) « *Donatio quor. bonor. in loco Caresionae facta ecclesiae canon. Vercell. a Chonrado qui et Chona filio quond. Berengarii II regis, et ab Ichilda filia Ardoini marchionis. Dat. Eporeia ann. 987, Ind. XV.* » (Vedi nell' Append. il n.º 1). — CHIESA Agostino *Geneal. de' Conti d'Agliè*, f. 46. 8, in *TERRANEO Adelaide illustrata* P. I. p. 197.

(2) MURATORI, *Antichità Estensi* P. I. p. 103. — ROELLER « *Dissertatio de Arduino Eporedina march. etc.* § XXII. — In *Thes. Dissertationum etc. edente Martini*. T. II. P. I. p. 192.

(3) TENIVELLI, *Biografia Piemontese*. Decade I. pag. 230.

(4) ROVERIUS, *Hist. Reomensis monasterii* p. 121-160.

(5) « *Placitum Ottonis comitis etc.* » v. la nota (1) alla pag. 106 — « *Diplom. Henrici I. imp. pro eccl. Vercell. an. 1044.* (*Hist. P. M. l. e n.º 37* nell'Append.) »

di Lottario re di Francia, figliuolo di Lodovico il *Trans-marino* (1); la cosa per sè poco importa: ma dove quest'asserzione sia vera, per quello che riguarda gli Ottoni, la protezione usata da questi imperatori verso Ardoino nuovo titolo mi porgerebbe per oppormi a chi lo volle nipote del re Berengario II. Certo quanto al tempo ciò potè essere; avvegnachè sebbene incerto sia quello della nascita d'Ardoino, sapendo noi, ch'egli morì nel 1015, più che dall'età oppresso dalle fatiche e da' malanni (2), potremo ammettere ch'egli venisse al mondo negli ultimi tempi di Berengario, e così tra il 955 e il 960, e crescesse al suo destino durante la dominazione de' principi di Sassonia.

Chechè ne sia di ciò, leggesi nelle *Antichità Italiane* (3) un placito tenuto nel distretto di Brescia nell'anno 996 da un Ardoino conte del sacro palazzo, nel quale il Muratori, il Giadini e il Durandi (4) ravvisarono il nostro Ardoino: concordano le note cronologiche, poichè negli anni seguenti Ardoino essendo stato posto al bando dell'impero, necessariamente (se non prima) almeno nell'anno 1000 perduto aveva la dignità di Conte del sacro palazzo. E si vediamo da un diploma di Ottone III dell'anno 1001, e da un placito tenuto in Pavia (5), siccome nell'anno 1001 già era a lui succeduto in tale dignità un conte Ottone nipote del vescovo di Como.

Al Terranco parve altrimenti.

Nell'Ardoino che fu conte del sacro palazzo nel 996 egli volle scorgere il figlio di certa Anselda nata da quell'altro Ardoino detto *Glabrione* conte di Torino già da noi ricordato, e come a lui piacque, maritata a Gisalberto principe di Lucemburgo. E siccome la dignità palatina era frequente e quasi ereditaria nella famiglia di Gisalberto, così ne de-

(1) *Compendio dell'origine d'Ardoino*. MS. della R. Camera de' conti p. 50.

(2) « Anno MXV. Hardevigus . . . infirmatur . . . et tertio kal. nov. obiit. » (*Annal. Sax. apud ECCARD. Corp. Hist. M. Aev. T. I.*). Questa data della morte d'Ardoino è diversa nel necrol. di S. Benigno Divion; vedi al Capitolo XI di questi Studi in fine. — « Confectus labore et morbo » (*ARNULPHI Hist. Med. Lib. I c. 15. R. II. T. IV. p. 13.*).

(3) — *Antiq. M. Aev. T. I. Diss. VII. col. 383.*

(4) MURATORI, v. la nota precedente, ed *Antichità Estensi* P. I. c. XIII. — GIADINI, *Memorie di Milano* P. II. p. 422. — DURANDI *Marca d'Ivrea* p. 52.

(5) Ottonis III diploma pro Monialibus Ticinensibus S. Mariae Theodotae. Dal. Ravensae XII kal. mai anno MI. Ind. XIV apud MURATORI *A. M. Aev. col. 285.* — Placitum vel Iudicatum Papiæ habitum ab Ottone sacri palatii comite an. MI die XIV mensis octobris Ind. XV apud MURATORI *Ant. Est. P. I. p. 125.*

dusse, che l'Ardoino da lui creduto figliuolo di Anselda e di Gisalberto, fosse il Conte del sacro palazzo, di cui nel placito di Brescia.

Il Terraneo formò tutto questo ipotetico edificio avvisando anch'egli col Giulini che questo Gisalberto conte del sacro palazzo fosse il fratello della regina Cunegonda, colla cui famiglia amava d'innestare così i Conti di Torino.

Ma tutto ciò non sussiste, come si vede considerando in primo luogo siccome questo Gisalberto non era per niente il fratello di Cunegonda, di stirpe regia e conte di Lucemburgo, ma un conte di Brescia come suo padre Lanfranco, e come l'avolo Gisalberto I, tutti poi Conti del sacro palazzo (1); in secondo luogo, che fra i quattro Ardoini nominati dal Terraneo stesso, come viventi in quel punto in Italia, nessuno non era nato da Gisalberto (2). Uno di essi era l'Ardoino poi re d'Italia, figlio del conte Dadone: un altro il figlio di lui, detto pure Ardoino come il padre, e per idiotismo Ardicino e Ardicione: quindi l'Ardoino da lui chiamato V, figliuolo di Oddone de' conti di Torino, che mai non ebbe il grado di conte palatino: e l'ultimo quello ch'egli creò conte del sacro palazzo, e che suppose figlio d'Anselda e di Gisalberto, mentre invece era nato da un conte Lanfranco, come risulta da un atto di donazione pubblicato dal Giulini e dal Lupi (3). Ma una maggiore prova che il Muratori e gli altri rettamente s'apposero nel ravvisare in Ardoino marchese d'Ivrea il Conte del sacro palazzo, ce la porge, come a me sembra indubitabile, un altro de' documenti testè recuperati in Ivrea; quest'è una lettera, la quale sebbene non tenga nè data, nè firma, nè altra indicazione se non se d'essere stata diretta *a' re ed a' principi di quel tempo*, evidentemente si ravvisa scritta da Warmondo vescovo d'Ivrea e dagli altri vescovi suoi comprovinciali (4), nel tempo in cui Ardoino aveva invaso le possessioni di quella chiesa. La data non si può con precisione determinare, ma per le ragioni che accenneremo di poi vuolsi

(1) GIULINI *Mem. di Milano* P. III. p. 148. — Cfr. LUPÍ *Cod. Dipl. Berg.* T. II. col. 449.

(2) TERRANEO, *Adel. illustr.* P. I. p. 208.

(3) GIULINI l. c. p. 66 e 500. — LUPÍ *Codex Diplom. Bergomensis* T. II. col. 599. Fra i sottoscritti appiè di quell'atto trovansi: « *Ardoinus comes, germanus eidem Rolendae filiae quondam Lan-
» franci comitis* » come reca il titolo della carta medesima. Il LUPÍ poi stima che questa donazione fosse fatta nell'anno 1033 e non nel 1003, come volle il GIULINI; ma ciò non fa nulla pel caso nostro. LUPÍ l. c. p. 601.

(4) « *Epistola regibus regnorumque Princip. missa.* » Append. n.º 12.

assegnare a' primi mesi dell'anno 997. Comincia quest'epistola in questa forma:

« *A voi tutti reputiamo esser noto siccome Ardoino sedotto dallo spirito di perfidia abbia mosso le armi della ribellione contro la regia autorità, ed usurpato con improvvisa elazione le insegne di una pubblica carica a detrimento di tutto il reame* » (1).

Quale sarà questa pubblica carica della quale Warmondo scrive che Ardoino avesse usurpate le insegne? Non quella di marchese d'Ivrea, che al certo già teneva, e che non dava a lui autorità veruna fuori de' suoi comitati: non quella di re d'Italia, che non conseguì che più tardi, e che fu a lui conferita dalla Dieta Italiana; dunque quella al certo di Conte del sacro palazzo, dignità eccelsa ancora in quel tempo, e la maggiore sovra l'altre tutte, poichè chi ne era investito diveniva come il vicario del re: la cui autorità dice il Muratori, *non solo era eminente nella corte imperiale, ma estendevasi anche per tutto il regno, essendo al di lui tribunale sottoposti i Conti, i Marchesi, i Duchi, cioè i Principi di que' tempi* » (2).

Ma perchè la chiama usurpata? Come avrebbe potuto Ardoino usurpare una carica di tanta importanza, il cui esercizio per la intrinseca sua qualità dipendeva dalla volontà dell'imperatore manifestata a tutti i principi del reame? Forse meglio avrebbe egli detto *comperata*: nè io ripugnerei a credere che le ricchezze d'Ardoino non gli avessero in que' tempi procacciato dalla cancelleria imperiale il modo d'ottenere dal giovine Ottone, e per esso nel tempo della sua minorità da' tutori di lui, un posto di tale importanza. Al postutto, che egli esercitasse pubblicamente e in legale maniera l'ufficio di Conte del sacro palazzo, lo dimostra il placito pubblicato dal Muratori, tenuto da esso nel distretto di Brescia nell'anno 996, e mentre Ottone III si trovava potente in Italia e stava per pigliarvi la corona imperiale (3).

(1) « *Omnibus vobis notum esse credimus Ardoinum perfidiae spiritu seductum, rebellionis arma contra regiam auctoritatem commovisse, et publicae functionis insignia ad totius regni detrimentum improvisa elatione usurpasse* » l. e.

(2) *Antiq. M. Aev. T. I. Diss. VII. col. 394. — Annali d'Italia an. 962.*

(3) « *Arduini Comitis Palatii sententia in Placito Limitensi pronuntiata, pro Episcopo Cremonae contra Walpertum Iudicem, anno 996, XI kal. iunias Ind. IX.* » (*Ant. M. Aev. T. I. Diss. VII col. 1383*). Questa carta non tiene l'anno I dell'impero d'Ottone, perchè la coronazione imperiale avendo avuto luogo in Roma il dì precedente a quello in cui fu tenuto il placito, la no-

Già si è detto, che verso l'anno 1000 Ardoino fu da Ottone III bandito nell'avere e nella persona; questo fu per l'uccisione di Pietro I vescovo di Vercelli, che a lui venne apposta.

Ma per chiarire questo fatto, che da nessuno degli storici contemporanei non viene raccontato, e che non si può mettere in dubbio perchè accennato ne' diplomi d'Ottone, e confermato da uno de' nuovi documenti, è necessario il farsi un momento alle cose già dette.

Abbiamo avvertite le mutazioni occorse nelle divisioni territoriali de' comitati; naturalmente i conti doveano essere avversi a tali cambiamenti, che restringevano la loro autorità col privarli di una parte del territorio soggetto prima alla loro giurisdizione. Ancora vi repugnavano gli uomini liberi, perchè non senza ragione temevano le usurpazioni de' vescovi: vi repugnavano gli schiavi, perchè col divenir servi delle chiese andavan sottoposti alla recente legge Ottoniana, che li condannava a una perpetua servitù, dalla quale non potevano affrancarli i capi stessi delle chiese (1): e finalmente, nè anche cotesti erano soddisfatti, perocchè quanto più andavano ottenendo, tanto più s'accendevano di ottenere. Per le quali cause nascevano frequenti dissensioni. Ma ne' comitati maggiori dove la potenza de' conti era più grande, a fatica potevano i vescovi per mezzo de' loro nuovi ministri gioire di queste esenzioni; quivi pertanto le dissensioni riuscivano talvolta in guerre cittadine.

Ad una tal causa vuolsi senza dubbio riferire la querela del marchese Ardoino con Pietro I vescovo di Vercelli, che terminò colla morte di questo vescovo. La dignità comitale, che a titolo di una donazione forse supposta, forse concessa o confermata da Carlo il Grosso a Lintwardo vescovo di Vercelli, ed arcicancelliere di questo imperatore (2), il vescovo Pietro pretendeva sopra la città di Vercelli, certamente per lo

tizia non ne poteva essere giunta a Limite il dì 21 di maggio, cioè il dì XI delle calende di giugno. In quanto al mancarvi pure gli anni del regno, vedi le ragioni addotte dal MURATORI all'anno 996 *Annali d'Italia*.

(1) « Non enim licebit servo Ecclesiae servitute nunquam exire, quem neque ipsi praesidentes » ecclesiis poterunt libertare ». (In legib. Ott. I et II. § IV. *De servis sedicentibus liberi* — ap. PERTZ *M. G. II. T. II. legum* p. 34).

(2) Questo apparisce dalle parole di un diploma di Ottone III ottenuto più tardi da Leone altro vescovo di Vercelli: « lamdudum quae data sunt Sancto Eusebio confirmavimus, scilicet ea quae » sunt necessaria et maxime quae Carolus Imperator Lintwardo Episcopo, aut dedit aut reddidit » (*Otonis III Dipl. pro Eccl. Vercell. Dat. Romae an. 999 non. mai;* apud DURANDI *Marca d'Ivrea*, P. I p. 118 Vedi nell'Appendice n. 15).

addietro soggetta alla Marca d'Ivrea: i villaggi, le curtì e gli altri poderi dipendenti da que' marchesi ed allora contrastati, forse già occupati da Pietro: le nuove pretese del clero: « *che le podestà laiche non avessero giurisdizione sovra i servi e sugli uomini della chiesa* » (1), surte non senza ragione per la recente legge sopra citata, erano bastanti motivi pel potente Ardoino, uomo di natura subita ed insofferente, per far prova di ritenere o di riacquistar colla violenza quello ch'egli avvisava esser suo. Alla nativa superbia s'arrogava la forza che il grado eccelsso di Conte del sacro palazzo a lui somministrava; tuttavia seppe Ardoino frenare se stesso, nè mancare di previdenza trascurando quell'ainto che le divisioni alle quali stava in preda Vercelli a lui profferivano.

Ora nel render conto di questi fatti è debito mio il far osservare che la scarsità de' documenti mi costrinse a ragionarne più per induzione che in altro modo (2): giacchè non tenendo altra guida che alcune rare barbariche espressioni de' diplomi imperiali, ed un frammento di un sinodo romano (3), egli si fu dal confronto di questi pochi dati ch'io ne dovetti argomentare l'andamento.

Era la città di Vercelli in quel punto agitata dalle fazioni, e le divisioni cittadine partivano da doppia cagione. Fin dall'anno 975 la chiesa di S. Eusebio era tenuta dal vescovo Pietro I, il quale tornato da non molto tempo dalla schiavitù de' Saracini (4), non solo già s'era posto

(1) DURANDI *Marca d'Ivrea* P. I. p. 56.

(2) Nell'archivio arcivesc. della città di Vercelli a me con tanta longanime gentilezza aperto da S. E. Monsig. D'Angennes, non trovai nulla che possa chiarire questo fatto del vescovo Pietro, nè che possa levare i dubbi sulla serie di que' vescovi.

(3) Documento n.º 13 (Appendice).

(4) La serie de' vescovi vercellesi è molto dubbia per questi anni di cui trattiamo; nelle carte capitolari vi sarà di certo di che emendarne gli errori, e si potrà chiarire se quella *Constitutio de dignitatibus* dall'UGHELLI attribuita a questo Pietro I nell'anno 990, porti la data dell'anno XII del suo episcopato per l'Ind. III; non avendo io potuto fare colà le ricerche necessarie, ho aderito alla testimonianza di questo scrittore; ora ammettendo coll'UGHELLI che Pietro era già vescovo di quella città almeno nell'anno 975, diremo ch'egli fu quel desso, che secondo gli ann. d'EPIDANNO (*Rev. Franc. T. III. p. 476*) fu fatto prigioniero e condotto in Soria da' Saracini nel 982 dopo la vittoria loro nelle Calabrie contro Ottone II. Il quale di poi ottenuta la liberazione sua, tornò alla sua sede di Vercelli dove trovavasi nel 995. (Vedi il placito di Pavia dell'anno 996 in *II. P. M. T. I. docum. CLXXX*); nel giorno 4 di settembre dell'anno 996, il vescovo Pietro è mentovato in una donazione di Ugo marchese (*ibid. docum. CLXXXII*); un diploma finalmente di Ottone III del dì 31 dicemb. 997 (*II. P. Mon. T. I. doc. CLXXXVII*), dato « *interventu nostri fidelissimi Raginfredi venerabilis*

nell'animo di far resistenza al potente signore d'Ivrea, che pretendeva l'intero possesso della città, e di quella parte del comitato per la quale i vescovi di Vercelli vantavano un'antica *esenzione*, ma aveva spinto il suo zelo contro la corruzione del clero, che forse durante l'assenza sua s'era ingagliardita, e contro certi servi della chiesa di S. Eusebio stati per lo avanti affrancati, ch'egli di nuovo voleva ridurre nella schiavitù di prima.

Per vero dire, grande convien credere si fosse il malcostume nel clero Vercellese. L'attestano vari diplomi imperiali di quell'età, i quali ricordando molti preti ammogliati, e molti figli di preti (1), dimostrano siccome la gran lite sovra l'incontinenza del clero, che nel secolo XI tanto rumore fece in Lombardia, aveva già poste in Vercelli le sue radici prima del cadere del secolo precedente. Quali si fossero i rigori usati dal vescovo contro il suo clero, non risulta: nè se il timore soltanto di essi bastasse a inimicarglielo.

Quanto ai servi affrancati di S. Eusebio, essi avevano ottenuto la libertà sotto i precedenti vescovi, e specialmente sotto il vescovo Ingone (2), sia ch'e' fosse stato effetto della pietà o della seduzione, sia che per danaro, per cambio, per inganno o in altro modo, avessero ottenuti i diplomi che gli affrancavano. Ora la già citata legge d'Ottone non solo minacciava di novella servitù quegli affrancati, ma toglieva ogni speranza di libertà a quelli che anelavano d'ottenerla, e ancor non l'aveano conseguita: e ben si può credere che il vescovo Pietro

« episcopi » dimostra che Pietro in quel tempo era già morto. Dunque la fazione di Ardoino contro Vercelli non fu, come scrisse l'UGHELLI, agli Idi di marzo del 995, ma tra il 4 di settembre del 996 ed il 31 dicembre 997, avvertendo che l'anno cominciava il dì 25 di dicembre.

(1) « Audita dilapidatione Sancti Eusebii ab uxoris antecessoribus facta. » (Dipl. Ott. III pro eccl. Vercell. Actum Romae an. Domini M. Ind. xiv kal. nov. Append. n.º 18). = « Damus praedia Giselberti archidiaconi Vercellensis similiter damus praedia suorum generorum, idest Vicilianni de Causade, et Nigizonis de Rade etc. » (Dipl. Ott. III pro eccl. Vercell. ann. 999 non. maii Ind. XII. Append. n.º 15).

(2) « Decessit hic praesul V id. dec. . . anno vero 977. » UGHELLI l. c. col. 771. « Rogamus etiam successores nostros, et sub Dei timore contestamus, ut omnia cambia illicita, et servos ecclesiae illicite liberatos ad pristinum usum venire cogant, et ad antiquam servitutem venire compellant, maximo Ingonis episcopi omnia cambia frangant, qui pro adulterio Sanctam Agatham cum servis et ancillis, et ipsas mortuorum sepulturas ab ecclesia alienavit. » (Dipl. Ott. III an. M kal. nov. Ind. XIV. apud DURANDI *Marca d'Ivrea* P. II. p. 100. Append. n.º 18).

già avesse posto mano a quella legge che favoriva la sua chiesa, dallo scorgersi che alcuni di quegli infelici si erano salvati colla fuga (1).

E certamente quello che accadde non inolti anni dopo sotto il vescovo Leone giustificò la loro antiveggenza; da una sua epistola o piuttosto *omelia* diretta al clero ed a' fedeli della sua chiesa, abbiamo siccome i diplomi di libertà stati per lo addietro concessi a quegli infelici, furono da Leone distrutti, e quanti di que' fuggiaschi egli potè riavere, tutti ricacciati nella prima servil condizione (2). Ma questi rigori che il vescovo Leone usò contr' essi que' servi più tardi assistito da un nuovo diploma imperiale (3), Pietro non aveva forse avuto tempo di adoperarsi. Ad ogni modo colle minacce, se non altrimenti, alienava egli da se costoro ed i chierici: epperò gli uni e gli altri s'accostarono alla parte d'Ardoino: gli uni sperando trovare in esso un protettore per le loro voglie corrotte, gli altri un difensore della libertà conseguita.

Ordinava pertanto il marchese Ardoino segrete pratiche in Vercelli co' principali fra' liberi uomini e del clero, con Gisalberto arcidiacono di S. Eusebio, con Cuniberto arciprete, con altro Gisalberto ed Arimanno, giudici, e co' fuorusciti, già schiavi di quella chiesa, a' quali tutti, sembra s'arrogasse ampio seguito di malcontenti (4).

Con questi raunaticci e colle proprie sue masnade (5) mosse Ardoino sul finire dell'anno 996 contro Vercelli (6); introdotto nella città o per assalto o per l'aiuto degl' interni suoi aderenti, le soldatesche presero, secondo l'uso di guerra di que' tempi, a desolare la terra col fuoco, col sangue e colle rapine. Non apparisce in qual modo il vescovo Pietro

(1) « *Damus praedia snorum generorum (Gisalberti) idest Vicilianni de Causade, et Nigizonis de Rado, et parentum eius servorum fugitivorum.* » (Dipl. Ott. III. an. 999 non. maii. Append. n.º 15).

(2) Questa epistola del vescovo Leone non tiene veruna data (siccome per ispecial favore di que' reverendi canonici ho potuto verificare io stesso nell'originale) io la crederei scritta nel 1004, dopo la calata d'Arrigo re di Germania. « *Quos et quot potuimus in hac civitate Vercellis, incuria Pontificum a servitio ecclesiae Dei, nescimus per quod maleficio, et captivum laqueum libertatis a iugo subtractos chartis contra legem factis, si quae erant, legaliter iacis* » . . . *revocavimus.* » *Epist. Leonis Monachi Episcopi Vercellensis.* — Vedi Doc. n.º 14 dell'Append.

(3) Dipl. Ottonis III pro eccl. Vercell. an. 1000, Ind. XIV (idest XIII) kal. nov. (Append. n.º 18).

(4) Vedi il più volte citato dipl. Ottonis III dat. an. 999 non. maii Ind. XII. Append. n.º 15.

(5) *Masnada* è voce che cambiò significato. Dapprima uomini di masnada appellavansi una qualità di schiavi esclusi come vili dalla milizia; ma dopo le novità introdotte dagli Ottoni, essi furono accolti fra i vassalli, ed erano come questi tenuti al servizio delle armi. (MURATORI *Antiq. Med. Aev.* T. I. dissert. XIV. col. 801, 802).

(6) Vedi la nota (4) alla pag. 113.

vi ponesse la vita, ma la è cosa credibile ch'egli, siccome pensò Agostino della Chiesa, rimanesse tumultuariamente con altri molti involto nell'eccidio comune. Perciocchè avendo le genti d'Ardoino dato il sacco alla chiesa di S. Eusebio, dove probabilmente Pietro s'era ritratto per farvi co' suoi vassalli ultima resistenza, i nemici vi appiecarono il fuoco, ed il cadavere dell'infelice vescovo fu sepolto ed arso nelle rovine (1).

Quanto al tempo in cui seguì questa fazione di Vercelli, non saprei dire nulla di più preciso oltre quello che di sopra ho indicato: il che argomentai dal vedere che nel settembre del 996 il vescovo Pietro è nominato come vivente in una carta di donazione di Ugo marchese, mentre nel citato diploma di Ottone III dato tre mesi più tardi, cioè il 31 dicembre 997 già vi si trova nominato il di lui successore.

Frutto in vero della fazione di Vercelli fu per Ardoino il provocarvi l'elezione di un nuovo vescovo, il quale rilasciando le pretese (fondate o non ch'esse fossero) de' suoi predecessori sovra il comitato di Vercelli, riconoscesse come conte il marchese d'Ivrea, e restituisse a lui le curtì e le terre occupate, prima probabile cagione de' litigi con Pietro I.

Nello squittinio fu vinto vescovo Raginfredo già arcidiacono di S. Eusebio, il quale se si dee avvisare fosse con altri molti di quella canonica antico aderente del marchese Ardoino, certo pure dovremo ad un tempo chiamare uomo prudente e moderato, posciachè durante il suo pontificato la città si mantenne in pace: ed egli stesso fattosi innanzi nelle grazie d'Ottone III ottenne che quest'imperatore pigliasse sotto la sua protezione e mundiburdio i beni ed i canonici della sua chiesa (2).

L'esistenza di Raginfredo come immediato successore di Pietro imbrogliò il Durandi (3): epperò scrisse, che ad ogni modo il vescovo

(1) Cfr. CHIESA monsignor Agostino: note inedite al dipl. di Ottone III an. 999 nou. maii (App. n.º 15) in I. T. TERRANEI *Tabulario Celt.-Ligust.* ms. della R. Università T. II; ed altre sue note presso il TENIVELLI, *Biografia Piemontese* Decade I. p. 214; più le parole seguenti del diploma medesimo: « *Damus praedia Ardoini filii Dadonis, quia hostis publiens adiudicatus, Episcopum Petrum Vercollensem interfecit, et interfectum incendere non expavit ... Omnia praedia Gisalberti Archidiaconi Vercellensis, quia cum esset de familia S. Eusebii, inflatas divitiis ecclesiae, ecclesiam dominam suam aufugit, eamque cum Arduino miserabiliter vastavit.* » Questi fatti, i quali risultano come si vede dal diploma di Ottone, rispondono bastantemente, per quel che mi pare, all'asserzione dello storico LEO (*Hist. d'Italie* Liv. IV. Ch. II. p. 202), il quale scrive che Pietro fu ammazzato da Ardoino, per non so quale pretesto, e in virtù dell'autorità di Conte del Sacro Palazzo.

(2) Vedi il dipl. in *H. P. M. T. I.* n.º CLXXXVII. e nell'Append. al n. 13 bis.

(3) DURANDI, *Condizione del Vercellese* p. 134.

ucciso da Ardoino non poteva aver avuto altro immediato successore che Leone, mentre questi e non Raginfredo ottenne che Ardoino fosse dall'imperatore punito per l'uccisione di Pietro. Ma il Durandi non badò che Raginfredo era stato arcidiacono di quella chiesa, ed uno de' fantori del marchese d'Ivrea: salito quindi sulla sedia episcopale, facilmente si comprende ch'egli non provocasse la punizione d'Ardoino.

Ch'egli poi fosse realmente arcidiacono di quel capitolo, oltre l'attestazione dell'Ughelli (1), lo prova il vedersi, che mentre egli era vescovo di quella città la carica d'arcidiacono era tenuta da un Gisalberto altro fantore di Ardoino (2).

CAPITOLO III.

CONTINUAZIONE DEL MEDESIMO ARGOMENTO.

FATTI D'IVREA.

Circa a questo tempo e mentre durava la pace in Vercelli, penso accadessero i fatti d'Ivrea, cioè le gare del marchese Ardoino col vescovo Warmondo. Di questi fatti ignoti finora a tutti gli scrittori d'Ardoino, viene a noi per la prima volta dato ragguaglio da' nuovi documenti già molte volte ricordati: i quali comechè portino l'impronta dell'esagerato spirito che li dettava, epperò non si voglia con essi fare ciecamente a fidanza, riescono tuttavia per noi preziosissimi per la viva pittura che ci offeriscono delle agitazioni di que' tempi appassionati, e per la non poca luce che mandano sovra la storia degli anni susseguenti.

Le ragioni per le quali mi consigliai che questi fatti d'Ivrea accadessero dopo quelli di Vercelli appariranno meglio nell'addurre ad una ad una le testimonianze de' nuovi documenti. Dirò intanto alla rinfusa, che il pontefice al quale ricorse il vescovo Warmondo contro Ardoino, essendo Gregorio V, il quale fu papa dal maggio in circa dell'anno 996 al 18 febbrajo del 998, la contesa con Ardoino dovette aver luogo in

(1) UGHELLI, *Ital. Sacra* T. IV. *De Ep. Vercell.*

(2) Vedi dipl. Ott. III imp. Dat. Romae non. maii an. 999 l. c.

quello stesso spazio di tempo. Ora abbiamo veduto siccome quello della fazione di Vercelli fu pure determinato dalle diverse date de' documenti addotti, tra il settembre del 996 ed il finire di quell'anno medesimo: era dunque cosa ragionevole il credere che Ardoino dapprima si facesse a ridurre il vescovo di Vercelli, che vantava un'antica donazione, e quindi gonfiato da questo prospero successo, si volgesse contro quello d'Ivrea per riavere quello ch'egli chiamava fatto suo, ed impedire che domandasse l'*esenzione*.

Non sappiamo di certo quale fosse la dissensione che arse tra il marchese Ardoino ed il vescovo Warmondo. Ma le cause de' litigi tra i conti ed i capi delle chiese già da me indicate erano dovunque le stesse. Stavano per costoro i diritti per donazioni di principi, per giudicati, per canoniche penitenze, od in altra guisa, e talvolta ancora per usurpazioni acquistati: dall'altro lato l'antico possesso, l'uso e la forza che in que' tempi pareggiavano la ragione, il grado, la potenza, anzi la prepotenza di chi a nome del re teneva in beneficio uno o più comitati, una Marca: e però se difficili e accaniti dovunque doveano riuscire codesti litigi, a' quali non poteva provvedere la legge ne' pubblici placiti presieduti dagli stessi conti e marchesi, e talvolta da' vescovi contendenti, quanto più non crederemo riuscissero tempestosi e inconciliabili sotto Ardoino, che alla insolenza delle ricchezze e del grado di marchese, l'altra aggiungeva dell'essere distributore della giustizia del regno, come Conte del sacro palazzo?

Con tutto ciò, frammezzo a tali sconvolgimenti pende incerto il giudizio nel cercare da qual parte stessero la ragione e il diritto. Già noi vedemmo siccome l'insolferente Ardoino avesse barbaricamente attutata ogni resistenza per parte de' vescovi di Vercelli: e come avesse riacquistati od usurpati a sua posta quelli ch'egli chiamava antichi suoi diritti, e che dichiarava essere stati manomessi dal vescovo Pietro. Non sarà pertanto ch'io mi scosti dal vero avvisando che una causa non dissimile lo spingesse ora contro il vescovo Warmondo, e che in pari modo s'accingesse a trionfarne. E per vero dire, se nelle carte vescovili o capitolari d'Ivrea verun indizio non apparisce di una qualche imperiale o regia donazione anteriore agli Ottoni, fatta a' vescovi di quella città, di una parte del comitato o di altra possessione che fosse stata propria de' marchesi d'Ivrea, come appunto per Vercelli solevano invocare

i suoi vescovi (1), non è cosa improbabile che in quel frattempo in cui nessun marchese fu preposto dagli Ottoni al governo d'Ivrea, cioè dalla caduta di Berengario II all'innalzamento d'Ardoino, una qualche corte, o castello, od altra possessione già anticamente tenuta in beneficio da chi governava quella Marca, fosse in qualche modo venuta nelle mani de' vescovi anteriori a Warmondo (2); la qual trasposizione di signoria non sarebbe stata nè senza esempio in que' torbidi tempi, nè doveva esser riuscita difficile negli anni precedenti, durante la lunga minorità di Ottone III.

Ma in qual tempo e da chi era stata riordinata la Marca d'Ivrea? Come se ne trovava investito il marchese Ardoino?

La soluzione di questi quesiti non si può ottenere che per via d'induzioni: nulla non trovasi nè negli antichi documenti già conosciuti, nè in quelli che ora per la prima volta vengono da noi pubblicati, che valga a pienamente dichiarare questi dubbi. Chè anzi la è cosa osservabile siccome ne' documenti or ora trovati in Ivrea, Ardoino vi è bensì evidentemente considerato come capo o signore di quella città e di quella Marca, ma non vi è nominato mai (forse per dispregio) nè come marchese d'Ivrea, e nè anche mai col titolo astratto di marchese (3).

A' nostri scrittori del 1600 era stata lieve bisogna il superare codeste difficoltà, col dire siccome già accennammo, che da Dadone suo padre, da essi soli creato marchese d'Ivrea, aveva Ardoino ereditato quella Marca: il qual Dadone figlio (dicevano) del re Berengario II, l'aveva

(1) Non ho potuto verificare il fatto nell'archivio capitolare di Vercelli: un'espressione del diploma di Ottone III dell'anno 999 (non. mai) farebbe credere all'esistenza di tale diploma, ed è questa: « *Iam dudum omnia quae data sunt S. Eusebio confirmavimus etc. et maxime quae Carolus* (l'imperatore Carlo il Grosso) *Liutwardo Episcopo aut dedit aut reddidit, iterum atque iterum ex nunc confirmamus etc. Quod nos ipsi imperatoris Caroli praecepta legimus.* » Ma queste parole con molte altre di quel diploma riescono molto sospette, perchè forse dettate da Leone vescovo di Vercelli, al quale Ottone concedeva il diploma, gran furbo ed ingordo ingoiatore di beni. (Vedi Append. n.º 15).

(2) Avvalorano quest'ipotesi le parole del vescovo Varmundo in una sua lettera a papa Gregorio V, al quale si lagnava delle vessazioni d'Ardoino in questa forma: « *Quod tanta auctoritate recolitis factum pudendum est sine ratione mutatum: nos etenim tam obstinatae suae mentis fraudibus condolentes, crebra conventione, singulari exhortatione, sedula legatione et chartarum multiplici amonitione ab huiusmodi reuocare perfidia quaesivimus.* » (Doc. n. 110. Append.).

3) A meo che ne' luoghi de' documenti dove fu rasiato via il nome d'Ardoino vi fosse pure unito il titolo di marchese.

egli stesso ricuperata per favore di Ottone II dopo la morte del re suo padre e di Adalberto suo fratello. Supposizioni al tutto insussistenti poichè opposte a quello che risulta dalle dichiarazioni contemporanee (1).

Così, come già osservammo, in nessun documento Dadone non viene qualificato mai con altro titolo, che con quello di conte: e non che risulti ch'egli mai sia stato marchese d'Ivrea, non apparisce nè anche se egli reggesse un qualche comitato di quella Marca; così pure da nessuno storico non viene esso appellato figlio di quel re, che anzi Arnolfo nella sua Storia di Milano dice, che tre soli erano i figliuoli di Berengario, cioè Adalberto, Guido e Corrado (2).

Ma vince ogni altra prova che Dadone non era figlio di Berengario, quella che ci si profferisce dal documento già citato dell'anno 987. Questa carta data in Ivrea addì 30 d'ottobre di quell'anno per l'indizione xv, contiene una donazione fatta a' canonici di S. Eusebio da Ichilda figliuola del marchese Ardoino, in compagnia di suo marito Corrado figliuolo del fu re Berengario (3), di certi beni posti nella contea di Vercelli. La data d'Ivrea portata da quella carta, il titolo di marchese dato ad Ardoino, e la donazione di beni posti nel territorio della Marca d'Ivrea fattavi da Ichilda sua figlia, sono agli occhi del più severo critico indizi più che bastanti per dichiarare che nell'anno 987 la Marca d'Ivrea era già tenuta dall'Ardoino figlio del conte Dadone. Tale era pure stato il giudizio portato da monsignore Della-Chiesa, e già abbiamo fatto osservare siccome il parere contrario dell'autore dell'*Adelaide Illustrata* non fu appoggiato ad altro, che al non aver egli avuto cono-

(1) Cfr. CHIESA Lodov., *Storie del Piemonte* p. 37. — Philib. PINGONII, *Aug. Taur.* p. 29. — TESAURO, *Regno d'Italia*, annotaz. (498). — Ecco come parla di Dadone padre di Ardoino uno storico del secolo scorso che andò seguendo i traviamenti de' seicentisti: « Egli è quasi impossibile » di poter accertare la cronologia di questi tempi, e conviene che il lettore si contenti di sapere, » che Dadone fu rimesso in possesso della Marca d'Ivrea, la quale poco avanti da uno degli » Ottavi Augusti fu tolta a' suoi maggiori, nel che tutti convengono gli storici: ma quando e da » chi sia stato rimesso non si può precisamente sapere. Quel che è certo però si è che ciò seguì » prima del 986. » (BENVENUTI, *Storia dell'antica città d'Ivrea* ms., lib. 3. c. 6. p. 108.) E prima dice che Dadone fu rimesso nel marchesato da Adelaide imperatrice. Tutto ciò non è appoggiato a nulla.

(2) ARNOLFI, *Mediol. Hist. Lib.* I. c. VII. R. I. T. IV.

(3) Vedi in fine questo documento (Append. n. 1) da me attentamente trascritto parola per parola dall'originale esistente nell'archivio capitolare di Vercelli, che fu uno de' pochissimi a me lasciati vedere.

scenza di questa carta non esplicitamente citata dal Chiesa. Or dunque come crederemo noi che il marchese Ardoino avesse concesso la propria figliuola in moglie a Corrado se questi era suo zio, cioè fratello di suo padre Dadone? Chi non sa quanto fosse il rigore in que' tempi delle leggi ecclesiastiche circa i matrimoni tra prossimi parenti? Da tutto questo se ne deduce doversi tralasciare come erronea l'opinione che fa di Ardoino un nipote del re Berengario, e che rappicca in tal guisa i diritti di lui al marchesato d'Ivrea, ma che ad un tempo certa cosa è, qualunque fosse il modo in cui questo avvenisse, che Ardoino già si stava al possesso di quella Marca nell'anno 987. La qual deduzione concorda con quanto s'è detto sul principio di questo Capitolo sovra il tempo presunto della di lui nascita: perciocchè se nell'anno 987 Ichilda di lui figlia già era andata a marito, egli ad ogni modo doveva aver tocchi gli anni trentacinque incirca dell'età sua, ed essere perciò venuto al mondo, siccome avvisammo, nell'ultimo decennio del regno di Berengario II.

Ma di più questa data dell'anno 987 favorisce ancora le induzioni, che noi possiamo formare sovra il modo col quale Ardoino giunse al possesso di quel marchesato. Perciocchè essendo nell'anno 984 passato di vita Ottone II, e correndo in quel tempo l'infanzia e la minorità di Ottone III, già riconosciuto a re di Germania e d'Italia dalla Dieta di Verona (1), propizio era il punto ad un uomo audace e facoltoso per possessioni e per seguito, qual era Ardoino, di ottenere colla forza del denaro, e colla violenza quella carica, della quale al postutto altri avrebbe fatto vana prova d'impedire a lui coll'armi il possesso (2).

E poichè narrano i biografi d'Ardoino, siccome egli era de' più innanzi che fossero, in corte degli Ottoni, certo che anche per questo lato potremo avvisare che gli venisse in tal guisa agevolata la via alle sue mire ambiziose, dove le parole dell'epistola sopracitata non ci avessero insospettiti che Ardoino abbia coll'oro ottenuta tale eccelsa dignità; forse egli fu aiutato e dall'una e dall'altra di queste cause.

(1) *Annali d'Italia anno 983.* — GIULINI, *Memorie di Milano* P. II. p. 339.

(2) Ottone III per le cabale di Leone vescovo di Vercelli, divenuto acerbo nemico d'Ardoino, non fece prova di assalirlo nella sua Marca: ed Arrigo II re di Germania lo assediò invano durante un anno intero nel castello di Sparrone. (*Chron. Noval. Lib. V. cap. XXXVII. Mon. II. P. T. V.*).

Dal sin qui detto noi ne potremo adunque conchiudere, che al tempo in cui cominciarono le gare col vescovo Warmondo, stava Ardoino per lo meno da una decina d'anni al possesso della Marca d'Ivrea. E questa decina era appunto quella in cui s'erano venute maggiormente manifestando le conseguenze delle novità introdotte dagli Ottoni.

Generalmente nelle città più frequenti d'uomini liberi (buoni uomini) maggiore era l'odio destatosi contro l'arricchimento del clero, e maggiore la resistenza a' nuovi ministri de' vescovi, fra' quali più insospettivano degli avvocati delle chiese e de' loro nuovi vassalli perchè prepotenti (1). Dovunque quelle mutazioni erano sfregiate col titolo di *nuove foggie di governo* (2), ed in molti luoghi e sotto forme diverse, queste cose avevano prodotto risse, movimenti di popolo, sommosse, e spargimento di sangue. Due pensieri infiammavano quelle genti animose: tutelar contro il clero le poche loro franchigie; conquistarne colla forza altre maggiori.

Così assai prima di Verelli s'era desta Milano. L'*esenzione* della città e di una parte del territorio (3) ottenuta dall'arcivescovo Landolfo aveva fatto insorgere que' cittadini contro la *nuova foggia d'autorità usata da' nobili*, cioè da' vassalli dell'arcivescovo. La cosa s'era composta in pace dopo due battaglie vinte dal popolo, per le quali s'era venuto a patti, e stabilito i diritti de' cittadini (4).

Così ancora prima dell'anno 996 in Cremona il vescovo Olderico co' suoi vassalli era stato privo dal popolo del governo della città, di cui Ottone I gli aveva concesso l'*esenzione* con cinque miglia di territorio (5). Questa lite durò lungamente, e si rinnovò più aspra sotto il vescovo Landolfo successore di Olderico, il quale, siccome scrive Sicardo cronista

(1) In una carta di donazione fatta nell'anno 1009 ad un monastero, o tratta dal GIULINI dall'Arch. Ambrosiano, il donatore Ildeardo prescrive: « Volumus et ordinamus vel constituimus ut » in monasterio numquam sit Advocatus vel Vassallus, quia videtur nobis magis nocere » quam valere. » (GIULINI, *Mem. di Milano* P. III. p. 500 e 506. Vedi pure le note a tale documento in FUMAGALLI *Antichità Longob. Milanesi* T. IV. p. 376).

(2) LEO, *Vicende della Costituzione delle Città Lombarde*, traduzione del conte BALBO.

(3) Probabilmente da Ottone II. — Cfr. LEO, *Vicende della Costituzione delle Città Lombarde*, traduzione del conte BALBO, p. 116, e GIULINI op. cit. p. 152.

(4) « Nova pax vetera dissolvit odia. Archiepiscopus enim memor pastoralis diligentiae, Populus » vero recordatus ovilis obedientiae, donantes praeterita, foederati sunt pace perpetua. » (ANSELMI *Mediol. Hist. Lib. I. c. X. R. I. T. IV*).

(5) Dipl. Ottonis III an. 996 Olderico Cremonensi Episcopo concessum. Act. Romae VI kal. » idem. Ind. IX. » (UGHELLI, *It. Sacra* T. IV. col. 592). — Vedi GIULINI op. cit. P. II. p. 353.

e vescovo anch'esso di Cremona, fu pure esso cacciato da' Cremonesi *perchè persecutore del popolo* (1). Finalmente *vestiti migliori costumi*, cioè fattosi più mite e pieghevole, e *tornato nella grazia del popolo* (per i patti che furono concordati), di nuovo veniva accolto nella città e ripigliava la sede (2).

Ma in Ivrea, città nella quale non trovo che i vescovi anteriori a Warmondo avessero ottenuto l'esenzione, queste civili dissensioni pigliavano altra forma: e dove noi vedemmo Milano e Cremona ergersi tumultuariamente contro i vassalli del vescovo, qui vediamo i cittadini seguir l'impulso dato dal proprio marchese, e farsi rabbiosamente incontro al capo di quella chiesa (3).

Qual potente motivo li spingesse in tal guisa contro Warmondo, non si conosce: chè anzi la fama di santità di cui ne' secoli posteriori godette questo vescovo d'Ivrea (4), non va d'accordo con quei furori. Forse oltre quell'ardore per l'indipendenza, che le città italiane venivan manifestando, sentiva Ivrea fin d'allora quello zelo pel marchese Ardoino del quale vedremo maggiori prove ne' seguenti Capitoli: e forse ancora il timore di cadere sotto la dominazione del clero, quello era che traeva i cittadini a seguire Ardoino, nel quale dopo quanto egli aveva operato in Vercelli ravvisavano spiriti bastanti per opporsi a quelle odiate innovazioni.

E quanto all'ambizioso marchese d'Ivrea non è difficile a credersi che la coscienza della propria forza non lo stimolasse a ripigliare colla violenza que' beni ch'egli stimava a lui appartenere, e ad autivenire così l'effetto di un qualche diploma d'*esenzione* che il vescovo fosse per ottenere, come aveano fatto altri molti. Alla testa pertanto de' suoi militi, de' suoi fedeli e famigliari, secondato da una parte de' cittadini

(1) « Tempore Henrii Claudi, capellani eius nomine Landulphus, Cremonae fuit Episcopus, qui monasterii S. Laurentii et Cremonensis populi fuit acerrimus persecutor » SICARDUS in Chron. R. I. T. VII. col. 534).

(2) « Dum mox alios induisset mores, ac mutasset vitam, et cum populo Cremonensi redisset in gratiam, receptus fuit in Episcopum. » (CAVATELLI, *Ann. Cremon.* p. 30)

(3) « Maledicimus omnes ciues in eptorea ciuitate habitantes, quicunque Ardoino consilium dederint aut adiutorium. » (Vedi nell'Appendice il documento n. 9).

(4) Nell'Archivio capitolare d'Ivrea conservasi l'antico Rituale coll'Uffizio che recitavasi ad onore del B. Warmondo: ora non è in uso.

e da' vassalli stessi di Warmondo (1), invadeva Ardoino inopinatamente i beni della chiesa di Santa Maria Eporediense, cacciava con violenza il vescovo dalla sua sede, ed occupava le terre, le case e le altre possessioni da quello tenute. Nè contenti a questo gl'invasori, secondo l'uso barbarico di que' tempi, s'abbandonavano a' soliti modi, guastando, mettendo a fuoco ed a sacco i beni occupati, e maltrattando in essi o sterminando gli schiavi ed i servitori (2).

Tali erano gli eccessi di Ardoino non al certo assievoliti nella narrazione del vescovo Warmondo, ma resi assai probabili dalla tristizia di quell'età. Odasi adesso da' documenti medesimi con quali armi provvedesse questi alle difese.

L'occupazione non era stata continua, ma le aggressioni replicate, e le vessazioni perenni; tutto questo ci narra Warmondo ne' documenti (3); tuttavia egli contraddice in qualche guisa a se stesso, ed attenua senza volerlo la forza delle sue lagnanze, e l'enormità de' bistrattamenti sofferti, col favellarne quasi al cospetto di Ardoino con tale veemenza che palesa la libertà sua, e così far opera (ma non a torto) di conceitar contr'esso i fedeli della sua chiesa. « Sappia la carità vostra, o fratelli miei, (così » in una pubblica allocuzione) siccome *un certo tale* per nome Ardoino » posponendo per consiglio diabolico le cristiane promesse fatte nel bat- » tesimo, e la fede giurata a questa Santa Chiesa Eporediense, abban- » donato il servizio di Dio e della Santa Chiesa, voltosi in apostasia, » ed al demonio, al quale ed alle cui opere aveva rinunciato, non ha » temenza di dare il guasto e depredare la vigna del Signore, cioè la » di lui Chiesa, opprimendo ed uccidendo i poverelli di Cristo, redenti » col prezioso suo sangue, *assiduamente rapinando le loro sostanze*.

» Or dunque perchè costui esser doveva figlio di questa Chiesa a » noi per volere di Dio commessa, ed invece si è reso nemico e per- » secutore di quella: perchè rinato in essa per l'acqua e per lo Spirito » Santo, annoverato fra gli adottivi figliuoli di Dio, egli coll'imitar » il demonio si dimostrò figlio di questo: noi dobbiamo andar solleciti

(1) « Maledicimus omnes milites terram Sancte Marie Eporiensis tenentes, qui . . . et nos per » rectam fidem in omni ingenio . . . non inuauerint. » (Doc. n. 9 nell'Append.).

(2) « Cuius Episcopum a sede propria saepe uolenter expulit, cuius seruos contriuit, cuius » famulos exterminauit. » (Doc. n. 6 nell'Append.).

(3) Docum. passim.

» acciò nessuna delle pecorelle nostre non vada per la pastorale nostra
 » negligenza in perdizione, e non abbiamo di poi a render conto di
 » essa al Principe de' Pastori G. C. S. N. nel tremendo giudizio, giusta
 » quanto egli stesso ne minaccia.

» Mandammo a lui un chierico nostro con lettere ammonitorie (1),
 » una volta, due volte ed una terza, secondo i canoni invitandolo ad
 » emendazione, soddisfazione e penitenza, e rimproverandolo con paterno
 » affetto. Ma esso, pur troppo, con diabolica ostinazione dispreggò gli
 » avvisi nostri salutari: che anzi durando nella sua prima malizia, di
 » giorno in giorno ruina nel peggio, e imitatore di Giuliano l'apostata,
 » gonfio di superbia sdegna di soddisfare alla Chiesa di Dio!

» Contro di somiglianti trasgressori e violatori della santa legge, e di
 » quella pace che G. C. donò e lasciò a'suoi Discepoli, abbiamo precetti
 » divini ed apostolici che ci prescrivono quello s'abbia per noi a fare
 » di costoro. Perciocchè, dice il Signore nel Vangelo: se il tuo fratello ecc.

» Adempiendo pertanto i precetti divini ed apostolici, questo putrido
 » membro incapace di medicina troncheremo dal corpo della Chiesa
 » col ferro dell'escomunicazione e di una terribile maledizione, acciò le
 » altre membra del corpo nostro da sì pestifero morbo non vengano
 » avvelenate » (2).

Fu di fatto immediatamente bandita da Warmondo la scomunica contro
 Ardoino, contro tutti i suoi complici, seguaci, uomini, fedeli, amici e
 fautori: e contr'essi coloro che con Ardoino mantenessero comunanza (3).
 Il rito poi che osservavasi in quel tempo ed in quella chiesa nel pro-
 nunciare tal maniera di scomuniche ci vien descritto nel modo seguente.
 Ogni volta che il vescovo aveva deliberato di scomunicare od anatema-
 tizzare (4) un qualche infedele per manifesti e certi delitti, egli, dopo
 la lettura del Vangelo, ne ragguagliava il clero ed il popolo, informan-

(1) Vedi al documento n. 3 una di queste lettere.

(2) Append. doc. n. 4. — Vedi pure *Formulae veteres exorcismorum et excommunicationum*, pubblicate dal BALUZIO in *Capit. Regum Francor.* T. II. p. 663.

(3) « Nos vero eundem (Ardoinum) maledictum et apostatam eum universis complicibus suis et sequacibus et hominibus et fidelibus et amicis et communicatoribus et fautoribus eius etc. » (Doc. n. 6).

(4) « Excommunicationem maiorem puto idem atque anathema quod olim ab excommunicatione simpliciter distinguebant. » DUCANGE.

doli con una breve allocuzione della qualità de' delitti apposti all'inquisito, e della necessità di fulminar contr'esso la scomunica (1).

Quindi il vescovo circondato da dodici sacerdoti, che tenevano in mano lampade accese, pronunciava una lunga serie di terribili maledizioni contro il reo, ad ognuna delle quali il coro rispondeva FIAT. Di poi seguiva la formola della scomunica, e questa terminata, i detti sacerdoti gettavano a terra le loro lampade, e le conculcavano co' piedi.

Compinto il rito, il vescovo doveva spiegare questa formola di scomunica alla plebe, e *nella lingua parlata*, acciò tutti comprendessero quanto terribile fosse quella sentenza (2), e come da quel punto non si dovesse più avere comunanza veruna collo scomunicato: e finalmente come chiunque seco lui mangiasse o bevresse, o facesse orazione, chi lo abbracciasse o venisse con esso a famigliare colloquio, ove non fosse per condurlo a penitenza ed a soddisfazione, rimanesse colpito dalla medesima scomunica. Mandavansi in seguitto lettere agli altri vescovi (3), e nelle varie pievi, imponendo a' Parrocchiani di annunciare in ogni domenica dopo la lettura del vangelo, tale scomunica alle popolazioni alle loro cure affidate, acciò nessuno per ignoranza non facesse comunanza collo scomunicato. Quindi tale sentenza dovea essère notificata al metropolitano (4).

Dalla relazione di Warmondo sembrano risultare in egual modo e il delitto di oppressione di cui rendevasi colpevole Ardoino, e l'esagerazione in che trascorreva il vescovo oppresso. Perciocchè tutte le accuse di apostasia, di spergiuro, di persecutore della Chiesa apposte dal vescovo al suo nemico, tutte riducevansi in quella di aver occupati i beni, o parte de' beni della sua chiesa. Quindi la libertà con cui parlava del marchese d'Ivrea, e lo stesso atto di fulminare contr'esso que' tanti anatemi, dimostrano che le vessazioni d'Ardoino non erano poi tali, che l'esercizio della sua episcopale dignità venisse a Warmondo impedito. Delle quali cose troveremo or ora una prova maggiore.

(1) Doc. n. 4.

(2) « Post haec eps plebi ipsam excommunicationem communibus uerbis debet explicare » (documento n. 7), cioè nella lingua che si parlava comunemente in Ivrea sul finire del X secolo. Qual era questa lingua, cioè dialetto?

(3) Cioè probabilmente agli altri vescovi suffraganei della chiesa arcivescovile di Milano.

(4) « Seniores etiam eius ipsa excommunicatio debet nota fieri. » (Ibid.).

Ma l'effetto di queste rigorose censure non fu, per quel che apparisce, di far riederere il marchese Ardoino, nè di rallentare le sue incursioni sovra i beni della chiesa d'Ivrea; ma sì piuttosto di renderle più frequenti e più crudeli.

A' quali eccessi con finnesta alternativa corrispondeva il vescovo novelle sentenze, colle quali scomunicava una seconda volta il marchese Ardoino ed i suoi (1). E per rendere per avventura più solenne e più acerbo questo secondo anatema, oltre le novelle maledizioni colle quali colpisce Ardoino e i suoi seguaci, egli nomina specialmente fra questi un *Amedeo* fratello d'Ardoino, ed un *Everardo*.

Di questo nuovo fratello del marchese d'Ivrea, e già da noi sulla fede della stessa carta nominato nelle pagine precedenti, nessuno storico e nessun altro documento nè prima nè dopo non fa parola: avviseremo pertanto ch'egli ponesse la vita in quelle civili commozioni; così pure di Everardo qui noverato fra' capi d'Ardoino, del quale non mi fu dato finora di sapere altro che il nome (2).

Questa seconda scomunica è, s'io non erro, quella indicata da Warmondo nella lettera al pontefice Gregorio V, imperocchè i maggiori rigori del vescovo portando al colmo il bestial furore d'Ardoino, la chiesa d'Ivrea cadde in uno spaventoso abisso di mali, dal quale Warmondo non aveva più potere di sollevarla. Ricorse pertanto a quel pontefice con una calda e patetica lettera, la quale, sebbene non porti veruna altra indicazione se non se d'essere stata scritta *al nome dell'adunanza de' vescovi* (senza accennare di quali) *al Sommo Pontefice Gregorio*, apparisce chiaramente come opera del vescovo d'Ivrea (3).

Lo stile avvilluppato e metaforico di questo documento, zeppo di traslati e delle indispensabili antitesi in uso a que' tempi, si distingue tuttavia da quello allora adoperato da' notai nelle pubbliche scritture, per la minore quantità d'idiotismi e di sgrammaticazioni; nuovo esempio

(1) « Undis eum corrigi potuimus, inde eum evidentiùs desuere ut scitis comperimus. Unde iam eum secundo anathematis vinculo innodavimus. » (Documento n. 10).

(2) Documento n. 9.

(3) « Lumine intimae contemplacionis divinitus illustrato, Domino Gregorio Pontificum Summo. » coetus Episcoporum, quid quid praesens in Domino delectabile, et futurum habet optabile, cum » sedula nostrarum precum devotione. » (Doc. n. 10).

che dimostra siccome le poche cognizioni letterarie scampate nell'universale ignoranza, stavano sul cadere del secolo X nelle mani de' chierici.

Nè la lettera manca d'arte, nè di qualche utile piaggiatura verso il pontefice, o difetta delle esagerazioni di che sempre sogliono abbondare scritti somiglianti in tempi agitati e faziosi: ma siccome queste sono bastantemente chiare e patenti, esse non falliscono punto, anzi giovano coll'eccesso de' loro colori, al quadro col quale vi si vuol comprovare il papa.

Il sunto della lettera è questo: nella prima parte vi si ricorda al pontefice, essere egli stato commesso per ispeciale misurazione di Dio a tutelare la *divina eredità* (cioè la Chiesa): come l'imperatore, *suo congiunto* (1) al governo della *superficie del mondo* (l'impero romano). « Codesti due (così l'epistola) che una stessa linea di parentela congiunge, che una stessa fede conforta, leggono al tutto sentire ad un modo, premeditare a vicenda le stesse cose, trarre ad un medesimo scopo, e a questo in non dissimile guisa arrivare » (2).

Dovere l'uno e l'altro di continuo ed attentamente vegliare acciò nulla non accada che turbar possa l'andamento del mondo: nel quale se alcuna cosa si vada innalzando, od altra fuori del debito abbassando, tosto è dovere che per l'opera loro la strada s'appiani « talchè (soggiunge) » il vostro camminare inoffensamente *proceda*, ed al gregge che vi tien dietro, imitabile *succeda* (3).

» Doni pertanto ascolto (così conchiude la sua sposizione) la paternità vostra alle nostre lagnanze: inondata delle lagrime nostre condescenda a' gemiti nostri: ed a noi tutti provveda (4).

» Consideri il capo nostro a' lamenti delle altre membra: sì che quel male che ora negletto in noi va *serpendo*, di nascosto *rependo*, non giunga alla fine ad occupare il *capo*, e in tal guisa *tutto il corpo*

(1) Gregorio V era nato da Liutgarda moglie di Ottone duca di Carinzia e marchese di Verona, figliuola di Ottone I imperatore, avolo paterno di Ottone III allora imperatore regnante. Gregorio ed Ottone III erano dunque fratelli-cugini.

(2) « Quos etenim propaginis linea unit et omnis consolidat fides, decet unum sentire, idipsum inuicem praemeditari, idem sapere, nec dispari clausula terminare. » (Doc. n. 10).

(3) « Quatenus uester incessus inoffense procedat, et subsequenti gregi imitandum succedat (ivi).

(4) « Intendat igitur paternitas vestra lamentis nostris perfusa gemitibus nostris, et provideat omnibus nobis. » (Ivi)

» non ne abbia miserabilmente e forse irremediabilmente a infracidire (1).
 » Ma acciocchè sia noto quello che da noi si chiede, (così nella nar-
 » rativa) noi vi profferiamo Ardoino come obbietto della nostra lega-
 » zione. Ardoino, il quale nulla in se non ha di divino, nulla di u-
 » mano Nulla di divino perocchè porta invidia al bene di tutti:
 » ammazza perfino gli stessi sacerdoti, e quasichè possa arreccar loro
 » pena più veemente, con inaudita sevizia appresta il rogo a' loro cadaveri
 » ecc. (2). Nulla non tiene d'umano poichè mentre più inferocisce, e
 » sitibondo di sangue, ama e gode di versarne quanto più può egli me-
 » desimo, e di pascersene lo sguardo (il che è alieno da ogni senso
 » d'umanità), tiene per sommo vanto l'accendere in altrui lo stesso
 » suo furore ecc.

» Ma avvengachè una tale e *tanta* contesa, come quella che abbraccia
 » la causa di noi tutti, sia per la lontananza vostra (3), che per l'in-
 » dugiare del cristianissimo nostro Imperatore, non *abbia* finora ottenuto
 » verun provvedimento; degnisi la pietà vostra, quella coll'occhio dello
 » spirito esaminare, ed a noi tutti con paterno affetto in comune prov-
 » vedere, acciò premuniti della protezione di un tanto padre, possiamo
 » una volta audare esenti da' tradimenti di questo demonio vestito di
 » forma umana ».

Prosegue quindi con egual calore, ed aggiunge doversi preferire la salute di tutti al vantaggio ingiusto di un solo, che senza veruna onesta necessità od utile cagione è l'autore di tanti mali.

« Nè noi saremmo (dic'egli) scusabili al nostro interno giudizio, ove alterassimo la verità di tali asserzioni. Deesi ad ogni modo anti- vedere, che non succeda maggior male, ed è vergogna che quello che

(1) Si osservi al doppio significato della voce *caput*; cioè *capo*, *signare*, perchè Pontefice, rispetto agli altri chierici: e *capo*, *testa* rispetto alle altre membra del corpo umano. « Animad- uertat Caput nostrum membrorum conquestum, ne forte in nobis neglectus (*neglectum*) male » (*malum*), *serpendo et latentor rependo* preoccupet caput, et sic totum miserabiliter aut forsau- ioremmediabiliter corpus tabescat (Ibid.).

(2) Amplificazione rettorica, che si riferisce alla morte di Pietro I vescovo di Vercelli, di cui nel Capitolo precedente, prova novella che non ci siamo ingannati circa il tempo in cui accaddero le due spedizioni d'Ardoino, in Vercelli ed in Ivrea.

(3) Cioè la lontananza di papa Gregorio V da Roma, donde nel 996 era fuggito « nudum oim- nium rerum » cacciato da Crescenzo, ch'egli stando in Pavia scomunicò nel concilio tenutovi nel 997. (Vedi *Ann. Hildesheim. ad ann.*, apud PERTZ *M. G. H. T. V.*, et *Litt. Greg. V de Sinodo Papiensi* in PERTZ, T. VI). Ciò accresce l'argomento ch'io fo sopra la data di questa epistola di Warmoodo, ch'io giudico posteriore al ritorno di Gregorio V in Roma, che fu circa il 22 febbrajo 998. (MURAT. *ad ann.*).

» voi sapete essere stato con tanta autorità operato, venga ora senza
 » ragione mutato (1). Perciocchè dolenti noi della fraudolenta sua osti-
 » nazione nelle frequenti adunanze con singolare esortazione, con pon-
 » derata legazione, e *colla multiplce ammonizione delle carte* cercammo
 » rивocarlo da cotanta perfidia: ma perchè l'uomo tristo si fa coll'au-
 » monirlo peggiore, noi avvisammo correggerlo *colla prima scomunica* (2):
 » quindi, come ben v'è noto, noi lo vedemmo più apertamente, incru-
 » delire: epperò lo annodammo col *secondo vincolo dell'anatema*, giusta
 » quanto dice il Profeta ecc. Consideri adunque la S. V. se quegli che
 » cotanto giustamente *fu vincolato* debba ora, incorretto, venire *svin-*
 » *colato*: o se questa sua *svincolazione* debba *vincolare* noi stessi. Alla qual
 » considerazione (così termina la lunga epistola) G. C. ecciti la mente
 » Vostra, e finalmente conceda di levare l'impedimento a tale giusta cen-
 » sura » (3).

Questa lettera, della quale abbiain creduto dover qui riferire, un *sunto* fedele, prova evidentemente che Gregorio V, uomo sebben giovine, in ciò di pacato giudizio, non approvò le vendette di que' vescovi, e che nella lite che ardeva tra il marchese d'Ivrea e Warmondo, tutto il diritto non istava forse dalla parte del vescovo, sebbene i modi usati da Ardoino fossero barbarici e oppressivi.

Che antichi e solenni fossero i diritti del marchese d'Ivrea, lo dimostra ancora una clausola di un imperiale diploma strappato pochi mesi più tardi, sotto il pontificato del focoso Silvestro II, dall'avidità di Leone il monaco, vescovo di Vercelli e successore di Raginfredo, al troppo facile Ottone III, clausola colla quale questo imperatore in un'ampia donazione fatta a Leone, esclude espressamente le ragioni che aver potesse il *marchese d'Ivrea* sovra le cose donate (4).

Ma meglio ancora apparisce siccome Gregorio V, tuttochè disappro-

(1) « El quod tanta auctoritate recolitis factum, pudendum est sine ratione mutatum. » (Ibid.). Questo si riferisce, a parer mio, alla scomunica da tutti i vescovi pronunciata, che non venne dal papa confermata, o forse annullata, come meglio si vedrà in appresso.

(2) « Undis eum corrigece pulavimus. » Evidentemente significa la scomunica, ma non trovo cenno della frase *undis corrigi* in tal senso nel DUCANGE.

(3) « Consideret igitur sanctitas vestra si tam iuste innodatus debeat enodari incorrectus, aut » si sua enodatione nos omnes deceat innodari. » (Ivi in fine). — Sembra evidente adunque, che le due scomuniche bandite da Warmondo non erano state approvate o confermate dal Pontefice.

(4) « Nra igitur impli maiestate praecipimus ut nullus dux, nullus marchio, nec etiam Yp- » riensis marchio etc. audeat scm Vercellensem Eccliam aut praedictum Leonem Epum etc. mole- » stare disuastare etc. » (Dipl. Ott. III pro Eccl. Vercell. an. 999 non. maii, Hist. P. M. T. I. doc. CXCVI).

vando gli eccessi di Ardoino, non aveva confermato la sentenza di quel sinodo, da una breve epistola sua di cui qui reco la letterale versione.

« Gregorio vescovo servo de' servi del Signore ,

» (*A te Ardoino*) (1) espugnatore della cristiana fede, nessuna benedizione, poichè ancora nessuna non ne meriti.

» Abbiamo inteso, e di ciò gravemente ci duole, siccome la S. Chiesa Ipporediense prova intollerabili mali dalle tue vessazioni: e come colà dove ricevesti il latte della dottrina, a remedio dell'anima tua, con diabolica gratitudine tu non inuorridisci di corrispondere il veleno della persecuzione, od hai temenza di dare il guasto alle possessioni di quella chiesa.

» Pur troppo egli è certo che tu ti diletti di andare iniquità ad iniquità aggiungendo, a persuasione di colui che ti ha spinto a dar principio a tanto male.

» Io parlerò dunque a te con autorità apostolica.

» O cessa le male opere incominciate, ed ammenda quelle che tu hai commesso, o sappi che nella Pasqua del Signore tu verrai dalla spada dell'anatema infallantemente punito ».

Questa lettera (come gli altri 10 documenti dell'archivio capitolare d'Ivrea) non porta veruna data; faremo adunque d'indagarla alla meglio. Dapprima siamo certi che essa fu scritta tra il principio di maggio dell'anno 996 ed il 12 di febbraio del 999, tempo nel quale Gregorio V tenne la sede apostolica (2). Il non trovarsi traccia fra i documenti d'Ivrea della scomunica qui minacciata da questo papa ad Ardoino, mi fa credere che questa lettera sia degli ultimi mesi del 998, giacchè le vessazioni di Ardoino avendo durato, come apparisce, assai tempo, se la lettera fosse stata scritta prima della pasqua del 998, la scomunica pontificia avrebbe avuto luogo.

Ciò posto ne conchiudo che essa fu la conseguenza delle doglianze surriferite di Warmondo e degli altri vescovi, e che queste furono sporte al pontefice pochi mesi prima in quel medesimo anno 998. La qual osservazione s'accorda con quello che abbiamo detto, assegnando alla

(1) Spazio in bianco pel nome di Ardoino rasiato via evidentemente (Vedi il doc. n. 11 e le note nell'Appendice). « Greg. eps servus servorum Dni (.) xpianae fidei expugnator, nullam, quia nondum mereris benedictionem ».

(2) MURAT. *Annali ad ann.*

fazione di Ardoino contro Vercelli gli ultimi mesi dell'anno precedente.

Altronde che la pace si ricomponesse tra il marchese ed il vescovo d'Ivrea, sia perchè la scomunica de' vescovi contr'esso fosse irrita, o perchè fosse levata in seguito di qualche soddisfazione data da Ardoino, me lo fa credere il vedere che Warmondo continuò pacifico possessore della sua chiesa d'Ivrea ch'egli tenne sino all'anno 1011, tempo durante il quale Ardoino rimase non solo possessore della Marca d'Ivrea, ma che innalzato alla dignità di re d'Italia, egli avrebbe trovato modo di deporre Warmondo da quella sede, ove non si fosse tra di loro ricomposta la pace. Comunque poi andasse tale bisogna, certo è che la vittoria fu per Warmondo, giacchè addì 9 di luglio dell'anno 1000 egli ottenne dall'imperatore Ottone III il diploma d'*esenzione* tanto temuto da Ardoino, per cui gli si concedeva « tutto il distretto (territorio) della città d'Ivrea, e fuori » d'essa per tre miglia in circuito (1).

Ma prima di ciò una maggiore tempesta sovrastava ad Ardoino. Come già si è detto, era a Raginfredo vescovo di Vercelli succeduto (probabilmente ne' primi mesi dell'anno 999 (2)), il famoso monaco Leone, personaggio del quale è nota nella storia di quegli anni l'insaziabile avidità delle ricchezze, e la valente maestria nel destreggiarsi per conseguirle fra cabale, raggiri ed intrighi (3).

Uno scrittore Vercellese volle ravvisare in questo vescovo quel monaco Leone abbate in Roma del monastero de' Ss. Bonifazio ed Alessio sul monte Avventino, il quale andò nel 995 legato in Francia di papa Giovanni XV al concilio di Reims, per decidervi la lite tra il famoso Gerberto (che poi fu sommo pontefice col nome di Silvestro II) ed Arnulfo, per l'arcivescovato di quella città (4): ma nessun dato non

(1) « Omnem eiusdem civitatis districtum et publicam functionem, atque forinsecus circumeire » per tria miliaria etc. » (Dipl. Ott. III. Rom. Imp. pro Eccl. Ipored. Actum Papiæ VII id. iul. ann. D. I millesimo, Ind. XII. etc. Append. n. 17).

(2) Argomento questa data dal vedere che il diploma imperiale sovra citato, che dona al vescovo Leone i comitati di Vercelli e di Sant'Agata, porta quella di Roma a' 7 di maggio 999: egli è presumibile che Leone sia che come monaco abitasse in quella città, o che appena eletto vescovo vi si recasse, ponesse in campo tutti i suoi maneggi per ottenere quell'insigne diploma, prima che il marchese Ardoino nulla non operasse per impedirlo.

(3) GLABRI Rod., *Vita S. Wilhelmi Divion. Abbatis* apud BOLLAND. die 1 ianuar. § XI. — Chron. Noval. Lib. V. c. XXXV novae edit. in II. P. M. T. V. — *Epist. Fulberti Carnot.* apud DUCESNI R. F. T. IV. p. 193 e seguenti. — MABILLON, *Annal. O. S. B. T.* IV ad an. 999 — MURATORI, *Antiq. Med. Aev.* T. VI. col. 318. — TERRANEO, *Adel.* III. P. II. p. 111.

(4) RICHERI, *Hist.* Lib. IV. § 95, ap. PERTZ *M. G. H.* T. V.

avvalora quest'opinione, ove non sia la possibilità quanto al tempo: che anzi vedendo noi che il vescovo Leone entrò poi nelle grazie di Silvestro II, al quale nel concilio suddetto quel legato pontificio si era mostrato avversò, ne argomenteremo che poco probabile sia l'ipotesi dello scrittore di Vercelli.⁽¹⁾

Ad ogni modo certo è, che Leone vescovo, fu monaco, e che nell'anno 999 trovavasi in Roma, dove s'era procacciato fama, siccome scrisse Benzone vescovo d'Alba, di *facundo parlatore e d'efficace operatore* (4). Entrato, comunque questo avvenisse, nelle grazie di Ottone III e del nuovo pontefice Silvestro II successore di Gregorio V, s'avacciò egli, appena eletto (forse pel patrocinio loro) alla sede di Vercelli, di ottenere quell'insigne diploma imperiale che gli concedeva gl'interi comitati di Vercelli e di Sant'Agata con ogni pubblica potestà e dominio, potente ed efficace mezzo di antivenire e d'attutare ogni giurisdizionale pretesa che aver potesse il marchese d'Ivrea sovra di quelli.

Ma ciò non bastava all'astuto monaco. Chè mosso da un lato dal timore dell' vendette del marchese d'Ivrea, e spinto dalla sete d'ingoiarne le ampie ricchezze, tanto seppe egli operare serpentando alle porte dell'aula imperiale e del palazzo pontificio, adulando, insistendo, ed esagerando i guasti sofferti dalla sua chiesa, apponendo ancora ad Ardoino come un personale misfatto la morte del vescovo Pietro, che condusse l'uno e l'altro di que' potenti a novelli rigori. E tanto più si vuol credere che questi rigori fossero l'effetto delle insistenze del vescovo Leone, che già dalla morte di Pietro erano passati alcuni anni, e mai nessun richiamo nè per parte del precedente pontefice Gregorio V, nè per quella di Ottone, non era stato mosso contro il marchese d'Ivrea per la fazione di Vercelli, nella quale quel vescovo aveva perduto la vita, mentre appena arrivato Leone alla cattedra di Sant'Eusebio sorse contro il marchese Ardoino questa nuova fierissima persecuzione.

Cominciò essa dall'intimazione fatta a lui ed al suo figlio Ardicino di presentarsi in Roma ad un sinodo de' vescovi d'Italia da tenersi nella basilica di S. Pietro alla presenza del papa e dell'imperatore, per ren-

(1) « Valde potens in sermone, efficax in opere. » (Benzonis Alb. *Ep̃i paneg.* Henr. IV Imp. apud MENKEN. *R. G. T.* I). — « LEO Vercell. Epus, vir literis eruditus, fandi quoque copia exercitatus. » (Auct. *Vitae S. Berwardi*, in *Script. R. B.* LEIBNITH, T. I. p. 154).

dervi conto de' modi da Ardoino tenuti nella presa di Vercelli. Obbedirono l'uno e l'altro alla chiamata, ma l'aspetto rigoroso col quale furono accolti in quel consesso, la qualità degli aggravii, e finalmente la potenza degli accusatori spaventarono talmente il giovine Ardicino, che udite le accuse, e fatte le sue difese, non aspettò il giorno della sentenza, ma si trafugò di soppiatto da Roma nella notte precedente; la qual fuga procacciò a Leone due corti che appartenevano ad Ardicino, e che per punirlo furono da Ottone donate per intero alla chiesa Vercellese (1).

Tutte le prove da me fatte per rintracciare gli atti di questo sinodo, principalmente nella biblioteca vaticana, ed in quella del re in Parigi, erano andate fallite, e già m'era forza rimanermene malcontento a quel poco di cenno che se ne fa nel diploma Ottoniano, quando mi si affacciò impensatamente un estratto di essi, fra i documenti or ora rinvenuti in Ivrea. Quest'è la sentenza pronunciata da quel sinodo stesso contro Ardoino; monumento singolarissimo, ed utile per la storia ecclesiastica di que' tempi, del quale stante la sua brevità ho creduto di qui riferire una fedele letterale versione.

« Penitenza d'Ardoino, imposta a lui in Roma nella chiesa del beato »
 » Pietro Apostolo, e da messere papa Silvestro, dall'augusto impera- »
 » tore Ottone III, e da' pontefici d'Italia catolicamente e sinodicamente »
 » promulgata.

» Sia noto a tutti, siccome Ardoino nella Santa Sinodo ha confessato »
 » alla presenza di messer Silvestro santissimo Papa, e del signor nostro »
 » il terzo Ottone imperatore de' Romani, ed in faccia a tutti i vescovi »
 » quivi residenti, d'aver condotto quegli uomini che ammazzarono Pietro »
 » Vescovo di Vercelli, e d'essere stato presente alla di lui morte: di »
 » aver ricondotto seco e ritenuto quegli stessi uomini, e conversato in »
 » seguito con essi.

» Per la qual cosa si è trovato (*deliberato*) nella Santa Sinodo, d'im- »
 » porre una non modica penitenza a lui *partecipe* di tanto delitto. »
 » Conciossiachè sebbene esso non abbia colle mani *sue* commesso questa »
 » scelleraggine, egli fu tuttavia cagione della di lui morte, perchè con-

(1) « Dedimus Scto Eusebio curtem Sisballauam et Gattinariam in integrum, quae iuste per- »
 » didit Ardicinus filius Ardoini marchionis quia vocatus ad Palatium Papae ut legem fecerunt no- »
 » ctu an fugit » (Dipl. Ott. III an. 1000 kal. nov. Ind. XIV. Append. n. 18).

» dusse gli uccisori: siccome Giuda, il quale parimenti non consegnò
 » il Signore acciò venisse crocifisso, ma perchè gli altri condusse, es-
 » sendo pure stato cagione della di lui morte, è perpetuamente dannato.
 » In ciò nondimeno Giuda fu più mite, perciocchè non conversò poscia
 » cogli uccisori del Signore.

» Ed avvegnachè abbia egli (Ardoino) fatto di ciò pubblica con-
 » fessione, vuole la Santa Sinodo imporre a lui quella medesima peni-
 » tenza, che gli verrebbe assegnata se segretamente avesse confessato
 » d'aver ucciso il Vescovo colle sue proprie mani. Cioè: che quindi
 » poi, deponga le armi: non si cibi di carne: non dia bacio a nessuno,
 » nè uoino nè donna: nè vesta di lino: e se sarà sano, oltre due notti
 » non rimanga nello stesso luogo: nè riceva il Corpo del Signore se
 » non se in fine della sua vita: ed in tal luogo faccia la penitenza, dove
 » veruno non offenda (*non possa offendere*) di quelli, che contr'esso
 » fecero giuramenti.

» Ovvero si faccia monaco immantinenti » (1).

Questa penitenza la quale era fra le maggiori, che secondo le leggi ca-
 noniche s'imponessero a' peccatori, veniva a mettere Ardoino in una con-
 dizione quasi eguale a quella di uno scomunicato: ma siccome vediamo
 che esso dopo di essersi sottomesso alla chiamata del sinodo, continuò
 quindi non solo a trattar l'armi, ma a vivere la stessa vita che gli al-
 tri Grandi; ed inoltre pochi anni dopo ci apparisce coronato re d'Italia;
 così avviseremo che tal penitenza venisse commutata in una certa insi-
 gne donazione fatta a' canonici di Vercelli, popolarmente attribuita ad
 Ardoino (2), ed in qualche multa pecuniaria che il vescovo Leone non
 avrà sdegnato d'accettare, aspettando d'ingoiarne le rimanenti ricchezze.

Difatti sempre più raddoppiando l'avarissimo suo zelo, pose Leone in
 moto le sue più astute macchinazioni, sì che con istanze novelle, con

(1) Doc. n. 13 nell'App.

(2) Se una testimonianza tradizionale giova per avvalorare questa supposizione, addurrò quella di un *adagio* che corre di bocca in bocca fra le persone dotte ne' fasti di quella chiesa; quest'*adagio* appella *felix culpa* il delitto del marchese Ardoino, a sconto del quale, cioè forse a titolo di commutazione di quella terribile canonica penitenza, egli donò a' canonici della chiesa Verce-
 lese le possessioni di Caresana, che tuttora sono da essi tenute, e delle quali una parte già era
 loro stata attribuita nell'anno 987 da Ichilde figliuola d'esso marchese Ardoino, e moglie di Cor-
 rado figlio del re Berengario II. (Doc. n. 1 nell'App.).

maggiori imposture, con più peregrine adulazioni, arti solite e sicure, eccitando l'odio e l'invidia di Ottone contro la potenza di quell'animoso marchese, ottenne contr'esso nuovi diplomi a intendimento di spegnerlo.

Per essi fu Ardoino dichiarato episcopocida, maledetto, e nemico pubblico e (come più d'ogni cosa stava a cuore al vescovo Leone) i beni suoi, anche allodiali, quelli di Ardicino suo figlio, e di tutti coloro che aveano preso parte alla fazione di Vercelli, furono confiscati a pro di esso vescovo (1).

Ma l'effetto di questi rigori non fu nè quale, sotto specie di pietà verso la chiesa di Vercelli, l'aveva desiderato il credulo imperatore, nè quale l'aveva dipinto all'avido Leone la smodata sua voglia di possedere: perciocchè a quel modo, che la furibonda violenza d'Ardoino contro l'infelice vescovo Pietro, non potè fare che il comitato di Vercelli non venisse staccato dalla Marca d'Ivrea, e che questa città non ottenesse l'odiata *esenzione*: così i diplomi strappati contr'esso dall'avidità di Leone, non procacciarono a questo vescovo i beni d'Ardoino, nè impedirono al marchese d'Ivrea di rimanere temuto signore di quella Marca, e che alla morte di Ottone III la sua potenza e le sue ricchezze lo sollevassero al trono d'Italia.

Non è a dire quanto codeste mene, ed i diplomi ottenuti dal monaco Leone, irritassero l'impetuoso Ardoino, e come stabilissero tra di essi una fatalissima gara d'odi, di persecuzioni e d'inestimabili danni. Di questi, come sempre, ma più in que' barbarici tempi, ebbero i popoli a soffrirne la maggior parte. Ma tra un esperto maneggiatore di cabale e d'intrighi, ed un insoffrente e furibondo capitano, la lite doveva al postutto esser vinta dal primo (2). E sì lo fu essa allà perfine, ma non senza lungo combattere, nè senza gloria per parte d'Ardoino. Perciocchè pigliando proporzioni maggiori, ed avvisando a scopo più generoso, quella lite, i cui principii erano per lo più gelosie d'usurpazioni reciproche tra barbarici vassalli, trapassando nel popolo mutavasi poco a poco per le ragioni accennate in altissimo desiderio di nazionale inde-

(1) Vedi Dipl. an. 999 non. maii nell'Appendice al n. 15. — Dipl. an. 1000 kal. nov. Ind. VIII (cioè XIV) anno Iercii Ott. regis XV (cioè XVI) Imperatoris vero V (cioè IV). (*Hist. P. M.* T. I. Doc. CXCVIII: Append. n. 18).

(2) Il già citato BENZONE vescovo d'Alba, parlando di Leone vescovo di Vercelli, dice: « Ardoinus qui se Regem dicebat in gentibus, diademate privavit. » (*Panegiric.* l. c. col. 1021).

pendenza. Ardoino principe di effèrati costumi quanto gli altri de' suoi tempi fu, siccome vedremo, e quasi senza saperlo, causa di cotanta mutazione, ma atterrito in quel primo punto dalle sentenze Ottoniane fu costretto a ristarsi. Riserbandando pertanto a miglior tempo le sue vendette, ritraevasi ne' suoi monti d'Ivrea, dove gli animi de' suoi aderenti e la solidità delle sue fortezze lo facevano sicuro dall'ira di Ottone.

CAPITOLO IV.

DIVISIONE POLITICA DELL'ITALIA VERSO IL PRINCIPIO

DEL SECOLO XI.

I confini del reame d'Italia erano in questi anni i seguenti: da settentrione lo separavano dalla Germania l'Alpi di Trento, e quella regione che da Trento si svolge sino ad Aquileia. A ponente l'Alpi ancora lo confinavano colle Gallie: quindi da Nizza marittima lunghezzo il lido Italico da mezzodì toccava il Ducato Romano, racchiudendo perciò la Marca di Toscana.

Dalla parte d'oriente i confini sono difficili a indicare, perciocchè le mosse de' Greci li andavano variando (1). Certa cosa è che per lungo tempo la Venezia, meno le isole, l'Istria, il ducato di Spoleto, e quello di Benevento appartennero al regno d'Italia (2), e che ancora da esso dipendevano Ravenna, l'Esarcato e la Pentapoli (3).

(1) MURATORI, *Ant. M. Acc.*, Dissert. II. T. I. p. 66.

(2) « Certe sub Italiae regibus per longa tempora perexerunt esse Italici regni, Histria, Ducatus Spoletanus ac Beneventanus. » (MURATORI, *ib.* col. 68, ad ann. 735-931). — « In ambobus Ducatibus nostris, Spoletino atque Firmano, seu infra omnes fines nostri regni Italici ». (Dipl. Ottouis II pro Monrio Cassin. Dat. VIII id. aug. ann. D. I. 981 Ind. IX; ap. GATTOLA *Hist. Muri Cass.* P. I).

(3) « Immo Exarchatus ipse ac Pentapolis quae a Carolo Magno Adriano I tradita revera videtur, post aliqua tempora pendere ab Italico regno deprehenduntur, hisque dumtaxat concessione Rodulphi I Romanorum regis, sub fine saeculi XIII. Ecclesia Romana potiri et frui rursum coepit. » (MURAT. *ibid.* col. 68).

Assai vasto pertanto, siccome apparisce, ne era il territorio, diviso, come ognun sa, da're Franchi in comitati, i cui principi a titolo beneficiario erano detti *conti*, e questi distinti in *conti minori*, cioè di un sol comitato, ed in *conti maggiori*, cioè di più comitati, i quali inoltre avevano il titolo di *marchesi*, ove un qualche limite del regno fosse posto sul loro territorio: o quello di duchi, titolo che avevano o mantenuto od usurpato dopo la caduta de' Longobardi (1).

Si è detto siccome il sistema delle esenzioni aveva divisi di molti comitati in nuovi beneficii o secolari od ecclesiastici. Erano tuttavia rimaste come beneficii di prim'ordine le Marche di Verona e di Toscana, ed anzi erano esse state accresciute di nuovi *onori* sotto gli Ottoni: restaurata ed ampliata quella d'Ivrea, comunque, siccome notammo nel Capitolo precedente, dopo i fatti di Vercelli avesse inutilmente Ottone III fatto prova di privarne il marchese Ardoino. A codesti marchesi forse si potrebbe aggiungere il signore di que' comitati che poi formarono il Piemonte, i cui principi dopo l'istituzione del comitato di Torino, e dopo Ratberto primo conte a noi noto (827), erano venuti crescendo pianamente, avevano avuto il titolo di marchesi, cioè di conti delle Marche verso la Borgogna, e di più aveano anch'essi dopo la dominazione Sassonica aggiunte nuove provincie alle prime.

Già si è veduto, che la Marca di Verona, una delle più importanti del reame, era stata da Ottone I commessa ad Arrigo duca di Baviera suo fratello, accresciuta de' comitati d'Aquileia e di Trento (2). Questo aveva Ottone operato nel 952, allorchè restituendo al re Berengario il regno d'Italia a titolo di fendo, eccettuò questi territorii da tal restituzione per avere sempre libero l'ingresso in Italia. Onde sembra che codesta separazione dovette durare soltanto per quel decennio corso dal

(1) *De' Conti, Duchi e Marchesi dell'Italia Settentrionale* del conte C. BALBO in *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, T. XXXI. p. 252-257.

(2) « *Marcani tamen Veronae et Aquileiae retinuit Otto, ut facilius in Italiam si quando arma expedire necesse esset, pateret aditus, eamque fratris Henrico Bavariae Ducis commendavit.* » (MASCOVII, *Comment. de Rebus Imperii, de Ottone Magno* c. XV. p. 39) — *Contin. REGINONIS in Chron. ad an. 952.* — *MURAT. an. 952.* — Lo storico LEO dice invece: « *Henri Duc de Bavière* » frère d'Otto *obtint Vérone et les territoires qui y étaient annexés, c'est-à-dire la Marche de Vérone ou du Tirol, qui fut pendant quelque temps unie à la Bavière.* » (*Hist. d'Italie* Liv. IV. ch. I. p. 187). — Ivi la nota (1) seconda colonna: « *La Marche de Trente était en grande partie composée du même territoire, qui forma plus tard la Marche de Vérone.* »

932 alla total caduta del re Berengario. Ad ogni modo la Marca di Verona fu tenuta da principi della famiglia stessa di Ottone, ma di nuovo riunita al reame d'Italia: e negli ultimi anni del secolo X era occupata da Ottone duca della Carinzia, padre che fu del pontefice Gregorio V, e nipote egli stesso per Luitgarde sua madre dell'imperatore Ottone I (1).

La Marca di Toscana era tenuta dal conte Ugo figliuolo di un marchese Oberto di legge salica e di Willa nata da Bonifazio marchese di Spoleto (2). Questo marchese Ugo conte di Lucca moriva nel 1001, ed era ad un tempo marchese di Camerino e di Spoleto; una di lui figliuola detta come l'avola Willa, fu sposa di Ardicino figlio del re Ardoino, siccome già si è detto (3). Dopo la morte di Ugo sembra che per qualche tempo la Toscana e Lucca, sede di quel marchesato, non cadessero nelle mani di verun marchese. Si argomenta cotesto dacchè nell'anno 1004 dopo la prima calata di Arrigo, i deputati de' Toscani (non del marchese di Toscana) vennero a profferire a questo re l'omaggio delle città di questa Marca, e mentre egli se ne viaggiava da Pavia per alla Germania (4). E serve pure di maggior argomento lo scorgere, che appunto in questi anni cominciarono Lucca e Pisa a far atti che accennano una qualche indipendenza. Di questi si parlerà più tardi (5). Ad ogni modo credesi che nel 1008 fosse investito della Marca di Toscana o di parte di essa un marchese Bonifacio di legge ripuaria, fratello d'un conte Alberto od Adalberto, e nipote del morto marchese Ugo (6).

I limiti di questa Marca furono descritti dall'anonimo Milanese (7)

(1) MASCOVI *Comment.* Lib. III c. CXXIII. p. 92 et Lib. IV. c. I. p. 108.

(2) Vedi per le citazioni de' documenti, REPETTI, *Dizionario Geogr.-Fis.-Stor. della Toscana* T. II. p. 834 e seg.

(3) « Marchionissa illustris Willa uxor Ardoini, vocati Ardicionis, filia h. m. Ugonis Marchionis. » (Ex Tabul. Canonic. Lucensium G. n.º 155 apud FIORENTINI p. 404). — Ugo marchese di Toscana morì in Roma dopo di aver salvato l'imperatore Ottone III dal furor popolare nella sommossa di quell'anno stesso 1001. La gratitudine di Ottone fu tale che nel ricevere l'annuncio della morte di quello, proruppe in queste parole: « Laqueus contritus est et nos liberati sumus » Così S. PIER DAMIANO (Lib. VII. Epist. 12. Opusc. 57).

(4) « Inde (Henricus rex) tum procedens, Tuscos sibi obviantes in consorcium sibi firmiter servientium suscepit. » (THIETMARI Chron. Lib. VI. §. 7. *Monum. Germ. Hist.* PERTZ T. V. p. 807).

(5) Vedi al Capitolo X di questi Studi.

(6) Vedi per i documenti, REPETTI op. cit. T. II. p. 833-836

(7) *Anon. Med. de Tabula Chorog.* M. Aev. col. CCI. R. I. T. X.

co' tre lati di un triangolo, la cui base partendo dallo sbocco del fiume Cecina, ora Cesina, nel mare Tirreno, andasse alle fonti della Macra presso Pontremoli, ed il vertice posasse a Biturgia, detta da' moderni Citeria sul Tevere, vicino alle sorgenti di questo fiume famoso (1). Ma ell'è cosa sempre difficile, se possibile, il seguire con precisione i limiti d'una Marca qualsivoglia; perciocchè per la data definizione ogni Marca essendo l'aggregato di varii comitati, il suo territorio andava soggetto a molte variazioni, soprattutto ogni volta che un nuovo marchese succedendo al precedente, l'antico territorio si trovava accresciuto di que' comitati de' quali già prima era possessore questo nuovo marchese, o diminuito talvolta di quelli che o per abuso, o per donazione ritenevano gli eredi dell'antico.

Quest'osservazione applicata con molta maestria dal conte Balbo alle antiche Marche dell'Italia settentrionale, nell'operetta citata (2), trova qui una conferma per quelle di Verona e di Toscana; la prima delle quali fu assoggettata a tali vicissitudini nel passare da' duchi di Baviera a quelli di Carinzia: e la seconda dopo la morte del marchese Ugo, nel qual tempo e prima di cadere nelle mani del sopradetto marchese Bonifacio, fu smembrata dal re Arrigo di una qualche sua parte in favore del marchese Tedaldo conte di Modena e di Reggio, del quale il re Arrigo volle con ciò premiare la fede rotta ad Ardoino (3).

La stessa cosa debbe dirsi rispetto alla Marca d'Ivrea. Della quale e per l'importanza e per l'estensione sua propria, e perchè tenuta negli ultimi anni del secolo X dal marchese Ardoino, io vorrei poter qui radunare notizie minute, poichè da esse qualche maggior lume ne potrebbe sorgere per chiarire i susseguenti di lui fatti. Ma alle difficoltà per i limiti s'aggiunge la povertà de' documenti. Di que' pochi che rimangono fece erudito studio Iacopo Durandi, il quale pigliando le mosse da quanto scrisse sopra di ciò l'autore della Corografia d'Italia (4), e reiette con esso le favole spacciate sopra la fondazione di questa Marca, radunò con di molto lavoro alcune notizie che toccano della fondazione

(1) Biturgia sta tra Arezzo e Borgo S. Sepolcro (*Anon. Med.* l. c. col. CCVI).

(2) BALBO, Op. cit. P. I. § 4 e 5 e P. II. passim.

(3) Vedi il Capitolo VIII di questi Studi.

(4) *Anon. Mediol.* de Tabula Chorogr. M. Aev. Dissert. n.º 45 R. I. T. X. col. LXXIX.

e dell'estensione sua, e danno ancora ragguaglio di varii fra' comitati, che la componevano.

Appoggiandosi soprattutto a tre preziosi diplomi imperiali, ne' quali sono nominati molti fautori di Ardoino, sia nel tempo della fazione Vercellese, che dopo la sua coronazione a re d'Italia (1), dalla posizione delle città o terre da essi o in proprietà o in beneficio tenute, dedusse il Durandi l'esistenza di varii comitati della Marca d'Ivrea. I confini poi ch'egli ne assegna sono le Alpi ed i fiumi Ticino, Amalone e Po. « Il suo lato meridionale, dic'egli, comprende il paese che giace immediatamente a levante del contado proprio d'Ivrea, cioè a dire la parte meridionale della contea di Vercelli, e tutta quella di Lomello in sino al Ticino. Il lato settentrionale è segnato dalle Alpi Graie e Pennine » (2). Del confine suo con quella di Torino, si parlerà qui appresso.

I principali comitati soggetti al marchese d'Ivrea erano quelli di Aosta, d'Ossola, di Staziona, di Novara, di Vercelli, di Sant'Agata e di Lomello, e il ducato di S. Giulio. A questi si potrebbero aggiungere varii altri comitati minori, de' quali si può trovar notizie nell'opera citata del medesimo autore.

I comitati di Vercelli e di Sant'Agata erano stati specialmente esentati da Ottone III a favore di Leone vescovo di Vercelli, come già notammo: nondimeno io li ho compresi nella Marca d'Ardoino, sia perchè prima ne facevano parte, sia perchè il possesso ne fu a vicenda ripreso e perduto da esso.

Nella stessa maniera ho seguito il Durandi nello annoverare quello d'Aosta fra i comitati di quella Marca, sebbene il Terraneo provi (3) che nell'anno 994 la città d'Aosta appartenesse al reame della Borgogna Trasiurana. Ed eccone la ragione.

Sempre Aosta fu tenuta per città italiana: come tale l'occuparono i Longobardi, i quali nel decennio che seguì la morte del re Clefi (573-

(1) Vedi dipl. di Ottone III per la chiesa di Vercelli negli an. 999-1001 più volte citati, e i diplomi di Arrigo I imperatore contro i fautori d'Ardoino del 1014.

(2) DURANDI, Marca d'Ivrea P. I. p. 73 e P. II. p. 1.

(3) Nell'anno 994 fu celebrato in Aosta un Concilio (Conciliar. T. II. p. 1003) al quale sottoscrisse co' vescovi di Tarantasia e di Moriana ed altri della Borgogna, anche *Anselmus Pontifex Augustae*, cogli anni di Rodolfo III re della Borgogna Trasiurana. (Vedi il TERRANEO nella *Dissertazione sopra Aosta*, §. 1. ms. della biblioteca di S. M.).

584) furono costretti di cederla con quella di Susa, a' Borgognoni, per compenso delle scorrerie fatte da' loro duchi su quello de' Franchi (1). Distrutta la dominazione Longobarda, Carlo Magno la restituì all'Italia, ergendola colla sua valle in comitato, che riunì al reame d'Italia; ed in quel modo che sotto i Longobardi, sebbene posseduta da' Borgognoni, Aosta col suo territorio era considerata come parte del ducato d'Ivrea, così allorchè assai più tardi fu ordinata la Marca d'Ivrea, il comitato d'Aosta era pure tenuto come parte di quella Marca (2).

Non seguirò tutte le vicissitudini alle quali andò soggetto il comitato d'Aosta: a me basta lo stabilire, che per la positura sua geografica, e per l'importanza sua sopra la frontiera d'Italia, tanto che durò la Marca d'Ivrea dovette Aosta farne parte: che anzi senza il possesso di questa città, che tiene il passo de' monti sia pel monte di Giove o Pennino (ora il Gran S. Bernardo), che per le Alpi Graie (dette il minor S. Bernardo (3)), la Marca d'Ivrea perdeva gran parte della propria importanza. Della qual cosa ben erano persuasi i signori di quella, posciachè vediamo che Berengario marchese d'Ivrea prepose Adalberto suo figlio al comitato d'Aosta (4). Nulladimeno ella è cosa certa che più volte Aosta cadde nelle mani de' Borgognoni, ed è perciò ragionevole assunto il credere, chechè ne dica in contrario il Durandi (5), che nelle guerre che il detto Berengario ed Adalberto suo figlio, fatti re d'Italia, ebbero a sostenere contro Ottone I re di Germania, fosse Aosta stata invasa e ripresa da' Borgognoni, e che perciò nel 994, siccome dimostra il Terraneo, essa fosse posseduta da Rodolfo III re della Borgogna Trasirana; ma non sarebbe nemmeno supposizione impossibile il credere che Ottone nel riordinare la Marca d'Ivrea a favore di Ardoino, e prima che questi fosse creato Conte del sacro palazzo, volendo, per le ragioni già dette, render potente questo suo vassallo, riavesse o per trattato o altrimenti dal re Rodolfo il comitato d'Aosta, e di nuovo lo riunisse alla Marca suddetta.

(1) *Anon. Mediol.* n.º 60, col. CXII. ap. MURATORIUM R. I. T. X.

(2) « Quia licet Longobardo tempore diutissime Burgundionum iuris ea (Augusta) fuerit, nil obstat quin Alboinus vel Clepho Ducatui huic E. (Eporediensi) urbem utramque (nempe Eporediam et Augustam) attribuerint. » (*Anon. Mediol.* ibid.).

(3) « Augusta Praetoria iuxta geminas Alpium fores, Graias atque Penninas. » (PLINIUS lib. 3. c. 17).

(4) *Gallia Christ.* T. XII. col. 485. — BESSON *Hist. des Diocèses de Savoie*, Preuves n.º CX.

(5) *Marca d'Ivrea* P. II. p. 4.

Anche il dotto Leo (1) comprende il comitato d'Aosta nella Marca d'Ivrea posseduta da Ardoino, ma la di lui testimonianza in questo non ha guari peso, giacchè preoccupato di troppo della parentela di questo marchese colla famiglia de' conti di Torino, e forse ingannato da un falso diploma del re Ardoino dell'anno 1002 per la chiesa di S. Ambrogio di Milano (2), fece una cosa sola delle due Marche di Torino e d'Ivrea, in quel tempo ben distinte, e comprese Susa con Aosta nel dominio d'Ardoino, mentre la prima di queste due città sino dalla metà di questo secolo decimo già obbediva a' conti di Torino (3).

Ancora sembra ch'egli connetta i legami di parentela tra Ardoino e i conti di Torino, appoggiato ad altro documento pure giudicato dubbioso, se non apocrifo, dal Muratori (4). Al postutto se questi legami giovarono ad Ardoino, nel tempo che più arse la di lui contesa per la possessione del reame d'Italia con Arrigo II re di Germania, egli si fu in modo siffattamente cauto, dissimulato e prudente per la parte di questo marchese Manfredi, che varii scrittori avvisarono che esso fosse assolutamente nemico d'Ardoino, e ligio alle pretese de' re Tedeschi. Ma parmi debba venire assoluto da quest'ultima supposizione: posciachè Manfredi entrò a parte della lega che s'ordì dopo la morte dello stesso Arrigo divenuto imperatore, contro Corrado il Salico. In uno de' seguenti Capitoli noi torneremo sovra questo argomento.

Del rimanente la materiale separazione delle due Marche di Torino e d'Ivrea, delle quali, siccome osservai, il dottor Leo forma una cosa

(1) « Il était (Ardoino) plus puissant que les anciens Margraves d'Ivréa , parceque Otto tout en divisant les bénéfices après la soumission de Bérengar , avait néanmoins laissé le Margraviai au comte , ou comme on l'appelait alors , à cause du voisinage des frontières de Bourgogne au Margrave (comte des Marches) de Suso (cioè al conte di Torino). Ardoin était de cette famille et possédait par conséquent Ivrea , Aoste , Sase et toute la campagne environnante , là où l'Italie se perd dans les montagnes de la Savoie . » (LEO , *Hist. d'Italie* Liv. IV. p. 202) — Il titolo di marchese di Susa fu un trovato degli scrittori del secolo XVII , i quali non avevano un'idea molto chiara de' gradi di marchese o di conte : in seguito esso fu adoperato da valenti scrittori : dallo stesso MURATORI e dal BERRETTI . Ma in realtà Susa non fu mai nè il centro di un marchesato , nè quello nemmeno di un comitato . (TERRANEO , *Adelaide* III. P. I. p. 129).

(2) Vedi sopra questo diploma la nota (2) alla pag. 79 nel Proemio di questi Studi.

(3) Chron. Noval. lib. V. c. XX. XXI. et XXII novae edit. in *H. P. M. T. V.*

(4) « Donatio Ardoini Italiae regis Eccl. S. Syri Papiensis. Dat. an. MXI. 3 kal. apr. Ind. IX. » Questo documento pubblicato dal GUICHENON in *Bibliot. Sebusiana* cent. 2. p. 248 , fu giudicato dubbio dal MURATORI (*Annal. ad aa. 1011*), dal TERRANEO in (*Tabul. Celto-Ligust. ad an.*), e falso dal DURANDI (*Marca d'Ivrea* p. 58), epperchè non fu pubblicato da me nell'Appendice.

sola, è molto bene distinta dal Durandi con una linea che partiva dalle Alpi, tra Balangero e Corio, e tramezzando una vasta selva, che lasciò alla regione il nome di *Walda* (1), terminava al Po tra i villaggi di Decimo e di Brandizzo (2).

Sopra il tempo della fondazione della Marca d'Ivrea si scrissero di molte favole. Tralascio di confutarle, rimandando i lettori alla Dissertazione dell'Anonimo Milanese che ne dimostrò l'insussistenza (3), e dirò col Durandi, che non v'ha indizio di questa Marca negli antichi scrittori prima della morte di Carlo il Grosso, ultimo de' re Carolingi. Primo lo storico Liutprando fa parola di Anseario, al quale nell'anno 896 dona il titolo di marchese, mentre negli Annali Lambecciani nel 894, ancora tiene il semplice titolo di conte d'Ivrea (4): bastante prova per credere ch'esso sia stato il primo marchese d'Ivrea, in un tempo in cui una Marca da quelle parti diveniva necessaria per essere stata l'Italia disgiunta dal reame de' Franchi (5). Egli era fratello di Guido duca di Spoleto, l'emulo di Berengario I (6).

Secondo l'abuso già notato nella successione de' beneficiati, ad Anseario marchese d'Ivrea era succeduto Adalberto suo figlio, marito della famosa Ermengarda figlia di Adalberto II marchese di Toscana: ed a questo, Berengario di lui figliuolo, che poi fu re d'Italia (7), secondo di questo nome.

Dopo la coronazione di Berengario resta interrotta la serie de' marchesi d'Ivrea, nè veruno degli antichi storici altro ne ricorda prima di Ardoino, il quale, siccome abbiamo detto, nell'anno 987 già stava al possesso di quella Marca (8), quantunque non vi avesse, per quanto risulta, verun diritto ereditario.

(1) E nel dialetto: *Vauda*, dal Tedesco *Wald* bosco, selva.

(2) DURANDI, *Piemonte Traspadano* P. I., *Marca di Torino* p. 138, e *Marca d'Ivrea* P. I. p. 10-13.

(3) *Anon. Mediol.* Do tabula Chorogr. M. Aev. n.º 45. col. LXXIX. l. c.

(4) « Cumque (Arnulfus Germ. rex) Eporegiam pervenisset, Ansearius Marchio istic aderat, cuius et hortatu civitas rebellabat. » (LIUTPRANDI *Antapod.* Lib. V. § 35; ap. PERTZ *M. G. H.* T. V. p. 284. Cfr. *Ann. Lambecc.* ad an. 894. R. I. T. II. P. II. col. 120).

(5) TERRANEO, *Dissert. sopra le vicende d'Aosta* § I. ms. cit. — Questo scrittore dice che Anseario era già marchese d'Ivrea nell'anno 894. (*Adel. Ill.* P. II. p. 268).

(6) « Prior arma rapit iam Gallicus heros (cioè Guido duca di Spoleto)

» Aerios ducibus montes superantibus auctus,

» Ansclerio cum fratre simul. » (*Panegyricus Berengarii Aug.* Lib. II, vers. 13. ap. PERTZ *M. G. H.* T. VI). Cfr. LIUTPR., *Antapod.* L. I. c. 17; apud PERTZ *M. G. H.* T. V.

(7) MURATORI, *ann.* 899. 917. 918. — DURANDI, *Marca d'Ivrea* P. I. p. 48.

(8) Vedi Capit. III. pag. 120.

Con tutto ciò, sebbene la Marca d'Ivrea fosse a' tempi d'Ardoino separata dalla Marca di Torino, non è a dire che sempre la cosa fosse stata a quel modo: la legge generale delle Marche ne aveva nell'una e nell'altra aggiunti o separati alcuni comitati, e le rivoluzioni succedute in Italia a' tempi e dopo la morte di Berengario I, e quindi dopo la vittoria di Ottone I, vi dovettero al certo contribuire. Così, per esempio, da un documento dell'anno 929 abbiamo che Adalberto marchese d'Ivrea e padre del marchese e re Berengario II, fa una donazione al monastero di Sant'Andrea di Torino, nel quale egli stesso avea dato ricovero a' monaci della Novalesa cacciati da' Saracini. La qual cosa indica la signoria di lui in quella città, confermata maggiormente dalla soscrizione del notaio (1).

Era dunque il marchese d'Ivrea Adalberto, conte di Torino, e probabilmente di molti degli altri comitati, che poi ne formarono la Marca. Conte parimenti di Torino pensa, nè senza qualche fondamento, il conte Balbo, fosse Berengario marchese d'Ivrea, figlio del precedente. Ma le vicissitudini sue fecero quindi mutare le sorti de' comitati Torinesi, ed anzi, come osserva molto bene il medesimo scrittore (2), nell'anno 930 già comparisce un nuovo marchese d'origine salica, per nome *Ardoino Glabrione*, il quale sembra già fosse in quegli anni conte di Torino (3), e sia stato il primo conte di questa città, che dopo Adalberto suddetto abbia avuto il titolo di marchese. Adunque verso quel tempo noi avviseremo fosse fondata la Marca di Torino (4), della quale quindi sempre rimasero, anzi crebbero possessori, i discendenti di quel marchese Ardoino Glabrione. Noi non andremo seguendo gli andamenti

(1) « Adalberto marchese dona al monastero di S. Andrea di Torino, Gonzolo e S. Dalmazzo » *Dat. prid. kal. mart. Ind. 2. Hugo gratia Dei rex anno regni eius Deo propicio hic in Italia tercio (929).* » (in *Hist. P. Monum. T. I. Chartar. col. 131*). Ivi la soscrizione del notaio è in questi termini: « Ego qui supra Iohannes notarius Domini regis pro data licentia nostro Adalberto comite ».

(2) *De' Conti, Duchi e Marchesi dell'Italia Settentrionale*, del conte Cesare BALBO l. c. p. 277-280.

(3) *Chron. Noval. l. cil.*

(4) Il TERRANEO che meritamente è tenuto pel riformatore della scienza critica nella sconvolta storia del Piemonte, non seppe qui resistere all'ambizioncella di far più antica di una qualche metà di secolo, ch'è ben sapeva non essere, la Marca di Torino, la cui fondazione attribuisce a uno de' tre imperatori Guido, Lamberto o Berengario I, e così sul finire del secolo IX, o sul principio del X (*Adelaide III. P. II. p. 269*), mentre egli ben sapeva quanto noi dal cronista della Novalesa, che quel marchese Adalberto, il quale fece certa donazione a' monaci di quel cenobio, era conte di Torino o padre del re Berengario II, (vedi *Chron. Noval. l. c. Lib. V. cap. XXI*), cioè Adalberto marchese d'Ivrea figliuolo del marchese Anscario.

della potenza di questi nuovi conti, de' quali minuto ragguaglio ci porge l'opera più volte citata del Terraneo, ma noteremo di volo siccome ad **Ardoïno** Glabrone succedette nella Marca di Torino **Manfredi I** suo figlio nell'anno 973, ed a questo nel 1001 **Manfredi II** od **Olderico Manfredi**, cugino di **Ardoïno** marchese d'Ivrea.

I comitati che componevano la Marca di **Manfredi II** estendevansi da Torino, sede del marchese, verso ponente alle falde del Moncenisio e del Monginevra (1): verso tramontana confinavano colla Marca d'Ivrea: da levante al mezzogiorno confinavano più o meno co' comitati che formarono la Marca Aleramica, racchiudendo quello d'Asti, per le cose della milizia dipendente dal marchese **Manfredi** (2).

Resta che alcuna cosa da noi si accenni sovra la Marca di Genova e sovra la Marca Aleramica, quella che poi fu detta impropriamente del Monferrato; di questa e del suo primo possessore **Aleramo**, molte favole furono spacciate, bastantemente state confutate e chiarite. Una dotta e recente Memoria del cavaliere **Gazzera**, socio e segretario perpetuo della Reale Accademia delle Scienze di Torino, dilucidò la successione de' marchesi Aleramici sino alla divisione degli stati del marchese **Bonifacio** fra i sette suoi figli detti marchesi del Wasto o delle Langhe. Quanto a' comitati che componevano sul principio del mille la Marca Aleramica, egli attenendosi al cronista **Benvenuto S. Giorgio** assegna loro il territorio compreso tra' fiumi Orba e Tanaro, ed il lido del mare Tirreno, cioè quella parte della Liguria, che conosciamo sotto il nome di Riviera di Ponente. Di questa Marca egli scrive essere stato marchese in quel tempo *Anselmo I*, figliuolo del famoso *Aleramo* (3).

La Marca di Genova detta pure Marca della Liguria (come più tardi fu pure appellata quella tenuta dal marchese **Bonifacio**, nipote in quarto grado del marchese **Aleramo**) era sull'aprirsi del secolo XI governata da **Oberto II**, uno de' progenitori della casa d'Este, conte a un tempo di Milano: e siccome dalle carte addotte dal **Muratori**, e dallo **Scheidt**, abbiamo che l'autorità di **Oberto II** estendevasi sin verso **Sarzana** (4),

(1) *Adel. ill.* P. II. p. 265.

(2) *Ibid.* P. II. p. 271. — **MULETTI**, *Storia di Saluzzo* T. I. p. 197.

(3) *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino* T. XXXVII p. 47. 62 et passim.

(4) **MURATORI**, *Ant. Est.* P. I. cap. XV. — **SCHIEDT**, *Origines Guelphicarum*, Lib. II. cap. VII. VIII et IX.

così potremo concludere che la Marca di Genova comprendesse quella parte del lido italico, che ora appelliamo Riviera di Levante.

Del rimanente quanto all'appellazione di Monferrato data alla Marca di Aleramo, tenuta, come si è detto, dal di lui figlio Anselmo I, quest'appellazione, ripeto, nacque da un tratto non esteso di piccole colline poste a poca distanza da Torino, tra levante e mezzogiorno, nel luogo dove poi sorse l'eremo de' Camaldolesi, il qual piccol tratto di territorio essendo posseduto dal marchese Aleramo, diede il nome suo di Monte-ferrato o Mon-ferrato a quell'aggregato di comitati tra l'Orba, il Tanaro ed il lido del mare che componeva la di lui Marca (1).

E questi pochi cenni bastino per la corografia della superiore Italia. Più tardi nel proseguire di questi Studi noteremo le variazioni che ebbero a provare i territori delle Marche da noi mentovate sul finire del secolo XI, per le guerre che si rupero tra di loro nelle terre subalpine i pretendenti l'eredità della famosa Adelaide contessa di Torino, figliuola del marchese Manfredi II, fra' quali ebbe la parte maggiore il marchese Bonifacio da noi sovrannominato.

Molte città della penisola italiana, alcune delle quali comprese nel territorio del regno d'Italia, fiorivano in questi tempi, e già toccavano od accennavano alla grandezza loro, come città trafficanti e come Repubbliche.

Fra queste Venezia fuori del regno, già godeva una quasi piena indipendenza sotto il governo de' suoi Dogi, i quali se andavano destreggiandosi per non inimicarsi gl'imperatori d'Oriente, che serbavano sopra la Repubblica un nominale alto dominio, e ne' cui mari spesso capitavano le navi veneziane, non meno avevano a petto di rifarsi benevolo quello d'Occidente. E sì Pietro Orseolo, doge in questi anni (2), dopo di avere nella città sedate le civili discordie, vinti gli Slavi e i Croati, conquistato alla Repubblica Istria e Dalmazia, sanciti patti di commercio co' Musulmani dell'Asia e dell'Africa, e colle città marittime dell'Italia, seppe non solo rannodare con Ottone III gli antichi accordi, guasti a' tempi di Ottone II, ma rendere a quell'imperatore cara e necessaria

(1) NUNZI, *Marca di Torino* cap. XIII. p. 113 e seg.

(2) Pietro Orseolo II fu eletto Doge di Venezia nel 991 in età di soli 30 anni. (*Chron. Sugornum ex recens.* P. ZANETTI p. 84).

l'amicizia sua, e questa volgere allo splendore, alla indipendenza della sua patria (1).

Fra le città comprese nel regno, oltre Milano, Pavia, Como e Verona ed altre della superior Lombardia, erano le più fiorenti Luni, Lucca, Pisa, Firenze, Siena e Genova. Di queste alcune, come Luni e Firenze, già illustri fin da' tempi Romani: Lucca, per l'origine greca, e perchè sede de' duchi Longobardi, e quindi dopo i re Carolingi, de' marchesi della Toscana (2). Ma più di queste erano cresciute Genova e Pisa, per le continue aggressioni de' Saracini. L'obbligo di tenere guardate le loro marine dalle discese che vi facevano que' barbari annidati nella Sicilia, e nelle più vicine isole di Sardegna e di Corsica, i frequenti scontri che con essi seguivano resero l'uno e l'altro popolo sperto nelle cose di mare: perciocchè, siccome osserva un moderno scrittore, Genova e Pisa procedendo con ordine inverso passarono dalla marineria di guerra a quella del traffico (3). Sul cadere del secolo X erano in entrambe possenti. Noi vedremo ne' primi anni del seguente, i Pisani portar le armi in Sardegna contro i Mori, e dar principio ad una guerra che durò lungamente contro que' barbari, contro Lucca e contro Genova, prima alleata poi rivale di Pisa per gara di signoria.

E questi fatti, indizi di maggiore indipendenza, operavano queste città comunque soggette al re d'Italia: Genova retta dal conte della Liguria: le altre comprese nella Toscana Regale (4).

Ma prima che Genova e Pisa fossero in grado di contendere tra di loro per la signoria del mare italico, Amalfi già godeva il duplice beneficio della libertà interna ed esterna.

Nata, come ognun sa, d'umili principii, e suddita per assai tempo degl'imperatori d'Oriente, da' cui *Maestri de' militi* in Napoli riceveva i suoi magistrati, andò Amalfi crescendo di forze sì che verso la metà del IX secolo affrancatasi quasi da ogni sudditanza, si elevò al vivere

(1) « Iste nempe Patriae commoda non modo in priscum consolidandum reduxit statum, verum » in tantum republ. auxit, ut suis temporibus Venetia prae omnibus finitimarum provinciis decore et opulentia sublimata diceretur. » (*Chron. Sagor. ibid.*). — Vedi FILIASI, *Memorie storiche de' Veneti primi e secondi* T. VI. cap. 18. p. 218.

(2) *Anon. Mediol.* l. c. col. LXXIII, CCI et seq.

(3) SALLI, *Della colonia de' Genovesi in Galata* T. I. Lib. I. p. 8.

(4) *Anon. Mediol.* l. c. col. CXCVI et CI.

a comune (1). Rapidamente quindi col traffico aumentando le sue ricchezze, sul principio del secolo XI era già giunta al maggior colmo della sua grandezza. Le navi amalfitane coprivano il mare Tirreno, intente le une a cantelar le costiere della piccola Repubblica dalla prepotenza de' vicini e dalla discesa de' barbari, mentre le altre erano volte a portare gli avventurosi suoi cittadini a trafficar colla Grecia, coll'Arabia, coll'Egitto e coll'India (2).

I principati Longobardi dell'inferiore Italia stavano in un perenne fluttuamento per l'alta signoria, ch'ora negli imperatori d'Oriente, ora in quelli d'Occidente riconoscevano. Conciossiachè la sconfitta, che nell'anno 983 toccava Ottone II nelle Calabrie da' Greci confederati co' Saracini, aveva rinvigorito alquanto le cose dell'impero d'Oriente. L'esercito di Ottone vi era stato distrutto, spento o fatto prigioniero il fiore de' suoi Grandi, ed egli stesso scampato a stento dall'onta della prigionia (3).

La rabbia e la vergogna uccidevano Ottone l'anno che seguì quella battaglia, e mentre allestiva un nuovo esercito, col quale disegnava portar la guerra a' Saracini in Sicilia (4). Così rimaneva libero il campo a' Greci di mover contro le antiche possessioni dell'impero in quella parte dell'Italia inferiore da essi chiamata Longobardia, ed a' barbari di desolarle (5).

Tuttavia le Repubbliche di Napoli e di Gaeta, sebbene esposte a' guasti degli Agareni, rimasero nello stato loro, continuando a reggersi a comune sotto i duchi nominati dal popolo e confermati da' greci imperatori. Capua, Benevento e Salerno erano tenute da Pandolfo Capo di Ferro (6).

Seguiva la minorità di Ottone III, il quale nell'età di quattro anni era stato riconosciuto a re di Germania e d'Italia dalla Dieta generale adunata dal padre in Verona poco prima di passare di vita (6). Questa

(1) GIANNONE, *Storia di Napoli* Lib. VII. cap. III.

(2) GUILLEMI, *Appul.* Lib. I — Cfr. BRENMANNI, *De Republ. Amalph.* Diss. I. § VIII. in *THES. Antiq. et Historiar. Italiae, Campaniae etc.* GRAEVII et BURMANNI T. IX. P. IV. — GIANNONE, *Storia di Napoli* l. c. — DIMÉO, *Apparato cronol.*

(3) THIETMARI, *Chron.* Lib. 3. § 12; ap. PERTZ *M. G. H. T. V.* p. 765. — MURAT. *Ann.* 982

(4) EPIDANNI, *Annales* an. 983. — ARNULPHI *Mediol. Hist.* Lib. I. c. IX. [R. I. T. IV. p. 11 — LEONIS *Ost. Chron. Cassin. Monrui*, Lib. II. c. IX. R. I. T. eod. p. 347.

(5) LUPI, *Protospatae chron.* R. I. T. V. p. 41.

(6) DIMÉO, *Apparato cronol. agli annali di Napoli* p. 296.

(7) THIETMARI, *Chron.* l. c. p. 767. § 14.

minorità e le turbolenze che sorsero nella Germania per la tutela del re bambino, confortarono le mire de' Greci. E sì dopo quel tempo erano essi iti riacquistando quasi tutta la Calabria e la Puglia, cominciando da Ascoli e lunghezzo il lido Adriatico, alla riserva di Siponto e del monte Gargano uniti al principato di Benevento (1).

Affrancatosi dipoi il giovine Ottone nell'anno 995 dalla tutela, mandava a Costantinopoli una legazione per chiedere in isposa la figliuola di Costantino VIII, il quale col fratello Basilio II stava sul trono d'Oriente: sia che a ciò fosse mosso Ottone dall'esempio del proprio padre, il quale aveva sposato Teofania nata da Romano II detto il giovane, o che l'allettasse la speranza di ricevere in dote le provincie italiane tenute da' Greci, o per lo meno il pensiero di arrestarne le intraprese conquiste. Ma fallirono al suo desiderio le pratiche (2).

Perciocchè alle riferite cagioni di ridente fortuna, che per avventura rendevano più duri al trattato i greci imperatori, s'andavano aggiungendo le nuove speranze destate dalle novità che agitavansi in Roma.

Nel seguente Capitolo e nel compiere col ducato romano questa rapida rassegna de' principali stati in che divisa era l'Italia sul cadere del decimo secolo, toccherò pure brevemente delle cose che agitavano Roma in quel punto: lavoro, che io non avviserò sia lontano dal soggetto di questi Studi, ne' quali ho proposto di far passare sott'occhi parallelamente a quelli d'Ardoino, i principali fatti della storia d'Italia a' suoi tempi, e che oltre al vantaggio di renderci, dirò così, più familiari gli uomini di quell'età, condurrà la nostra narrazione sino alla morte di Ottone III, epperciò all'anno primo del regno d'Ardoino.

(1) MURATORI, *Annal.* 4008. — LUPI, *Protosp.* l. c. an. 983. — MASCOVII *Comment. de Ottone II.* p. 75.

(2) « Iohannes Placentinus et Bernwardus Wirciburgensis Episcopi, Constantinopolim ex latere » regis, ut sponsam illi inde peterent, directi sunt. » (*Annal. Hildesheim* ap. PERTZ *M. G. H.* T. V. ad an. 995). « Quae tamen legatio incertum qua de causa, optato effectu caruit. » (MASCOVII *Comment. de Ottone III.* p. 91).

CAPITOLO V.

CONTINUAZIONE E FINE DELLO STESSO ARGOMENTO.

DUCATO ROMANO.

DIGRESSIONE SOVRA LE COSE DI ROMA.

Il ducato romano, dopo i Carolingi, era formato, secondo la corografia dell'Anonimo Milanese, di una parte della Campania, d'altre due della Sabina e dell'Umbria, e d'una porzione della Toscana, alla quale fu perciò dato il nome di *Tuscia-Romana*, come ad un'altra quello di *Tuscia-Longobardica* perchè posseduta da duchi Longobardi (1), e come alla rimanente, quello di *Tuscia-regalis* perchè compresa nel reame d'Italia (2).

I limiti della Toscana Romana colla Longobarda facevano capo ad Orta sul Tevere, là dove questo fiume riceve le acque del Nari, oggi la Nera, e giù scendendo verso mezzogiorno toccavano il mare Tirreno allo sbocco del fiume Marta (3).

Segnava il Tevere i limiti della Toscana Romana e della Campania: cosicchè la parte occidentale della città di Roma, quella che poi fu detta città Leonina, posta sulla destra sponda di quel fiume, apparteneva alla prima, e la parte orientale, alla seconda di quelle provincie (4). Varcato il Tevere comprendevasi nel ducato quel pezzo del vecchio Lazio, ossia della Campania, che si protende verso Capua. Limite orientale suo era l'antico Liri poi Garigliano, famoso fiume nel medio evo pe' Saracini ivi lungo tempo stanziati (5). Da settentrione l'Aniene o Teverone separava la Campania del ducato, da quella porzione della Sabina, che pure gli apparteneva (6).

(1) *Anon. Mediol. Dissert. Chorogr. R. I. T. X. col. CCVI.*

(2) *Ibid. col. CXCVI. CCXVI. CCXXIV.*

(3) *Ibid. col. CCXXVIII.*

(4) *Ibid. col. CCXXIV.*

(5) *Ibid. col. CCXXV.*

(6) *Ibid. col. CCXXVI.*

I confini della Sabina spettante al ducato romano erano, a mezzogiorno l'Aniene, a ponente il Tevere, da borea il Nera: dove perciò Narni sulla sinistra sponda di questo fiume apparteneva a Roma, e Terni a quel di Spoleto (1). Verso levante la Sabina Romana si estendeva poche miglia. Così Farfa col suo monastero, distante dal Tevere soli sei mila passi, già spettava allo Spoletano (2).

L'ultima parte del ducato romano stava nell'Umbria, oltre la destra sponda del Nera: ma poco distante ne era il confine, il quale non oltrepassava guari Todi od Ameria, e partiva il territorio del ducato da quello di Spoleto verso settentrione (3).

Riepilogando ora codesti dati potremo accennare, se non descrivere con precisione, la periferia del ducato romano in questi termini: da Orta al mare, dove il Marta fa foce, quindi lungo la marina verso levante per Ostia, Lavinio, Ardea, Nettuno, ed Astura: qui trovava le terre greche, perciò da Astura per le paludi Pontine volgevasi tra levante e settentrione verso Terracina e Gaeta, delle quali città la prima era sul limite, aggregata al ducato, la seconda promessa a' papi da' Franchi, ma non unita in quel tempo allo stato romano (4). Dopo Terracina, piegando di nuovo più a levante, i limiti comprendevano Arce, Arpino ed Horrea di là del Melfi, ramo del Garigliano, il cui corso chiudeva questa parte orientale del ducato (5).

Quivi presso stanno le sorgenti dell'Aniene: e siccome Tivoli sulla sinistra di questo fiume, e Narni sopra il Nera appartenevano al ducato, mentre Farfa e Terni spettavano allo Spoletano, così segneremo il nostro limite dall'oriente al settentrione con una linea, che partendo dall'Aniene presso Tivoli, corra al Nera vicino a Terni, e separi queste città nel modo assegnato (6). Dallo stesso punto dove ci fermammo col

(1) Ibid. col. CCXXIX. — A' tempi di Albérico II patrizio de' Romani, Farfa e la Sabina erano sotto la giurisdizione di Roma. MURAT. *Annali* 949.

(2) Ibid. col. CCXXIX.

(3) Ibid. col. CCXXX.

(4) Ibid. col. CCXXV. — Gaeta in questi anni non apparteneva al ducato romano: essa si reggeva a popolo, ed erano consoli o dogi Giovanni III e suo figlio Giovanni IV insieme, e quindi il solo secondo negli anni 994-1009. (DIMEO, *Appar. Cronol. agli ann. di Napoli*, p. 226).

(5) *Anon. Mediol.* col. CCXXV. CCXXVI. — Il P. BERETTI ivi, dice che sul finire dell'ottavo secolo Gaeta e Terracina «*parebant Patricio Siciliae*».

(6) Ibid. col. CCXXIX. CCXXX.

limite sopra il Nera presso Terni, spingeremo la nostra linea del confine al Tevere sopra Todi nell'Umbria, comprendendo nel ducato, oltre Todi, anche Ameria, e quindi venendo giù pel Tevere chiuderemo la periferia del ducato ad Orta donde siamo partiti (1).

Tali erano più o meno i limiti, che dopo la dominazione de' Franchi aveva preso l'antico ducato romano istituito da Longino Esarca de' Greci verso la metà del VI secolo, dopochè le invasioni barbariche avendo squassata ed oppressa la città già dominatrice del mondo, un nuovo ordinamento era divenuto necessario per quella parte d'Italia rimasta sotto il dominio degl'imperatori d'Oriente (2).

Non è mio pensiero, nè s'addice alla specialità di questi Studi ristretti al corso di pochi anni, il riandare per minuto le vicissitudini sofferte da Roma da che la sede dell'impero era stata trasferita a Costantinopoli. Certo chi ne facesse lo studio, nobile argomento e s'avrebbe a trattare, non disutile per la storia del risorgimento italiano, al quale Roma del medio evo diede forse la spinta maggiore.

Tuttavia nel render conto, giusta il sistema propostomi, delle condizioni di Roma negli ultimi anni del regno di Ottone III, mi sarà concesso venire con una rapida digressione considerando da quali antiche cause traessero origine le turbolenze che agitavano la città in quel tempo, per dedurne quindi come tali movimenti si collegassero con quelli che ebbero luogo nella Lombardia, e che portarono al trono d'Italia il marchese d'Ivrea.

SUNTO DE' FATTI DI ROMA DALLA FINE DEL SECOLO SESTO

ALLA MORTE DI OTTONE III IMPERATORE.

Finchè Roma stette sotto la dominazione degl'imperatori d'Oriente, il Capo della Chiesa Romana, la quale possedeva tenute importanti non solo nella terra-ferma d'Italia, ma nell'isola ancora di Sicilia, nelle

(1) GIBBON descrive il ducato romano in questo modo: « Rome se trouvait réduite à son ancien territoire, comprenant le pays qui s'étend de Viterbe à Terracina, et de Naro à l'embouchure du Tibre. » (*Hist. de la décad. etc.* Liv. XLIX. T. IX. p. 322). E soggiunge nella nota (1). « J'ai indiqué l'étendue du Duché Romain d'après les cartes, et j'ai fait usage des cartes d'après l'excellente dissertation du P. BERETTI. » Un rapido sguardo sopra la carta geografica dimostra, che la descrizione del GIBBON è incompleta, per non dir altro: il che mi conforta nello scorgerla assai diversa da quella che ho abbozzato.

(2) Anon. *Mediol.* l. c. ccl CCXVI. — BLONDI, *Hist.* Dec. I. Lib. 8.

Gallie, e nell'Illiria (1), faceva le veci dell'imperatore nelle terre romane. Egli ne riscuoteva i sussidii per l'esercito, vi raccoglieva il frumento destinato al sollievo del popolo nelle carestie, usando nell'esercizio di queste incumbenze una tal quale giurisdizione civile, non solo sopra i propri vassalli che a titolo di beneficio possedevano i beni della Chiesa, sopra i servi ed i coloni che li coltivavano, ma sovra l'altre classi ancora della popolazione (2).

L'autorità suprema era bensì presso l'Esarca di Ravenna, e per delegazione nel duca che sedeva in Roma: ma la giurisdizione civile e criminale stando nel collegio consolare (composto de' decurioni che in quel tempo erano detti Consoli), questi col Capo della Chiesa ritenevano di fatto presso di se gran parte della pubblica forza (3).

Ma sul cadere del VI secolo l'ignavia che i despoti greci opponevano alle ostilità ed alle vessazioni d'ogni maniera, onde i Longobardi già occupatori della superiore Italia, affliggevano Roma, rinforzarono la pontificia potenza. Chè mentre la città sprovvista di difese, per le spesso interrotte comunicazioni con Ravenna non poteva ottener dagli Esarchi riparo e soccorso contro gl'invasori, nè il popolo afflitto dalla pestilenza e dalla fame, sollievo nella sua miseria, il pontefice diveniva come l'estremo rifugio contro que' mali: il quale e per le largizioni con cui provvedeva alla comune mancanza, per le cariche civili ond'era di fatto ed in quell'abbandono rivestito, e per la maestà del grado ecclesiastico, rendevasi sempre più indipendente dagl'imperatori di Costantinopoli (4).

Allora i voti del clero e del popolo elessero papa un uomo, il quale colle virtù sue e colle opere giustificò il titolo di Grande, che gli fu dalla storia concesso, e quello di santo con cui la Chiesa lo venera sugli altari. Mente vasta, dottrina, natali illustri e numerose sostanze furono le doti che condussero Gregorio I dalle cariche civili alle ecclesiastiche, e da queste, suo malgrado, al papato (5). Attivo difensore di

(1) Cfr. GREGORII I. *Epist.* II. Lib. 1. — SIGON. *De Regno Italiae* lib. I. col. 5 et 6. — GIBBON. *Hist. de la décad. et de la chute de l'Emp. Rom.*, édit. GUIZOT, 1812, T. VIII. p. 400 e seg. — LEO, *Hist. d'Italie*, Liv. II. ch. 3.

(2) LEO, *Hist. d'Italie* p. 87.

(3) LEO *ibid.* p. 107.

(4) GIBBON I. c. Chap. XLV. — MURAT. *Ann.* 584-591.

(5) MURATORI, *An.* 590. — GIBBON I. c. T. VIII. p. 396-404. -- Tra le private virtù di Gre-

Roma (1), zelante propagatore della fede, e consolatore d'ogni miseria, seppe il nuovo papa salvare la città dal furore longobardico, condurre Ariani, Donatisti e Idolatri alla legge di Cristo, rintuzzare l'orgoglio de' tiranni d'Oriente (2), e versar sul popolo i frutti delle proprie ricchezze e degli estesi domini della sua Chiesa (3). Qual maraviglia pertanto se un uomo di tanta virtù, chiamato alla pontificia dignità da' voti del popolo, vide ridotta nelle sue mani gran parte dell'autorità suprema nel reggimento di Roma?

L'eresia de' Greci iconoclasti consolidò nell'ottavo secolo la potenza papale. I pontificati di Gregorio II e di Gregorio III (715-741) furono agitatissimi nella prima metà di quel secolo, per le persecuzioni d'ogni maniera, e per le guerre portate in Italia dall'imperatore Leone Isauro, suscitatore della setta novella, che proscriveva il culto delle sacre immagini. Allora il già debole governo degli Esarchi di Ravenna divenne al tutto impotente a reggere Roma. E sebbene questa col suo ducato rimanesse nella nominale sudditanza dell'impero d'Oriente, sino

gorio I merita speciale encomio l'amore ch'ei sentiva per Roma sua patria, del quale, fatto pontefice, diede luminose prove, e che esso spingeva sino a non poter soffrire che un Romano si servisse comunemente d'altra lingua che della latina: epperò scrivendo al patrizio Narsete (*Ep. 63. Lib. II*) si scusava di non aver fatto risposta ad una lettera di certa dama romana, rifugiata in Costantinopoli, col dire che essendo essa nata latina aveva a lui scritto in greco: « Domnae Dominae salutem meam dico, cui minime respondi, quia cum sit latina, graece mihi scripsit! » (*BARONI Ann. T. VIII. p. 70*).

(1) *BARON. Ann. 595. n. XVI. — An. 598. n. VIII. — Ann. 603. n. XIX. XX. XXI.* — Fu accagionato Gregorio I d'aver distrutto molti degli antichi monumenti di Roma, d'averne mutilate le statue, ed arsa la biblioteca Palatina; « mais les témoignages que nous avons de sa fureur destructive sont » incertains, et d'une date bien plus moderne. » Così il GIBBON (*l. c. T. VIII. p. 391*). Si potrebbe aggiungere a questa testimonianza non sospetta, quest'altra, tratta dagli scritti di quel pontefice medesimo, il quale parlando della misera condizione di Roma, diceva: « Ipsa autem, » quae aliquando mundi domina esse videbatur, qualis remanserit Roma conspiciamus. Immensis » doloribus attrita, desolatione civium, impressione hostium, frequentia ruinarum » ubi enim senatus, ubi iam populus? Quia enim senatus deest, populusque interit » iam vacua ardet Roma. Quid autem ista de hominibus dicimus, cum ruinis erebescuntibus ipsa » quoque destrui aedificia vidimus? » (*GREG. I Homil. in Zach. 18 apud BARONIUM An. 595. n. X et XI*).

(2) « Quiescat felicissimis temporibus vestris universa Respublica redeat cunctis in rebus » propriis secunda possessio reformetur iam singulis sub iugo imperii pia libertas sua » Hoc namque inter reges gentium (cioè de' gentili), et Reipublicae imperatores distat: quod » reges gentium domini servorum sunt, imperatores vero Reipublicae, domini liberorum. » (*S. GREGORI MAGNI Ep. 31 lib. 13*).

(3) *BARON. Ann. T. VIII ad an. 593 n. LVIII, et passim de GREGORIO I.*

al restauro di quello d'Occidente per Carlo Magno, tuttavia l'abbandono in cui l'odio del greco imperatore lasciava l'interna amministrazione di Roma aliena dall'eresia, e zelante del suo pontefice, condusse il popolo del ducato romano a disdire a' Greci il pagamento de' tributi (1), ed a nominare egli stesso i suoi duchi soliti ad esser nominati dall'imperatore (2). Quest'atto d'indipendenza per parte del popolo andò unito ad un altro per parte di Gregorio II: questi, secondo si ha da Anastasio bibliotecario, minacciato dall'Esarca di Ravenna, il quale per poter opprimere Roma si era fatto alleato di Lintprando re de' Longobardi, ricorse per aiuto o per patrocinio a Carlo Martello maggiordomo di Terigi IV re di Francia, esempio seguito nel 741 da Gregorio III immediato di lui successore (3).

Dalle quali cose abbastanza veniamo chiariti che la somma degli affari politici stava in Roma in quel tempo presso il papa, mentre parte del reggimento suo era nelle mani del popolo. E sì a quel modo che concordano gli storici nel riferire allo scisma di Leone Isauro la principal causa della separazione dell'Italia dall'impero d'Oriente, così parimenti convengono nel far tempo dal pontificato di Gregorio II per istabilire il principio di quel nuovo reggimento politico, al quale ad onoranza della maestà latina fu dato più particolarmente il nome di Repubblica Romana.

(1) BARONI *Ann.* T. IX. an. 726 n. XXV.

(2) « Igitur promoti omnes contra imperatoris iussionem restiterunt dicentes etc. ... ita » ul ... sperantes ordinationem eius (n. Pauli Esarchi) sibi omnes ubique in Italia Duces elegerunt, alque sic de Pontificis, deque sua immunitate cuncti studebant. » (ANASTASI *Bibl. Vita Gregor. II.* R. I. T. III. p. 156. — V. PAGI *Aut. Crit. ad an. 740* n. VIII).

(3) Questo narra Anastasio nella vita di Stefano II: egli dice che questo pontefice scorgendo non esser possibile l'ottenere aiuto dall'imperatore d'Oriente contro Astolfo re de' Longobardi, ricorse a Pipino re de' Franchi: « quemadmodum praedecessores eius beatae memoriae dominus » Gregorius, et Gregorius alter, et dominus Zacharias beatissimi Pontifices, Carolo excellentissimae » memoriae regi Francorum direxerunt. » (ANAST. *Bibl. in vita Steph. II.* l. c. p. 167). V. pure LE BEAU *Hist. du bas Emp.* T. VI. liv. LXIII. p. 366. — MURATORI, *Annali ad annos.* — Gregorio III inviò a Carlo Martello le chiavi della confessione di S. Pietro. (BARONI *Ann.* DCCXL. n. XIX). Alle lettere del pontefice andava unito il decreto de' Romani col quale rigettando la dominazione dell'imperatore, si ponevano sotto la di lui protezione. « Anno DCCXLI. Karolus Princeps bis eodem anno legationem B. Greg. P. ab Apostolica Sede directam suscepit; qui » sibi claves ven. sepulchri Principis Apostol. Petri Epistolam quoque decreto Romanorum » principum sibi praedictus praesul Greg. miserat, quod sese populus R. relicta Imperatoris » dominatione ad suam defensionem et invictam clementiam convertere » voluisset. » (*Ann. Metens. ad an. 741* ap. DUCUESNE *R. F. Scr.* T. III. p. 271).

Ma non è a dire con tutto ciò, che questo titolo di Repubblica fosse allora cosa nuova, o riammesso soltanto dachè il ducato romano aveva preso a governarsi da se. Tale e tanta cosa era stata la Repubblica di Roma, che non le frequenti invasioni, non gl'incendi, le pesti, le stragi, le battiture d'ogni maniera, non la bassanza in cui erano caduti i cittadini romani, erano bastati a spegnerne la fama. La memoria della Romana Repubblica sopravviveva a ogni cosa, e spaziava sovra tante rovine (1). Che più, Roma essendo divenuta la sede della legge di Cristo, di quella legge, che associando le miserie presenti alla gloria passata, consolava la perdita delle terrene e cadute cose, colla speranza delle future ed eterne, i Capi di questa Chiesa non d'altri nomi erano soliti salutare i Greci Augusti, che con quelli d'imperatori della cristiana, della santa, della Romana Repubblica.

Ma intorno all'appellazione di Repubblica Romana, ed al diritto de' Romani in quel tempo di onorare con tal nome gli ordini co' quali presero a governare il ducato, odasi quello che ne scrisse un valoroso critico italiano sul finire dello scorso secolo, uomo le cui osservazioni, altrettanto dotte che scevre d'ogni spirito di parte, riescono di grandissimo peso sopra tale argomento: « Per ben conoscere le circostanze » dell'Italia nel secolo VIII (così il conte Carli (2)), richiamar conviene » sino da' suoi principii l'originario e non mai perduto diritto de' Romani di eleggere i dittatori e gl'imperatori come capi supremi della » Repubblica. È vero che Giulio Cesare e poi Ottaviano Augusto costi-

(1) Nell'Italia superiore le voci di *Res-publica* di *Pars-publica* nel medio evo significavano il fisco, la camera regia o imperiale, lo stesso governo del re o dell'imperatore. (*Ant. M. Acc.* T. I. Dissert. XVIII): in Roma sotto gl'imperatori gentili il senso della voce *Respublica* era lo stesso che al tempo de' consoli: ed allora per *Respublica* i papi accennavano l'aggregato de' Romani già venuti alla legge di Cristo, cioè la Chiesa. Più tardi allorchè la totalità de' cittadini romani si fece cristiana, la parola *Respublica* tornò al suo primo significato; ma sebbene in quel tempo gl'individui che componevano la Repubblica fossero i medesimi di cui si componeva la Chiesa, le voci *Resp.* ed *Ecclesia* tenevano due ben distinti significati. Molti sono gli esempi che si possono addurre, oltre quelli accennati dal SISMONDI. (*Hist. des Rép. Ital.* T. I. ch. 3): così si legge nel *Cod. Carol. Ep. VII* (R. I. T. III. P. II) « Nec unius enim palmi terrae spatium » B. Petro, Sanctaeque Dei Ecclesiae vel Reipublicae Romanor. reddere passus est. » ed ivi *Ep. VIII*: « ut si praedictus Desiderius iustitiam scilicet Dei Ecclesiae suae Reipublicae Romanor., B. Petro protectori tuo plenius restituere etc. » — Lo stesso poi apertamente dichiara il MURATORI: « Disectis verbis Ecclesiam Romanam a Republica distiuguit Anastasius. » (*Ant. M. Acc.* T. I. col. 989).

(2) *Delle Antichità Italiane* del conte CARLI (tomi cinque. Milano 1788-91, in-4.º), T. III. p. 333.

» tirarono una monarchia, ma questo accadde per effetto della forza, e
 » colla forza i loro successori pretesero di mantenere una sovranità ere-
 » ditaria: ma la forza non dava loro alcun legittimo diritto contro quello
 » che avendo il suo fondamento soltanto nella costituzione del governo,
 » rimaneva sempre consolidato nella Repubblica, e che se è stato op-
 » presso e avvilito, non perciò si estinse giammai. Infatti in Roma si
 » conservò sempre il Senato (1), erede e -custode di tutte le facoltà
 » ed autorità, delle quali l'antico sino dalla distruzione de' Tarquinii
 » fu rivestito, e col Prefetto alla città, i Magistrati almeno in gran
 » parte si mantennero della città. Il perclè presso cotesto Senato rap-
 » presentante la Repubblica Romana si conservò il diritto della zecca
 » e l'uso d'acclamare e di riconoscere gl'imperatori. Noto è in quali
 » eccessi di violenza caddero Giustiniano II, Filippico, Leone Isauro,
 » e Costantino Copronimo; e noto è come sin dall'anno DCCXII per at-
 » stato di Anastasio (*Vita Constantini*), e di Paolo Diacono (*De Gestis*
 » *Longobard.* lib. VI c. 24) si stabilì dal popolo Romano (*statuitque*
 » *Populus Romanus*) di rifiutare qualunque decreto di Filippico, non
 » riconoscendolo più per imperatore, nè segnar più moneta col di lui
 » nome; il qual decreto si rinnovò contro Leone Isauro, come rilevasi
 » dalle lettere di Gregorio II papa, riportate dal Baronio e dal Pagi
 » negli anni DCCXXVI e DCCXXX. Questo medesimo Popolo, cioè
 » questo Governo Romano, fatta lega con Liutprando re de' Longo-
 » bardi (2) si pose in armi contro Leone e Costantino; creò de' Duchi
 » proprii nelle città della Repubblica, e stabilì di passare all'elezione
 » di un nuovo Imperatore. Gregorio II tuttochè malcontento degl'Impe-
 » ratori (Leone e Costantino) e maltrattato da essi, procurò d'impe-
 » dire una tale elezione, ma non potè ottenere però, che i Romani

(1) Viguit semper Senatus nomen et sub Exarchis et sub Francis nomine tenus, Senatum
 » diximus, non re non officio: Senatum namque cuoi potestate, ut ferebant tempora, Populum
 » Romanum instaurasse invenimus ao. 1143. « Lo quali parole del P. BERETTI (*de Tabula Chronogr.*
M. Aev. col. CCXVII) spiegano questo altre già citate di S. GREG. M. (*Homil. in Ezech.* n. 18 ap.
 BARON. loc. cit. n. XI) « Ubi enim Senatus, ubi iam Populus quia enim Senatus deest,
 » Populus interiit. » E che l'espressione « Senatus deest » non debbasi prendere in senso assoluto,
 ben lo dimostra lo stesso S. GREG. I. (*Epist. I.* Lib. II. an. 603) « Venit icona Focae et Leontiae
 » Augustorum Romam, et acclamatum est eis in Lateranis, et in Basilica Iulii ab omni Clero,
 » Senatu etc. ».

(2) Questa lega fu nel 728. Vedi LE BEAU *Hist. du bas Emp.* Liv. LXIII. Nel 729 — Liut-
 prando erasi collegato con Eutichio Esarca di Ravenna.

» non si dichiarassero liberi e non ritornassero nel pien diritto della
» Repubblica. »

In tal guisa stabilisce il conte Carli il diritto de' Romani. Ma se viveva la ricordanza, non viveva che in pochi la virtù dell' antica Roma. Avvezzi al giogo, peggior d' ogni giogo, degli stranieri, i Romani del secolo VIII, miseri avanzi di tanti barbari, male erano capaci di quella libertà di cui su quelle stesse rive del Tevere i raccoglietici di Romolo erano stati i fondatori.

Dominavano al tutto in Roma in quel tempo gli Ottimati. La qualità ereditaria de' Consolari era succeduta a quella de' Decurioni (1): molti di que' Grandi ne erano possessori, e formavano un collegio detto Consolare (2), al quale spettava il reggimento degli affari del municipio, ed il render ragione nelle cause civili (3). Gli altri individui delle famiglie consolari, non ancora provveduti di cariche, appellavano *onesti cittadini*.

Come poi le maggiori tenute di beni, che non erano proprie della Chiesa di Roma, così le cariche principali, civili, militari ed ecclesiastiche erano possedute da quelle stesse famiglie. Fra quelle erano le dignità di duca e di prefetto; sebbene quella di duca, io aviserei che andando avanti la si riducesse a cosa più nominale ed onorifica che di fatto: avvegnachè se prima sotto i Greci il duca di Roma faceva le veci dell'Esarca di Ravenna, dappoichè Roma e il suo ducato s'erano staccati dagl'imperatori d'Oriente, ed aveano ripreso la forma di Repubblica, la dignità di Prefetto erasi fatta la maggiore in Roma: di questa vedremo siccome sempre s' industriassero di essere insigniti quelli fra gli Ottimati, che presero a soverchiare la nuova Repubblica, sia che già dell'altra di senatore o di principe o di console di tutti i Romani fossero da prima fregiati.

Diritto del prefetto di Roma, secondo ci narra uno scrittore del secolo XII, era lo amministrare la giustizia (4) nelle cause criminali; a

(1) LEO, *Hist. d'Italie* T. I. Liv. II. chap. V.

(2) ANASTAS. *Bibl. in Hist. Rom. Pont. Vita S. Hadriani Papae*, R. I. T. III. P. I. p. 181 et 182.

(3) Vedi la nota (4).

(4) « Ex longo usu Praefectus urbis ab Imperatoribus cognoscitur investitus per gladium contra malefactores urbis exertum. » (GEROI Reichersperg. *Praepos. Epist. ad Henr. Presb. Cardinal* apud BALUSH *Miscell.* T. II. p. 197). — Cfr. PANCIOLOI, *Notitia Dignit. Imperii Occid.* cap. IV.

questo fine aveva egli come aggiunti alcuni uomini consolari, tratti a sorte (1): e sotto la propria dipendenza, le corporazioni o *scholae*; queste formavano come una guardia urbana che vegliava sovra Roma, composta degli artieri e degli altri liberi cittadini, che non appartenevano alle famiglie degli Ottimati: ed erano capitanate da' tribuni, da' maestri de' militi, da' duelli, distinti col titolo di *Ottimati della Milizia*, e presi nelle famiglie consolari.

A imitazione di Roma, la maggior parte delle città della Repubblica avevano somiglianti corporazioni militari rette da' consolari. Distingue nondimeno fra queste lo storico Leo, le *scholae* di Roma, nelle quali egli crede fossero compresi soltanto i cittadini arruolati come militi, mentre nelle altre entravano pure tutti i cittadini delle altre classi libere della popolazione (2).

Potentissime pertanto erano le famiglie de' consolari, nelle cui mani stava ogni sorgente di ricchezza e di autorità: infinito il seguito di clienti, d'ossequenti e di soggetti, corrotti gli uni, e gli altri corruttori, immersi quelli nel lusso, e tutti negli stravizzi, mentre il minuto popolo languiva nella schiavitù e nella miseria, sfamato a stento dalle largizioni del pontefice e de' monasteri.

Moderava egli è vero la calamità di que' tempi, e contrastava alla tracotanza de' proceri, l'angusta dignità della religione e la tutelare autorità del Capo della Chiesa, appo del quale, siccome notammo, stava la nomina alle precipue cariche della Repubblica, il maneggio di una parte delle cose interne, e quello delle politiche relazioni. Ma la smodata potenza di chi entrava al possesso delle cariche, e l'influenza dell'oro, troppo spesso attutavano questa doppia sorgente di salvezza.

Ancora le cause medesime infievolivano, anzi corrompevano quelle istituzioni propizie con cui, a imitazione dell'antica, la nuova Repubblica aveva preso a tutelare se stessa. Così il Senato (3), cui spettava deliberare sulle pubbliche cose, essendo composto di que' potentissimi uomini, e le popolari adunanze, che ne stanziavano l'esecuzione,

(1) « Ex genere Consulium. » (PANCIOLO, l. c. p. 14).

(2) LEO, *Hist. d'Italie* l. c. § IV.

(3) « Pipino regi Francorum Omnis Senatus, atque universa Populi generalitas. » (*Cod. Car. Epist.* 36. R. I. T. III. P. II).

stando nella dipendenza di questi, ogni guarentigia falliva, e tutto sempre andava a capriccio di quelle potenti famiglie (1).

Ogni volta pertanto che accadeva l'elezione di un nuovo pontefice, allora ogni artificio era in moto: l'elezione pendeva da chi maggiore clientela s'avesse di congiunti, d'amici, d'ossequenti. Quindi i contrasti, le gare e le frequenti risse intestine: quindi le fazioni che lungamente tempestarono Roma, e quindi finalmente il pretesto ne' forestieri d'impigliarsi nelle elezioni, e lo spesso ricorrere ad essi, de' papi.

Le vittorie de' re de' Franchi, Pipino e Carlo Magno, annientarono il regno de' Longobardi in Italia, e salvarono Roma dalle guerre che vi portavano circa alla metà del medesimo ottavo secolo, Astolfo e Desiderio suo figlio, re di que' popoli. Conseguenza di questi fatti fu la restaurazione dell'impero d'Occidente. Carlo Magno vincitore di Desiderio, e già fatto re d'Italia, col ricevere nel natale dell'anno 801 la corona d'imperatore de' Romani da papa Leone III, trasferì in se stesso e ne' successivi imperatori l'alto dominio sopra Roma, che prima durava nominalmente ne' Greci.

La crescente potenza de' papi ricevette un aumento novello per le donazioni dell'Esarcato e della Pentapoli fatte da' re Franchi alla Chiesa. Ma queste donazioni non mutarono la forma del reggimento di Roma e del suo ducato, la quale stette e durò lungamente (2) sotto l'alto dominio de' novelli imperatori d'Occidente. Bensì a' vizi di quel simulacro

(1) Cfr. GIBBON op. cit. cap. XLIX. — LEO op. cit. lib. II. § IV. — MURATORI ad an.

(2) « Tuae dulcissimae sublimitati per Dei praeceptionem et Beati Petri, sanctae Dei Ecclesiae « ei nostrum Romanorum Reipublicae Populum commisimus protegendum. » (*Epist.* ADRIANI P. I. ad Carolum regem ord. LIX. in Cod. Car. R. I. T. III. p. II). — Il MURATORI (*Ann.* 772-794), e M. DE S. MARC (*Abrégé Chron. de l'Hist. d'Italie* T. II nell'Indice (*voir Papes*), asseverano, che Adriano I abbia da Carlo Magno ricevuto l'assoluto dominio di Roma, e paiono argomentarsi dalle monete coniate coll'effigie (dicono) di questo papa: l'argomento non è concludente, giacchè anche prima di Carlo Magno, o nell'anno 772 una moneta pubblicata dal MURATORI stesso (*Ant. M. Acc.* T. II. p. 548) porta la medesima effigie col motto, VICTORIA DNX. CONOIL., interpretato per « Constantinopoli officina B (secunda) » (JOUBERT, *Sciences des Médailles* T. II. p. 42 in GIBBON, *Hist. de la décad.* etc. T. IX. Ch. XLIX p. 325). — Tutto questo indica un modo di sovranità, ma non sovranità assoluta. Secondo il CARLI (*Antich. Ital.* P. III. p. 242) il sovrano dominio de' pontefici sopra Roma, comincia dall'anno 1188, nel quale il Senato ed il Popolo Romano per atto libero han conceduto a Clemente III il dominio sopra la città di Roma. Il SISMONDI (*Hist. des Répub. Ital.* T. I. chap. III) non concede più di settanta anni di vita alla Repubblica di Gregorio II, cioè dallo scisma di Leone Isauro a Carlo Magno: essa durò molto più, come si vede dal documento citato dal CARLI.

di costituzione repubblicana s'aggiunsero nuovi stimoli d'ambizione e di dominio ne' pontefici e nuova alacrità nelle fazioni. Perciocchè come col crescere della loro potenza s'accesero i papi nel desiderio di renderla sola ed assoluta, così s'avvivò nelle fazioni il desiderio di collocare nella papale dignità i loro aderenti, e fra i faziosi che nelle elezioni erano vinti, lo zelo di resistere all'autorità del papa. Volgevasi quindi e gli uni e gli altri agl'imperatori (1). L'autorità che questi usavano in Roma era quella del dominio supremo e diretto (2): ad essa pertanto gli uni ricorrevano come a fonte di grazia e di potenza, mentre gli altri in essa ponevano fidanza, per frenare le smodate voglie degli avversari. Così finchè gl'imperatori rimanevano in Roma s'andavano avvicinando le forze dominate da una forza maggiore: partiti quelli e lontani, le cose ripigliavano il solito andamento, l'autorità imperiale diveniva un nome vano, e la potenza tornava a' faziosi.

Tali vizi della costituzione repubblicana di Roma trovarono campo sempre più vasto quanto più s'andò infievolendo il governo imperiale de' successori di Carlo Magno. Crebbero poi maggiormente allorchè spenta in Carlo il Grosso la vasta monarchia de' Franchi, Roma e l'Italia furono tempestate dalle nuove guerre che si ruppero i duchi di Spoleto e del Friuli, e dalle feroci invasioni de' Saracini e degli Slavi. Allora tutto concorse al generale corrompimento. Lo spesso mutare di signoria, al quale le popolazioni sorprese or dall'uno or dall'altro de' competitori andavano soggette; lo stupido ferreo da cui, quasi a un tempo coll'Italia, furono colpite la Gallia e la Germania per le nuove irruzioni barbariche, che resero impossibile dovunque la resistenza; i troppi esempi di rotta fede, di basse vendette, d'impunita baldanza, di sozzo guadagno, dati da' magnati e dal clero, avvezzarono le popolazioni italiane allo spergiuro, al dispregio d'ogni legge divina ed umana.

In Roma tutto era scompiglio e corruzione. Minacciata, taglieggiata, sorpresa dagl'infedeli, invano volgevasi col desiderio a que' venerandi

(1) Il diritto di ricorrere o di appellare all'imperatore era cosa antica (ROVELLI, *St. di Como* p. II. — MURATORI, *Ann.* 893).

(2) Benedetto monaco di Sant'Andrea sul monte Soratte, del quale il PERTZ (*Mon. Germ. Hist.* T. V) pubblicò un'inedita cronaca, scrisse pure un *Libellum de Imperatoria potestate in urbe*, già stato pubblicato (in *Catal. testium veritatis*) dal Flaccio, composto per uso ed a' tempi di Ottone III. (Vide *Proleg.* in PERTZ l. c. p. 695).

pontefici in altri tempi dal popolo sublimati, i quali per la carità di Dio da cui erano spinti, or colla privata, or colla ecclesiastica pecunia, ora colla maestà e colla potenza delle virtù loro, tante volte avevano dalle mura della città minacciata, respinti i feroci Longobardi ed i Greci. Altri pontefici e troppo da quelli diversi, ora erano esaltati, deposti, ammazzati dalle capricciose fazioni. Guasto e feroce cadeva il secolo nono: più guasto e più feroce instava il seguente.

Due principalissime erano codeste fazioni, le quali dopo la caduta de' Carolingi erano cresciute, o rinate dalle precedenti; seguiva l'una la parte di Guido duca di Spoleto, la quale vantavasi rappresentare la nazionalità romana: l'altra era addetta alla parte tedesca, e così ad Arnolfo re di Germania pretendente l'eredità de' Carolingi.

Turpe è la storia di Roma sotto l'impero di queste fazioni: impero, che con violenza dall'una all'altra trapassando, nel breve spazio di circa venticinque anni sollevava sul soglio imperiale cinque principi tra nazionali e forestieri, e tredici successivi pontefici sulla cattedra di S. Pietro (1).

Alla fazione tedesca fu per lo più dagli storici attribuita maggiore preponderanza: rinforzata dalla potenza de' ricchi Marchesi di Toscana, usurpò essa assai tempo in Roma un'autorità quasi assoluta, temperata o contrastata soltanto, ogni volta che una novella elezione recava sul seggio papale un effimero campione della parte avversaria. Del resto non si piccavano i faziosi, o gli eletti da una delle parti, di politica costanza, nè difettavano i papi di pretesti per rompere la fede giurata; così papa Formoso, il quale nell'892 aveva coronato imperatore Lamberto figliuolo dell'Augusto Guido (2), invitava Arnolfo a quella corona, che poi gli poneva sul capo nell'896 (3): così pure Stefano VI dopo di avere accettato l'imperatore Arnolfo, passava a parte Spoletina, e riveriva come imperatore Lamberto (4).

Al primo di questi pontefici, Formoso, riferisce il Mabillone gran

(1) PAGI Franc. *Breviarium Hist. Chron. Crit. Illustriora Pont. Roman. gesta complectens*. T. II — MURATORI *An.* 893-915.

(2) *Chron. Casaur.* R. I. T. II. P. II. — MURAT. *An.* 892.

(3) *Ann. Freher.* in cont. *Ann. Fuld.* ad ann. 895-896. — MURAT. *Ann.* 898.

(4) « Ex odio forsitan quod conceperat contra Formosum, quò Arnulphus Roman. vocatus, imperialem unctionem suscepit, vel potius ex odio quo in Arnulphum flagrabat, in Formosum saevit... » (PAGI Fr. *Brev. Gest. Pont. Roman.* T. II. p. 142. — V. HERM. CONTR. in *Chron.* ap. PISTOR. T. I pag. 252).

parte de' mali che afflissero la Chiesa nel secolo X (1). E meritamente: non già, secondo a me pare, per le ragioni soltanto da esso addotte di violata disciplina nell'elezione sua, e tra le altre dall'essere Formoso passato dalla Chiesa di Porto a quella di Roma contro il divieto de' canoni, che la necessità de' tempi, e l'autorità della Chiesa avevano reso nullo (2), ma sì e principalmente « perchè credevasi (così il Mabillone), » ch'egli co' suoi fantori avesse cospirato contro la salute della repubblica » e dell'impero» (3), chiamando, a dispetto delle promesse fatte all'imperatore Lamberto, e con funesta innovazione egli primo, un re tedesco alla corona dell'impero romano (4).

La fede rotta da papa Formoso a Lamberto, ed il sangue sparso per comando di Arnolfo nel farsi a ricevere la corona, aizzarono più feroci le parti, e posero in Roma le fondamenta di quell'odio contro la dominazione tedesca, che tanta manifestazione poi ebbe sotto l'impero de' tre Ottoni, e fu cagione dell'innalzamento d'Ardoino. Morto questo pontefice, e dopo pochi mesi Bonifacio VI, la parte Spoletina eleggeva Stefano VI (5). Questo forsennato prorompendo contro la memoria di Formoso, ne strappava dal sepolcro il cadavere, che con empio e ridicolo processo faceva condannare, dicollare, e precipitare nel Tevere (6).

Da queste scellerate pazzie, condannate nel concilio romano di Giovanni IX nell'anno 898, nel quale ancora fu annullata l'elezione imperiale di Arnolfo e confermata quella di Lamberto (7), chiaramente risulta quali umori per opera di Formoso covassero negli animi di que' faziosi cittadini, umori che quindi riescirono, come sovente le cittadine discordie, alla perdita della libertà, e resero la Repubblica di Gregorio II preda di turpe signoria.

Fra queste scissure cominciava il secolo X.

(1) « Sive is causa fuerit, seu occasio. » (MABILL. *Acta SS. O. S. B. Sacc. IV*, in Praef. n. 6).

(2) « Formosus autem necessitatis causa de Portuensi Ecclesia, pro vitae merito, ad apostolicam » sedem proventus est. » (Canon. 3 *Concil. Rom. sub Ioan. P. IX*, ap. PAGI *Fr. I*, c. p. 143).

(3) « Contra Reipublicae et Imperii salutem cum suis fautoribus conspirasse credebatur. » (MABILL. *l. c.*).

(4) REGINO, in *Chron. ad an. 896*.

(5) « Tyrannis fauens, et Arnulphum odiens, » così parla Erm. CONTBATTO (*Chron. ad an. 896*) di Stefano VI; il che significa ch'egli favoriva Lamberto imperatore, e parte Spoletina, contro la fazione tedesca.

(6) PAGI *Franc. Breviar. T. II*, p. 142 ad an. 896.

(7) PAGI *Ant. Critica in Ann. BARONI ad an. 898 n. 1*.

Trionfava in quegli anni parte Spoletina, la quale dopo la morte di papa Formoso varii pontefici aveva dato a Roma: ma non posava la parte avversaria.

Nell'anno 904 saliva sulla sedia pontificia Sergio III, di famiglia e parte Tuscolana, cardinal prete, il quale già nell'anno 898 a concorrenza di Giovanni IX la sua fazione aveva chiamato papa. Ma più potente la parte Spoletina che favoriva Giovanni (1), la consecrazione di Sergio non aveva avuto luogo, ed anzi egli era stato costretto co' suoi fautori all'esiglio (2). E vi rimaneva per anni sette, sino a che succeduti a Giovanni IX, Benedetto IV, Leone V e Cristoforo, i tempi più favorevoli lo riportavano a Roma, e vi otteneva la tiara (3).

L'elezione di Sergio porge una maggior prova della versatilità di quelle fazioni. Chiamato a Roma da parte Spoletina che in quel tempo vi dominava, e contraria alla sua, egli ottenne il papato scacciando l'usurpatore Cristoforo, il quale apparteneva alla fazione Tuscolana, che era quella di Sergio. Strano e intricato involuppo di cozzanti passioni, colle quali i Grandi di Roma sommovevano quel popolo, e che noi lontani da que' tempi corrottissimi, ed ignari degli usi e degli artifici che allora dominavano nelle famiglie romane, malamente andiamo raccapazzando. Ad ogni modo a quella mobilità di combinazioni aggiungevasi in quel punto un novello e più forte elemento di corruzione, che veniva a complicare ogni cosa.

Quest'era la potenza che in Roma usurpava e quindi tramandava nella sua famiglia, Teodora donna per nobiltà e per ricchezze, quanto per ambizione e pe' suoi vizi famosa; la quale (come nella superiore Italia Ermengarda figliuola di Adalberto il ricco marchese di Toscana) ado-

(1) Il MURATORI (*Ann. 898*) dice che questo papa era della fazione di papa Formoso (cioè della fazione tedesca), e ciò perchè annullò il processo fatto da Stefano VI contro di quello: parmi ch'egli contraddica a se stesso, scrivendo poche linee dopo, che Giovanni IX nel concilio di quell'anno annullò l'elezione imperiale di Arnolfo e confermò quella di Lambert. L'annullare il processo di Formoso era opera di pietà e di giustizia, e il MURATORI (ivi) nota, che Giovanni era uomo molto saggio e pio.

(2) « Pellitur electus patria, quo Sergius urbe Romulidumque gregum, quidam traduntur ab acti. » (FRODOARD. *De Pont. Rom. R. I. T. III. P. II. De Ioann. IX*).

(3) PAGI *Fr. Breviar. Hist. Chron. Crit. T. II. De Papa Sergio III.* « Sergius inde redit, dudum qui lectus ad arcem — Culminis, exilio tulerat rapiente repulsam. — Quo profugus latuit septem » volentibus annis — Hinc Populi remeans precibus sacratur honore, — Pridem designato, quo » nomine tertius exit — Antistes. » (FRODOARDUS *De Pont. Roman. R. I. T. III. P. II. col. 304*).

perando in Roma al proprio esaltamento le virili arti di governo e le donnesche seduzioni e blandizie, vi si era fatta signora ed arbitra di tutte le cose (1).

Aveva Teodora due figliuole da essa educate agli artifici, e a' turpi amori. Le quali come non eran per indole inferiori alla madre ne' primi, così la vantaggiavano ne' secondi per bellezza giovanile (2). Agli amori pertanto, a' raggiri, a' delitti di queste donne famose vanno connessi i fatti di Roma, immersa in quel punto in una stupida letargia, che rendeva schiavi di sozza femminile tirannide quegli uomini così accesi poco prima, così pronti a impugnar l'armi per l'amore di parte. Ma qui conviene avvertire che sebbene l'autenticità del complesso di questi fatti non debba mettersi in dubbio, perchè corroborata da molte testimonianze, tuttavia principal narratore di essi essendo stato il vescovo Liutprando, scrittore dedito agli Ottoni I e II, epperchè di fazione contraria a quella già dominata da Teodora e dalle figliuole, la narrazione ne giunse a noi grossa non solo della già troppa originale laidezza, ma di tutte le turpitudini, che quel pungente scrittore raccolse a' suoi tempi su per i trivii e per le piazze di Roma, contro la spenta dominazione di quelle potentissime donne, e contro i pontefici da esse esaltati (3). Difficil cosa pertanto riesee lo sceverare il vero dal falso: nè questo avendo fatto gli scrittori seguenti più vicini a Liutprando, le esagerazioni di lui furono accolte come vera storia. Se ne lagna il Muratori, ed argomentando da alcuni palesi errori di quello storico, degli altri che può avere commesso, stupisce che il cardinale Baronio l'abbia preso ciecamente per guida, ed abbia mandato troppo aspre e severe parole contro Sergio III e Giovanni IX (4), pontefici de' quali altri sincroni scrittori non solo non narrano cotante turpitudini, ma in certo modo le contraddicono, vantandone lo zelo, la dottrina e la munificenza per la Chiesa e per Roma (5), e ad uno de' quali l'Italia del secolo X andò

(1) « Theodora scortum impudens ... romanae civitatis non inviriliter monarchiam obtinebat ». LIUTPRANDI, *Antapod.* Lib. II. c. 48 apud PERTZ *M. G. H.* T. V. p. 297 et Lib. III. c. 7. p. 304).

(2) « Quae duas habuit notas Maroliam atque Theodoram, sibi non solum coaequales, verum » etiam Veneris exercitio promptiores. » (LIUTPR. Lib. II. c. 48).

(3) CARLI, *Ant. Ital.* P. IV. p. 70.

(4) MURATORI, *Ann.* 910-931.

(5) « Summus erat Pastor, tunc temporis Urbe Iohannes, — Officio affatim clarus, sophiaque » repletus. » (Anon. *Panegyri. Berengarii*, Lib. IV. R. I. T. II. P. II. p. 405).

debitrice della distrutta potenza de' Saracini stanziati dopo tanti anni sul Garigliano (1).

A questo spirito di parte adunque che moveva la penna di Liutprando deeasi attribuire l'oscurità che copre la storia di Roma in quel cupo periodo di tempo. Vissuto negli anni di Alberico II, figliuolo di Marozia (2), certo egli non potè ignorare nè chi fosse Teodora madre di questa, nè come e da chi fosse in quella discesa quell'autorità suprema di cui fecero sì strano abuso quelle donne impudiche, e che quindi passò in Alberico ed in Giovanni XII suo figlio. Nessuna di queste notizie non si curò di lasciarci Liutprando, che anzi col surrogarvi quelle tante dicerie del volgo di Roma, coll'intarsiare nel suo racconto tante inutili nequizie, strandò dal vero, e preoccupò le menti degli scrittori che vennero dopo, e la storia ne fu sconvolta e oscurata.

Arreca in tal buio un po' di luce il confronto degli scrittori contemporanei colla pubblicazione di una cronaca inedita del secolo X, fattasi or è poco in Germania dall'inclito Giorgio Pertz, ed inserita nel tomo V della sua monumentale raccolta. L'autore fu un monaco del monte Soratte, che visse a' tempi di papa Giovanni XII, e giunse fino a quelli del console Crescenzo (3); il quale racimolò qua e là, ed ordinò a modo di cronaca un monte di notizie non sempre tra di loro connesse e concordi, ma che prese con criterio ad una ad una, possono talvolta aiutare la conoscenza del vero: se non che il senso ne riesce non poco confuso, per essere scritte in un certo guazzabuglio di lingua, ch'io non so s'io debba chiamare latina, tanti ne sono gl'idiotismi e le sgrammaticazioni, primordi al certo di quella lingua volgare che già parlavasi in Roma sul finire di quel secolo stesso (4).

(1) LIUTPR. *Antapod.* Lib. II. cap. 49 ad 51, ap. PERTZ T. V. p. 297.

(2) LIUTPR. *Ibid.* Lib. V. cap. 30. p. 335.

(3) Vedi in PERTZ, T. V. *Prolegon. in Chron. Benedicti monachi S. Andreae in monte Soracte.*

(4) Leggesi nell'Epitafia di papa Gregorio V morto nel 999:

» *Usus Franciscæ, vulgari, et voce latina,*

» *Instituit populos eloquio triplici.* « (BARONIO *An.* 999).

Maggior testimonianza dell'esistenza di una lingua parlata, e sorta sovra la latina, adduce l'illustro FAURIEL (*Bibl. de l'École des Chartes*, T. II. p. 621), ed è questa: Un Italiano per nome Gonzone trovavasi di passaggio nel monastero di S. Gallo andando in Germania nell'anno 960: ivi conversando cogli ospiti suoi in lingua latina, ebbe a cadere in un qualche solecismo, di cui furono fatte da que' monaci, e da uno in particolare, non poche risate. Punto al vivo il povero cherico scrisse una lunga epistola in difesa della sua latinità, scusando con queste parole l'errore commesso: « Falso putavit S. Galli monachus me remotum a scientia grammaticæ artis, licet

Ora ell'è cosa osservabile siccome nella rassegna che questo scrittore va facendo de' principali personaggi di Roma a' tempi di Marozia, invano cercheresti uno de' tanti vituperii versati a piene mani dallo storico Lintprando (e ripetuti più tardi dal Baronio) contro i pontefici Sergio III, e contro i due Giovanni X ed XI.

Nè questo si vuole attribuire a religiosa osservanza, che il monaco nostro professasse verso que' Capi della Chiesa, posciachè non andò del pari rattenuto nel parlare di papa Giovanni XII, ne' cui tempi egli scriveva, ch'egli a torto chiamò figlio spurio d'Alberico il giovane, e del quale diceva: non essere stato mai ne' popoli idolatri, nè il più libidinoso uomo, nè il più forsennato (1).

Dal silenzio di questo nuovo cronista circa Sergio III e Giovanni X noi potremo adunque dedurre la conferma della sentenza del Muratori sopra le esagerazioni di Lintprando.

Così di Sergio III contro del quale tanto infuria questo scrittore, altro non dice il monaco del Soratte in aggiunta a quello che ci lasciarono Frodoardo, e l'autore dell'epigrafe sepolcrale (2), se non se che egli fu munifico restanratore della Basilica Lateranense crollata a' suoi tempi dalle fondamenta (3).

Parimenti va rattenuto verso di Giovanni X, nè maggiormente ricorda la causa del di lui esaltamento al papato, così turpe secondo Lintprando, che non ricordò quella di Sergio. Che anzi tralasciato ogni altro fatto di questo pontefice, tutto volge il suo zelo a narrare la distruzione de' Saracini del Garigliano da esso operata.

Curiosi, nè privi di un qualche pregio di novità sono i particolari, ch'egli racconta di questa non ingloriosa fazione capitanata dal pontefice medesimo, i quali possono servire come di complemento alla narrazione fattane dagli altri scrittori di quel tempo (4).

» aliquando retarder, usu nostrae vulgaris linguae quae latinitati vicina est »
il monaco del Soratte non sapeva altra lingua che questa.

(1) « Factus est tam lubricus sui corporis et tam audaces quantum nunc (f. non) in gentilis »
» populo solebat fieri. » (*Chron. Bened. Mon.* n.º 35 p. 717).

(2) FRODOARDUS, *de Pont. Rom.* l. c. *Epitaf. Sergii III.* ap. MURATORI, *Ann.* 911.

(3) « Cuius temporibus ruina magna concuti in ecclesia patriarchio Lateranensis Sancti Iohannis, »
» qui appellatur Constantiniana, a fundamentis est rupta; qui mox apostolicus Sergius meliusque »
» renovavit a fundamentis; quanta donaria in hoc patriarchio optulit in ipsius basilicae, a duobus »
» lateribus ante altare, in picture renovationis scriptum est. » (*Chron. Bened. Mon.* l. c. n. 97) f. 713.

(4) LINTPRANDI *Antapod.* Lib. II. c. 49-55 — apud PERTZ l. c. p. 298. — LEO, *Ostiensis in Chron.* Lib. I. cap. 52. l. c.

Ecco come si fa a narrarli.

Circa trent'anni prima, dic'egli, che Sergio III salisse al papato, alcuni Saracini, gente quasi Siciliana (così gli appella perchè venuti di Sicilia), approdati ad Amalfi, inondarono la superiore Calabria, e vennero a porre la loro stanza sul Garigliano, afforzandovisi in certa torre che pigliava il nome da quel fiume. Allargatisi ne' territorii vicini, erano andati via via corseggiando e ponendo a fuoco e sangue la Campania, la Sabina e le terre di Cicoli, ed aveano occupate le città di Narni, d'Orta e di Nepi (1). Quindi più mai non aveano cessate le barbariche loro invasioni, cosicchè a' tempi di Giovanni X tutto il territorio romano ne era desolato e manomesso.

Ardeva perciò il papa di liberare Roma e quelle provincie dalle scorrerie di questi ribaldi. Avuto sopra di ciò consiglio con Alberico il vecchio, marchese di Camerino, deliberano chiamare le popolazioni all'armi, e con queste, sorrette dalle schiere che quel marchese a nome di Berengario I imperatore aveva condotto in soccorso del papa (2), assalire inopinatamente e a un tempo solo i Saracini sopra varii de' punti da essi occupati.

Così fu fatto: i popoli di Rieti e della Sabina condotti e secondati da' capitani longobardi, sorsero contro gli Agareni di Trevi, mentre quelli di Nepi e di Sutri li combattevano nel campo a Baccano, a poche miglia da Roma. Dovunque gl'infedeli furono vinti, e molta strage ne fu fatta dalle invelenite popolazioni (3).

La rotta de' compagni persuase gli altri Saracini sparsi ne' comitati

(1) « Tunc exierunt Aggarenis gens quasi Situle, et properantes venerunt ad Amalvis, et repleverunt Calabria superiores, veniente ad fluvium qui dicitur Garigianu (Gariliaoum), apprehenderunt turres, et facta est eorum habitatio. Ceperunt tota Campania ferro, igne vastare: » territorio Ciculano et Savinensis, et civitas Narnienses, et civitas Ortana, et civitas Nepisina, » in suis dominiis redacte sunt. Propter hoc amplius rex Francorum in Italia non regnavit usque » a presentem diem. Regnaverunt Aggarenis in Romano regno anni triginta; redacta est terra in » solitudine et monasteria sancte sine laudes Et in summa sedis sancte apostolice preerat » Sergius Papa tertius. » (*Bened. Chron.* l. c. n. 27. p. 713).

(2) MURATORI, *Ann.* 905. — ANON. *Paneg. Bereng.* l. c. Lib. IV.

(3) « Consilio inito cum Althericus Marchiones de Sarraacenis. In ipso tempore exivit Akiprandus » Reatino, et alii plures Langobardis, et Savinensi (Sabinenses), et preparaverunt se a pugna » cum Sarraacenis, a moecie civitatis vetustate consumpta, nomine Tribulana. » ((Trevi?) PERTZ » Et conflictu pugna, intercedente Beato Petro Apostolo, Sarraacenis interfecti sunt. Alia pugna est » facta infer Nepisinas et Sutrinus cum Sarraacenis in campo de Baccani, multosque Sarraacenos » trucidati sunt et vulnerati. » (*Bened. Chron.* ibid. n. 29).

di Narni, di Cicoli e d'Orta, che unico modo di provvedere alla loro salvezza era la fuga; perciò fatta la massa, a tutta furia si ritrassero al Garigliano, non senza rompere i passi delle strade, per aver campo d'operare la ritirata (1). A questo appunto voleva ridurli il pontefice, il quale con Alberico non pensò ad inseguirli, portando le soldatesche sovra quel fiume (2). Quivi siccome abbiamo da Leone Ostiense e da Liutprando (3), non fallì al papa il soccorso del greco imperatore e de' confederati. Accerchiati que' barbari, fu dato loro un generale assalto, nel quale la resistenza ed il valore degl' infedeli tennero lungamente contra l'impeto de' cristiani. Lo strepito della battaglia (così il cronista) s' udì sino da Benevento; e i cittadini afferrate le armi trasero anch' essi là dove più ardeva il conflitto. Alla fine la vittoria fu compinta pe' cristiani, sperperato quel nido di ladroni, e tutti morti o presi i Saracini (4).

Bella mostra di se nella battaglia aveva fatto il marchese Alberico, il quale scagliandosi come leone furioso in mezzo a' nemici aveva avuto gran parte nella vittoria. Epperò tornato a Roma vincitore con papa Giovanni, vi fu accolto con molta onoranza dal popolo (5). Era Alberico giovane di bellissimo aspetto (6): quindi non è meraviglia se nella pompa del suo trionfo egli colpì d'amore una delle più vaghe fanciulle romane, di nobile e ricca famiglia (7), figlinola del console

(1) « Audientes Sarraceni qui erat in Narnienses comitatu, Ortense, et qui erant in Ciculi, » preparaverunt se omnes in unum ad Dux eorum, qui erat a fluvium Gariliani, iter bastantes, » maxime cognoscentes, id eo ipsis interitus eveniret. » (*Bened. Chron. ibid.*).

(2) « Anxiebat cor Iohannis decimi pape cum Albericus gloriosus marchiones, et collecta multitudo ostiliter venerunt a fluvium Gariliani. » (*Bened. Chron. ibid.*).

(3) LEO, *Ost. Chron. Cass. Lib. I. c. 52. R. I. T. IV.* — LIUTPRAND. *Antapod. l. c. Lib. II. cap. 51 e 52.*

(4) Cfr. LIUTPR. et LEO l. cit. et *Chron. Bened. l. c.* — Anche il cronista Farfense dice lo stesso: « Ex quibus (Saracenis) in Gargelianis montis summitatem ascensis, nec unus superfuit, qui non aut gladio trucidaretur, aut vivus continuo non caperetur. » (*Lib. II. col. 455. R. I. T. II. P. II*)

(5) « Factus est Albericus marchio ut leo fortissimus inter Sarracenos. Audierunt Beneventani prelium, exierunt Beneventum, et venerunt ad turrem, et preliaverunt prelium magnum; et contriti sunt Saracenis a facie Romanorum; et victores Iohannes decimus papa, et Albericus marchiones, honorifice susceptum Albericus marchio a Romano populo. » (*Bened. Chron. n. 29 p. 714. l. c.*).

(6) « Erat hisdem Albericus marchio clangiforme. » *Ibid.*

(7) Il Panegirista anonimo di Berengario I nel render conto della coronazione imperiale di questo re, parla di un figlio del console Teofilatto, uno de' due giovani deputati a fare accoglienza al nuovo imperatore alle porte della basilica vaticana.

Teofilatto, della quale, soggiunge il nostro monaco, non accade dire il nome (1).

Era costei la famosa Marozia, come apparisce dalle cose che vengono dopo. Narra infatti il medesimo cronista, siccome dagli amori del marchese Alberico colla figliuola di Teofilatto (che il Muratori credette nozze legittime, e che esso appella *maligna consuetudine* (2)), nacque un figlio, cui la madre in grazia dell'amante volle fosse posto il nome d'Alberico (3), e che questi divenne in seguito principe di Roma. Ora egli è noto per molte testimonianze, e fra le altre per quella di Liutprando (4), che questo principe nacque da Marozia: la reticenza pertanto dello scrittore del Soratte è al tutto curiosa, e tanto più che non solo nel luogo sovra citato, ma che dovunque in seguito gli accade parlare di quella potentissima donna, sempre l'appella o *la senatrice*, o *la figliuola di Teofilatto*, o *la madre di Alberico*, e non mai *Murozia*. Checchè ne sia di ciò, col palesarci il nome finora ignoto del padre di Marozia (5), accenna questo scrittore alla cagione della di lei potenza cominciata nella madre Teodora. Perciocchè ella è cosa ovvia il credere, che dal marito Teofilatto o per lusinghe o per violenza la venisse Teodora usurpando, e che quindi protetta da un seguito di congiunti, di clienti, di proci,

« Ille etiam iuvenes, nitida respergine creti,

» Alter Apostolici nam frater, consulis alter

» Natus erat, pedibus defigunt oscula regis. » (*Paneg. Bereng.* Lib. IV. n. 125)

La coronazione di Berengario ebbe luogo nell'anno 915 o nel 916, ed in quest'ultimo anno la vittoria del Garigliano. « Anno DCCCCXVI exierunt Agareni de Garigliano. » (*Lupi, Protosp. Chron.*).

Che poi in quel tempo fosse console di Roma Teofilatto, l'abbiamo dal Leibnitz: « Sicuti » glossa docet, quae non addit quo nomine filius Theophilacti Consulis et Ducis urbis Romae » appellaretur. » (*LEIBNIT.* apud *MURATORI* R. I. T. II. P. II. p. 408, nota (39)).

(1) « Accepit una de nobilibus Romani, cuius nomine soperest, Theophilacti filia, non quasi » uxor sed in consuetudinem malignam. » (*Bened. Chron.* l. c.).

(2) *MURATORI*, *An.* 921. — *Bened. Chron.* vedi la nota precedente.

Si potrebbe credere che il Muratori siasi apposto credendo Alberico legittimo marito di Marozia, dallo scorgersi ch'essa non diede la mano di sposa a Guido marchese di Toscana fin dopo la morte di quello, accaduta nel 925: forse il matrimonio seguì la nascita del figlio Alberico II.

(3) « Genuit ex ea filium, ab amore patris Albericus nomen imposuit. » (*Chron. Bened.* l. c.).

(4) « Habuerat sane Marotia filium nomine Albericum, quem ex Alberico marchione ipsa genuerat. » (*LIUTPR.* *Antapod.* Lib. III. § 41. l. c.). *Chron. Farf.* R. I. T. II. P. II. f. 517.

(5) Il CURZIO (nell'Opera *De Senatu Rom.* Lib. IV. p. 161) dice che da taluni si congettura essere stato *Constantinus unus ex maioribus Senatus* il marito di Teodora (vedi *VITALI*, *Storia Diplomat. de' Senatori di Roma*, T. I. p. 22): ma la cronaca del Soratte non era ancora conosciuta ai tempi del Curzio.

coll'aiuto de' vezzi delle figliuole, de' quali sapeva far mercato, giungesse a consolidarla in se stessa e nella propria famiglia.

Erede della potenza di Teodora, vantaggiò Marozia la madre nelle mire ambiziose, che spinse sino ad invogliarsi della corona imperiale. A questa cogli amori, a questa co' delitti, e con ogni maniera d'artifici tendeva; tuttavia lungamente resse Giovanni X alle violenze di Marozia e del marchese Alberico. Alla fine venne fatto al papa di cacciar da Roma Alberico, il quale quindi a poco o per sommossa o per agguato fu morto (1).

Allora fu (923-926) che Marozia per tutelare la sua potenza oggimai vacillante, maritossi a Guido riceo marchese di Toscana, fratello della funesta Ermengarda (2).

Qui il monaco del Soratte nel riferire i fatti di Marozia e di Guido aggiunge alla narrazione di Liutprando alcuni particolari, pe' quali (se facciamo con esso a fidanza) rimarrebbe appoggiata ad una testimonianza contemporanea la venuta degli Ungri alle porte di Roma, che al Muratori sembrava improbabile, sebbene asserita da vari scrittori, per verità posteriori a que' tempi, e ripetuta quindi dal Sigonio (3). Certo che i frequenti anacronismi commessi da questo cronista possono rendere sospetta l'asserzione sua, ma se si considera che la venuta di que' barbari nelle terre romane fu al certo un avvenimento di molta importanza, egli si vuol credere ch'egli abbia detto il vero parlando di un fatto da lui stesso veduto, od occorso per lo meno in tempo a lui vicinissimo.

Era in quel punto (così il monaco Benedetto) il popolo di Roma diviso in due fazioni, delle quali una teneva pel papa, uomo splendido e d'alto core, l'altra per Guido e per Marozia contro il papa, a cagione di Pietro marchese, di lui fratello, esoso a' Romani e nemico particolare di Guido.

Dopo uno scontro tra le genti di Marozia, e quelle di Pietro, questi ebbe il bando da Roma. Riparato nella città d'Orta, egli vi ergeva una fortezza, mentre per trar vendetta de' Romani, mandava invitando gli

(1) MURATORI, *Ann.* 925.

(2) MURATORI, *Ann.* 925. — LIUTPR. *Antap.* Lib. III. cap. 18.

(3) MARTIN. *POL. Chron. Rom. Pont.* R. G. S. BOECLER T. unico, p. 337. — PTOLOM. *Lucensis Hist. Eccl.* Lib. XVII. cap. I et II. R. I. T. XI. — PLATINA, *Vitae Roman. Pont.* — SIGONIUS, *De Regno Italiae*, Lib. VI. an. 925. — MURAT. *ibid.*

Ungri a dare il guasto a quella parte d'Italia (1). E qui pure si badi che questa chiamata degli Ungri, attribuita da quegli scrittori più recenti al marchese Alberico, viene con molto maggiore probabilità in quanto al tempo, apposta dal nostro cronista al marchese Pietro fratello del papa. Del resto si può credere che i Saracini cui coceva la disfatta del Garigliano, pigliassero parte ancor essi a quest'irruzione barbarica: certo in que' giorni essi soleavano i mari vicini (2). Ad ogni modo i barbari desolarono col fuoco e colle rapine le terre di Roma e della vicina Toscana, d'onde ritraendosi menarono schiavi buon numero di abitanti (3).

Protetto da essi tornò in Roma il marchese Pietro, la qual cosa fece traboccare lo sdegno de' cittadini già inveleniti per le sofferte dilapidazioni. Ancelanti di vendetta, e sotto la guida di Marozia e di Guido invadono il palazzo del papa in Laterano: ivi uccidono il colpevole Pietro sugli occhi stessi del fratello pontefice, rispettando non di meno la persona del papa. Così scrive il monaco del Soratte (4).

Da questa narrazione differiscono quelle di Flodoardo e di Liutprando: raccontano essi che mentre Pietro cadeva vittima di quel furore, Marozia faceva porre le mani sopra papa Giovanni, il quale così sostenuto prigioniero, terminava i suoi giorni per violenza, o come altri affermano di crepacuore (5).

Poco tempo dopo, Marozia rimasta vedova di Guido, mandava ad offerire la mano di sposa ad Ugo di Borgogna re d'Italia, fratello uterino del morto marito. Nè questi disdiceva alla proposta di quelle nozze incestuose, che colla signoria di Roma, fondata speranza a lui davano

(1) *Bened. Chron.* l. c. n. 29.

(2) « Anno 927 fuit excidium Tarenti patratum, et perempti sunt omnes viriliter pugnando: reliqui vero deportati sunt in Africam. » (LUPU, *Protosp. Chron.* R. I. T. V). — ROMUALDO Salern. (R. I. T. VII) riferisce questo fatto all'anno 926, ed anche egli ne chiama autori gli Ungri, e soggiunge: « Deinde Campaniam ingressi, etc. ».

(3) *Bened. Chron.* ibid.

(4) Ibid.

(5) « Iohannes Papa cum a quadam potenti femina, cognomine Marocia, Principatu privatus sub custodia detineretur, ut quidam vi, ut plures astruunt, actus angore, defungitur. » (FLODOARDI, *Chron.* ap. PERTZ T. V. ad an. 929. p. 378). — Cfr. LIUTPR. *Antapod.* Lib. III. n. 43 l. c. — MURATORI, *Ann.* 920-929.

di conseguire la corona imperiale, scopo delle mire di lui e di Marozia (1).

Frattanto fin dall'anno 924, in cui per la morte dell'Augusto Berengario era cessata in Roma l'autorità imperiale, la dignità di senatrice avea posto nelle mani di Marozia la rocca di Sant'Angelo. Da questa dominava sopra Roma, reggeva a suo talento le fazioni, e ne' comizi pontificii faceva pendere le elezioni a seconda de' suoi disegni. Già a papa Giovanni X avea fatto succedere nel 925 Leone VI, ed a questo dopo sette mesi, Stefano VII, il quale passava di vita nel 931. Allora l'accorta senatrice innalzava sul soglio pontificio Giovanni, uno de' suoi figli, che fu l'undecimo papa di tal nome. Questi che da Raterio vescovo di Verona contemporaneo, vien chiamato *Pontefice d'indole gloriosa* (2), fu anzi al tutto dedito ed obbediente all'imperiosa Marozia, alla cui tirannide, scrive il cronista del Soratte, soggiogò interamente Roma (3).

Ma mentre così tutto pareva sorridere a' voti di quella donna, cui la propria potenza, la regale autorità del marito e la debolezza del figlio pontefice rendevano omai certa la corona imperiale, appressavasi invece l'ora in cui Roma trionfar doveva della turpe signoria femminile fondata da Teodora, e che da poco meno di un mezzo secolo l'oppressava (4).

Era nell'anno 932 venuto a Roma il re Ugo per celebrare le sue nozze con Marozia; accolto cortesemente in castel Sant'Angelo, era nondimeno stato costretto a lasciar di fuori i suoi Borgognoni, a' quali i

(1) LIUTPR. *Antapod.* l. c. n. 44. — MURATORI, *Ann.* 932.

(2) « *Papae Ioannis gloriosae indolis* » (RATHERI *Epist.* III. ap. DACHERY in *Spicileg.* T. I. p. 373); forse Raterio l'onorava di quell'epiteto, a cagione della madre Marozia allora potente.

(3) « *Ioannes XI subiugatus est Romam potestative in manu femine* » (*Bened. Chron.* n. 30). — LIUTPRANDO (*Antapod.* l. c. n. 44) asserisce francamente che Giovanni XI nacque da papa Sergio III. — Il MURATORI (*Annali* 931) lo chiama figlio d'Alberico il vecchio, e s'appoggia a LEONE OST., il quale manifestamente confonde Giovanni XI con Giovanni XII, ed Alberico il vecchio col di lui figlio Alberico II. (*Chron.* Lib. I. c. LXI). Lo SCHEIDT volle legittimare la nascita di Giovanni XI dicendo che Sergio III prima d'esser papa avesse sposato Marozia, e quindi avesse fatto divorzio: ma nè questo consentono le date, (giacchè Marozia sarebbe stata amanza di Alberico I in età già provetta), nè lo consentono le notizie che si hanno di Sergio III. Pare pertanto che Giovanni XI fosse nato dagli amori di Sergio con Marozia, e volesse essere di pochi anni maggiore del fratello Alberico. Cfr. LIUTPR. et LEON. OST. l. c. — PAGI FR. *Breviar.* T. II. p. 166. — GIACCON. *Vitae Summ. PP.* T. I. p. 264. — MURAT. *Ann.* 931. — SCHEIDT, *Origin. Guelf.* Lib. II. cap. V. § 6. T. I.

(4) « *Crimine dum tanto satagis regina videri* — *Amittis magnam Domino tu indice Romani.* » (LIUTPR. l. c. lib. III. n. 44).

Romani tennero le porte della rocca. Disgustato forse di questo, o spinto dalla barbarica sua alterigia, prese a trattar con burbanza e con dispregio i Romani. Odiava poi in ispecial maniera Alberico figliuolo di Marozia, sia che per la popolarità di che questi godeva, egli stimasse indugiata la sua coronazione imperiale, o ch'egli scorgesse in quel giovine romano un ostacolo all'esaltamento del proprio suo figlio Lottario, già da lui dichiarato collega al trono d'Italia (1).

Per la qual cosa deliberò di acciecare Alberico, e torre così davanti a se quell'impaccio (2).

Stava questi sulle difese, ma non perciò tentava ingannare il padri-gno con atti di sommissione e di rispetto. Che anzi, scrive Liutprando, che astretto un giorno a porgere ad Ugo la brocca dell'acqua per le mani, facesse non so qual cenno in di lui dispregio. Irritato il re, ripostava al figliastro una palmata sul viso. Ratto come fulmine chiamare all'armi i suoi fidi, invadere la rocca, cacciarne il re Borgognone, e imprigionando la propria madre troncava insieme la doppia tirannide di Marozia e del re Ugo, fu per Alberico un colpo solo (3).

Atterrita Roma per la non sperata vittoria, e resa dal lungo giogo sofferto incapace di reggere da per se stessa all'interna sua corruzione, acclamava nell'ebbrezza della sua gioia il felice Alberico a capo della Repubblica, innalzandolo al grado di patrizio (4). E questi sebben giovine di sedici anni, maturo di senno, e d'ereditaria ambizione, per meglio consolidare l'ottenuta potenza circondava di severa custodia il fratello pontefice, dalla cui debolezza l'imperiosa Marozia non avrebbe penato a strappare un'altra volta la perduta signoria per ridonarla al marito (5). Tratto pertanto a se tutto il maneggio delle cose civili, la-

(1) MURATORI, *An.* 934.

(2) « Cogitavit rex (Ugo) pessima, ut oculos Albericis previgni sui erueret, et romanom regnum in sua redigeret potestatis. » (*Bened. Chron.* l. c. p. 715).

(3) LIUTPRANDI *Antap.* l. c.

(4) « Romani de senatoribus suis elevaverunt in regno Albericum. » (*Fragn. Hist. Aquit.* apud PITHAEUM *Annal. et Hist. Francor.* p. 517). « Sembra da tutto questo potersi dedurre, che l'elezione in Patrizio de' Romani in mancanza dell'Imperatore, fosse inerente alla costituzione, e che però ingiustamente sia stato dato dagli scrittori (non escluso neppure il MURATORI) ad Alberico il titolo di Tiranno. » (*CARLI Ant. Ital.* P. IV. p. 73).

(5) « Missi Remensis Ecclesiae Roma redeuntes nuntiant Iohannem Papam filium Mariae, quae et Marozia dicitur, sub custodia detineri a fratre suo nomine Alberico, qui matrem quae suam Marociam clausam servabat, et Roman contra Hugonem regem tenebat. » (*FLODOARDI Chron. ad an. 932.* apud PERTZ l. c. p. 381. — MURATORI *cod. an.*).

sciava Alberico a papa Giovanni XI il solo governo delle ecclesiastiche (1).

Quest'assoluta separazione delle due podestà ottenutasi quasi inopinatamente dal giovine Alberico, e che sul finire di quel medesimo secolo, e più tardi, costò a Roma torrenti di sangue, non durò sino al fine del di lui principato. Vi si opponevano le antiche consuetudini, e le leggi costitutive di quella Repubblica, ed i diritti acquistati da' papi di partecipare col senato e col popolo il maneggio delle pubbliche cose. Cagione pertanto della non ingiusta gelosia de' pontefici, esca ne pigliavano le fazioni alle civili sommosse.

Tuttavia in que' primi tempi quel modo di podestà dittatoria, di cui era investito il nuovo patrizio, era forse indispensabile per salvar Roma, non solo finchè durarono in vita Giovanni XI e sua madre Marozia, ma dopo ancora la morte loro (2), e sotto il pontificato de' primi papi succeduti a Giovanni, tempi assai difficili per Roma, sempre agitata dalle parti, e minacciata dagli apparati di guerra del re Ugo, il quale ardeva di vendicar contr'essa l'onta della propria cacciata.

A questi mali ovviavano, col senno e colla forza il principe Alberico, colla pietà, colla prudenza e colla santità di vita i pontefici, che successivamente tennero la sede apostolica dopo la morte di Giovanni XI, e durante il dominio di quel patrizio. I quali d'accordo con esso pigliavano a moderare in Roma la rilassata disciplina del clero, a riformare i monasteri caduti in quel tempo nella più schifosa corruzione (3), mentre con messi e con lettere s'affaticavano di comporre la pace tra il re Ugo ed il principe di Roma (4).

Ma come il sagace Alberico colle sue nozze con Alda figliuola del re Ugo ebbe alquanto sedate l'ire di quel Borgognone, e liberato Roma

(1) « Vi vacuus, splendore carens, modo sacra ministrans, Fratre a Patricio iuris oio-
deramine raptio. » (FLORIANI, *De Pont. Rom.* R. I. T. III. P. II. p. 321).

(2) Papa Giovanni XI morì nel 936 (MURAT. *Ann.*); e Marozia sua madre verso il 936 (SCHEIDTUS in *Orig. Guelf.* T. I. Lib. II. C. V. § 9).

(3) *Chron. Farf. Mon.* Lib. II. R. I. T. II. P. II. p. 469.

(4) Questi pontefici furono: Leone VII 936.

Stefano VIII 939.

Marino II 942.

Agapito II 946. (Vedi MURAT. et MABILL. *Ann. ad annos.*

— *Acta SS. O. S. B. T. IX.* — *Vita S. Odilonis Cluniac. Abb.* Lib. II. — *Chron. Farf. Mrii* l. c. — *Bened. Chron.* ap. PERTZ l. c. n. 35. p. 716.

dalle minacce di una guerra disastrosa, volenterosamente rinunciava una parte del proprio potere in favore del papa. Tale rinuncia, della quale non si può con precisione determinare la data, sebbene sia dimostrata dal fatto, non fu al certo prima della morte di Marino II: un testo del solito cronista ce ne fa sicuri (1). Ma non per questo rimane dubbia: essa viene dimostrata dal confronto di due medaglie argentee coniate in quegli anni.

Queste medaglie esistevano nel museo Marescotti di Roma, e si vedono pubblicate dall'Argelati fra le *monete d'Italia*, e dallo Scheidio nelle sue *Origini guelfiche* (2).

La prima di esse tiene scritto in giro ALBERICVS, e da una delle faccie ed in mezzo, cinque lettere disposte in modo di croce, che for-

mano il monogramma PATRICIVS, così: $\begin{matrix} P \\ \triangle \\ A \\ \square \\ V \end{matrix}$ S (3). Dall'altra parte

questa moneta reca un'effigie, creduta quella di Alberico (4), ornata del solo scettro cruciato, colla leggenda in giro di SC S. PETRVS. La seconda moneta tiene invece da uno de' lati le quattro lettere A, L, B, R che formano il monogramma ALBERICVS, e d'intorno SC S. PETRVS: dall'altro lato l'immagine di papa Agapito (5) insignita dello scettro cruciato e delle sacre chiavi, e d'intorno in giro AGAPITVS · PA.

Dal confronto di queste due monete parmi non si possa trarre altra conclusione se non se, che la prima coll'effigie d'Alberico, e mancante delle sacre chiavi e del nome del papa, fu coniata nel tempo in cui Alberico teneva in mano sua ogni civile podestà: e che la seconda, la quale col nome e coll'immagine di quel pontefice, porta pure l'uno e l'altro di que' distintivi, cioè lo scettro cruciato e le sacre chiavi, fu battuta

(1) « Albericus princeps omnium Romanorum vultum nitentem sicut pater eius, grandævus virtus » eius. Erat enim terribilis nimis, et aggrabaturn est iugum super Romanos, et in sancte sedis apostolice. Elecius Marius papa, non audebat attingere aliquis extra iussio Alberici principis (Bened. Chron. n.º 32 p. 716).

(2) ARGELATI, *De monetis Italiae varior. Illustr. Virorum. Dissert.* P. I. p. 1. — SCHEIDT *Orig. Guelficae*, T. I. Lib. II. Capit. V. § 7 et 8.

(3) Lo SCHEIDT l. c. ed il CARLI (*Antich. Ital.* P. IV. p. 71) leggono pure la parola PATRICIVS, come formata da quelle cinque lettere.

(4) VITALI, *Storia diplomat. de' Senat. di Roma*, T. I. p. 21.

(5) KOELERI, *Delic. Numismat.* T. III. p. 327, in VITALI op. cit. p. 21.

dopo l'anno 946, primo di papa Agapito II, tempo nel quale una porzione del reggimento della Repubblica era stato da Alberico ceduto o restituito a quel pontefice (1).

Dopo un glorioso dominio di oltre vent'anni, cessava Alberico nel 954 il patriziato e la vita (2), spento forse da secreto veleno.

Perciocchè alla vita agitata ed operosa, per cui Roma era stata salva dal furor delle parti, e dalle vendette di un nemico potente ed offeso (3), non venne meno la ricompensa del tradimento. Ordinasi in Roma una vasta congiura per ammazzare il patrizio, nella quale pigliavano parte non solo molti fra i principali romani, ma le stesse di lui sorelle (4). Se non che allo appressarsi del giorno stabilito per ucciderlo, una di esse assalita da rimorsi, non potè reggere alla passione d'animo che l'angosciava. Pentita, palesava al patrizio qual turbine gli sovrastasse: e così sciordinando a lui tutto l'ordine del tradimento, faceva salvo in quel punto il fratello. I congiurati furono puniti, secondo la barbarie del tempo, con flagelli, col carcere o colla morte (5).

Scampato in tal guisa, volgeva Alberico l'animo suo a preparare una quasi regale accoglienza alla greca sposa, ch'egli aveva dapprima mandato a patteggiare in corte d'Oriente. Perciocchè o già in quell'anno era passata di vita Alda sua moglie, figliuola d'Ugo re d'Italia: ovvero,

(1) Del buon aceordo di papa Agapito col principe Alberico vedi la testimonianza in *Vita Iohannis Gorziensis Coenobii Abb.* cap. 53, ap. PERTZ *M. G. H. T.* VI. p. 352.

(2) « Anno 954 Albericus Princeps Romae obiit. » (*Chron. Farf. in Proleg.* l. c.).

(3) « Ad Albericum principem vertamur articulum, et qualiter a regibus terre Langobardorum seu Trasalpinae nullus robore suis temporibus in Romanis finibus non sunt ingressi. » (*Bened. Chron.* n. 34. l. c.).

(4) « Romani secundum consuetudinem malignam consiliauerunt ut principem occiderent » Abbat gloriosus princeps sororibus senatrices, clamide (clam inde) inter se de morte fratris sui tractantes. » (*Bened. Monach. Chron.* § 34. l. c. p. 717). Da una donazione dell'anno 945 fatta dalla famiglia Maroziana al monastero de' Ss. Andrea e Gregorio sul Clivo di Sauro, sembra che una sola fosse la sorella carnale di Alberico, per nome Berta. Egli aveva bensì due sorelle cugine, Stefanina o Marozia, nate da Teodora sorella della vecchia Marozia; queste pure sono nominate in tal donazione, e di esse avisò per avventura di far cenno il cronista. (Vedi in *Marini Papiri Diplomat.* i documenti XXVIII. p. 39, o C. p. 153).

(5) « Tuac unam ex illis derelicto consilio, quasi dolens ardore cordis sui, intimavit principi germano suo que et qualiter turbidinem acciderent in eum. Qui mox princeps Albericus ap- » prensis super et scriptis episcopis, et alii ceteris gladiatores, alii berberati, aliis gladiati, alii in carcerem retrusi. » (*Bened. Chron. ibid.*).

se fidiam nel cronista, costei era stata non moglie, ma concubina del patrizio Alberico (1).

Chechè ne sia di ciò, ad onoranza della regal fidanzata allestiva egli nel suo palazzo un nobil cortèo delle più vaghe fralle dame di Roma e della Sabina: e di queste quasi ancelle preposte alla sua casa, nel dì delle sue nozze, ed alla presenza de' greci ambasciatori, presentar disegnava l'imperiale fanciulla (2).

Ma non giunse per esso il giorno aspettato; quanto non aveano ottenuto i pugnali de' congiurati, l'ottenne (ben si può credere) il veleno. Sorpreso in età verde e robusta da lento morbo, cominciò inaspettatamente a venir meno. Sentitosi morire, convocava con messi gli Ottimati della Repubblica nella basilica vaticana: colà presso la Confessione di S. Pietro riceveva da essi il giuramento che Ottaviano suo figlio, dopo la morte di papa Agapito, verrebbe eletto pontefice; provveduta quindi di largo premio la sorella sua liberatrice, rendeva l'anima a Dio (3).

Tale è la narrazione, che ci lasciò il cronista del Soratte sovra gli ultimi fatti del patrizio Alberico, della quale io non vorrò entrare in ogni sua parte mallevadore. Tuttavia osserveremo siccome di molto pregio sono degne le parole di lui, testimonio oculare delle cose ch'ei narra: parole non confermate in tutto, egli è il vero, ma neppure contraddette da verun altro storico. Al postutto utili e curiosi riesciranno pur sempre i cenni ch'egli ci addita sovra gli usi ed i costumi di quell'età tanto scura, e più travisata, perciocchè partendo essi da uno scrittore

(1) L'ira di parte che rodeva il cronista del Soratte contro Giovanai XII, e l'ossequenza sua per gli Ottoni, lo spinsero a questa improbabile accusa contro Alda, non appoggiata, ed anzi contraddetta dal mordace LIUTPRANDO.

(2) « Genuit autem ex his (cioè del casato de' re Longobardi) principem ex concubinam filium, » imposuit eis nomen Octavianus (che fu poi papa Giovanni XII). Consilio emit (inuit) Albericus » principes, ut de sanguine Grecorum Imperatorum sibi uxore sociandam. Transmissus Benedictus » Campaniam a Constantinopolim ut perficeret omnia post hec cogitavit ut de nobiles » Romane pulcherrime femine in ancillis potestatem domui sue preesset, ut coinge sue Grecorum » genere in aspectibus Grecorum in nuptialis diebus donaria concedere; et sic adimpletum est. Non » tantum de hurbis Rome sed etiam de Savinensis. » (*Bened. Chron. ibid.*).

(3) « Verumtamen ad thalamum nuptiis non pervenit Posthaec non multum tempus gloriosus princeps languescere cepit. Qui festinus ad ecclesiam principis apostolorum devenit, nuntius transmissos per cunctos Romanos nobiles ad se venire fecit; et omnes promiserunt fide per sacramentum, ut Octavianus filium suum post mortem Agapiti pape, Octavianus papa eligerent. » Ordinate germane sue causa, et Octavianii filii sui, infra confessione beati Petri apostoli, vita finivit. » (*Bened. Chron. ibid.*).

zotico e di nessuna immaginativa, quale c' si mostra in quel suo scellerato modo di scritto, potremo avvisare fossero la schietta e semplice esposizione di quanto egli stesso vedeva od udiva praticarsi a' suoi tempi.

Morto appena Alberico, il di lui figlio Ottaviano, sebben chierico, pigliava a reggere la Repubblica col titolo di patrizio: quindi poi passato di vita Agapito II, veniva innalzato da' Romani al sommo pontificato (1). In tal guisa ottenne Ottaviano di riunire in se solo l'autorità civile e l'autorità ecclesiastica, scopo delle mire di que' papi, ma che in quel punto riuscì fatale a lui stesso ed a Roma. Prese il nuovo pontefice il nome di Giovanni XII: e credesi ch' egli primo introducesse l'uso presso i papi di cambiare il nome, usando nella qualità di pontefice il nome di Giovanni, ed in quella di patrizio e di senatore ritenendo l'altro di Ottaviano (2).

Ma ben diverso come principe dal *Glorioso Alberico* (3), e come pontefice dagl' immediati suoi precessori, non pendè Giovanni a rendersi esoso a' Romani, ed a' popoli vicini. Giovine e superbo, travolto nella più pazza dissolutezza (4), ben lungi dall' imitar la prudenza di papa Agapito, il quale rifiutava nel 932 ad Ottone I re di Germania l'ingresso in Roma (5), facevasi Giovanni capo della congiura de' principi italiani contro il re Berengario II, e mandava anzi invitando lo stesso Ottone già fattosi re d'Italia, a ricevere in Roma la corona imperiale (6).

E sì ne fu egli remunerato a misura del merito: chè Ottone l'anno dopo d'essere stato da lui coronato imperatore de' Romani (964), lo faceva condannare e deporre da un suo concilio adunato in Roma, ed in sua vece faceva eleggere Leone VIII, antipapa (7).

(1) « Alberico Patricio Romanorum defuncto, filius eius Octavianus, cum esset Clericus Principum patrum (*Patriciatum*, così la variante) adeptus est, quique postea defuncto Agapito, successore sibi Romanis, Papa Urbis efficitur. » (*FLODOARDI Chron. ad an. 954. ap. PERTZ, T. V. p. 403*). — CARLI, *Ant. Ital. P. IV. p. 74*.

(2) MURATORI *an. 954*.

(3) *Gloriosus Princeps* viene pure appellato Alberico dal cronista di FARFA. (*Lib. II. p. 469 l. c.*).

(4) LIUTPR. *Hist. Ottonis* apud PERTZ T. V. p. 340 § 4. — « Factus est (Octavianus) tam lubricus sui corporis, et tam audaces etc. » (*Bened. Chron. n.º 35 l. c.*).

(5) « Anno 952 Otto rex legationem pro susceptione sui Romam dirigit, qua non obtenta etc » (*FLODOARDI Annal. ap. PERTZ T. cit. p. 401*).

(6) LIUTPR. *Hist. Ottonis* l. c. p. 340. — PAGI Fr. *Breviarium Gest. Rom. Pont. T. II. p. 178* — MURATORI, *an. 960*.

(7) LIUTPR. l. c. — MURATORI *ad an.*

CAPITOLO VI.

CONTINUAZIONE DELLO STESSO ARGOMENTO.

FATTI DI ROMA SUL FINIRE DEL SECOLO X

La chiamata di Ottone I re di Germania al trono imperiale portò sulla sede apostolica una serie di papi tedeschi di patria e di parte, cagione di nuove turbolenze in Roma, di nuovo zelo alle fazioni, argomento di ambizione negli uni, e di resistenza negli altri, di nuove inimicizie tra i Romani ed i papi, e quindi di sommosse e di torrenti di sangue.

Special cagione di queste inimicizie era il temporale dominio di cui per le antiche donazioni de' Franchi, e per le recenti di Ottone I, i papi pretendevano il possesso. Nella qual lite il diritto non istava in modo assoluto, nè per l'una nè per l'altra parte (1), avvegnachè da' fatti che abbiamo accennati nel Capitolo precedente apparisca, che se per antico uso, o per elezione del popolo, e per le vecchie e recenti donazioni una gran parte della suprema autorità era da lungo tempo venuta nelle mani de' papi, altra parte del pubblico reggimento non cessava per vecchio diritto di essere in quelle del senato e de' comizi.

Queste donazioni di cui fu largo Ottone verso il Capo della Chiesa Romana, non portavano frutto più vantaggioso all'autorità imperiale (2), che non ne avessero recato alla regia sua autorità le *esenzioni* concesse a' Capi del clero nell'Italia superiore, per deprimere l'insolente prepotenza de' conti. Noi già vedemmo siccome frenati i principi nel reame

(1) CARLI, *Antich. Ital.* P. III. Lib. III, p. 242.

(2) « Quod in saeculo X regimen trium Ottonum Imperatorum attinet, falluntur egregie qui » (cum LAYRIZIO Lib. II *de papst-trenis* cap. 3. § 8 seq. et aliis scriptorib.) arbitrantur, hos imperatores intra regni egregie contra Papas vindicasse Ditatio Pontificum et Episcoporum » sub Ottonibus, et quod Episcopi, qui haecenus ad officia aulica, et dignitates saeculares admissi fuerant, integris territoriis, et quidem eminentiore dignitate uterentur, maximum detrimentum attulit iuribus regis, et potestatem Episcopalem (ae per consequentiam Papalem) » iamdiu regiae aemulam imprudenter auxit. » (*Hist. Contentionis inter Imperium et Sacerdotium, in usum Auditorii Thomassiani.* Halae 1722. p. 50. cap. VI.).

d'Italia il risorgimento del popolo ponesse su quelle stesse *esenzioni* le sue radici (1).

Ma in Roma le condizioni nelle quali trovavansi gli ottimati ed il popolo, essendo al tutto diverse da quelle in cui le stesse due generazioni di persone erano poste nelle provincie dell'Italia superiore, l'arricchimento del clero servì ad oppressarvi il popolo, a suscitarvi scismi e antipapi, a maturarvi i semi della guerra tra il sacerdozio e l'impero, e alla fine a disfarvi quello stato popolare, che dopo l'abbandono di Leone Isauro imperatore de' Greci, i Romani sotto gli auspici di Gregorio II avevano fondato (2).

Se non che d'onde nascevano codesti mali, volle Dio s'avesse pur argomento una nuova sorgente di beni; posciachè col raffermarsi della potenza papale in Italia essendosi infievolita l'autorità degl'imperatori tedeschi, s'andò spianando la via alla libertà italiana, della quale i successivi pontefici si fecero i promotori, e ch'essi col farsi capi della lega italiana, quindi a due secoli conquistarono sul potente Federigo I.

Ma nel secolo di cui trattiamo la popolazione romana amava la potenza corruttrice degli ottimati, la quale mentre coll'oro a suo talento la reggeva, destramente a un tempo lasciava ad essa il maneggiarsi ne' comizi per le elezioni de' magistrati: dove i nomi di prefetti, di tribuni, di consoli, che intorno suonavano, illudevano i Romani, che parte dell'antica potenza di nuovo regnasse col popolo nel foro di Roma.

Certo non era libertà codesta, nè di libertà vera erano capaci i guasti Romani!

Tuttavia disavvezzi dopo la morte dell'Augusto Berengario (924) dal dominio imperiale, abborrivano quello di Ottone, principe forestiero, dal quale era stato vituperato, confinato e deposto Benedetto V, santo e legittimo pontefice (3), eletto dal clero e dal popolo dopo la morte di Giovanni XII, ed intruso Leone antipapa (4). Tristo e pessimo esempio era questo dato da Ottone a' Romani, e che essi non penarono a seguire.

(1) Vedi i Capitoli I e II di questi Studi.

(2) Vedi il Capitolo precedente.

(3.) Vedi PAGI, *Franc. Breviar. de Bened. IV. n. III. T. II. p. 181.* — « Romanorum praepotens » Imperator Aug. (Otto I) valentior sibi in Christo Dominum Apostolicum, nomine Benedicti etiam, quem nullus absque Deo iudicare potuit, iniuste, ut spero, accusatum deponi consensit, » et quod utinam non fecisset exilio ad Hammaburgem religari precepit. » (THIETM., *Chron.* Lib. II. § 18. ap. PERTZ T. V. pag. 752).

(4) ADAM Bremensis in *Chron.* Lib. III. cap. 6. ap. BARONIUM *Ann. Eccl.* 965. n.º XI.

Morti infatti nel 965 l'antipapa in Roma, e Benedetto V esule in Amburgo, avevano i Romani col consenso imperiale eletto papa Giovanni XIII, « il quale (così da un antico cronista) con animo troppo » più superbo che non s'addiceva, avendo tosto preso a perseguire i » maggiori fra' Romani, questi si fecero in breve a lui nemici. Preso » dal prefetto e da certo Rotfredo (1) fu il papa cacciato dalla città, e » confinato sotto custodia nella Campania » (2).

Dopo dieci e più mesi d'esilio, e morto Rotfredo, i Romani temendo la vendetta di Ottone, richiamarono il pontefice (3).

Ma la vendetta imperiale non si fece lungamente attendere, bassa ed atroce. Tornato Ottone furibondo a Roma, « oltre a' consoli cacciati » dall'Italia, ed a' tribuni ammazzati col capestro, il prefetto di Roma » successore dell'altro fu posto nudo sopra un giumento, coronato di » un otre, e quindi battuto con verghe condotto a ludibrio per le vie, » e finalmente cacciato in prigione. Il cadavere poi del prefetto antico, » strappato dal sepolcro e fatto in pezzi, qua e là disperso » (4).

Così puniva Ottone in altrui un delitto simile al suo: quindi nuove cagioni dell'odio de' Romani contro di lui, e de' loro dissidii co' papi imperiali.

Questi odi e questi dissidii, irritati dal sangue, e dal dispregio nel quale il pontefice e l'imperatore tenevano i magistrati del popolo, erano

(1) Dal Continuatore d'Anastasio si ha, che Rotfredo ed il Prefetto erano una medesima persona (vedi la nota (4) in fin di pag.). Nel *Catalogo de' Papi* (ECCARDI C. H. M. Aev. T. II. col. 1639) questo Prefetto è chiamato Pietro.

(2) « Qui statim maiores Romanorum elatiore animo quam oporteret insequitur, quos in brevi » nemiceissimos et infestos potitur. Nam ab urbis praefecto, et quodam Rotfredo comprehenditur, » et urbe expulsus, in Campania custodiae mancipatur. » (*Cont. REGINONIS in Chron. ap. PISTORIUM R. G. T. I. p. 111*).

(3) « Tunc romani imperatoris incluentes adventum, Rotfredo iam mortuo a custodia qua tenebatur Ioannem Apostolicum absolunt. » (*Contin. REGIN. l. c. p. 112*). — « Donec Rotfredo » occiso, a Ioanne quodam Crescentii filio ad suam sedem restituitur. » (*Herman. CONTRACT. Chron. ap. PISTOR. T. I. p. 265*).

Questo Ioannes Crescentii filius era il famoso Crescenzio, del quale molto si tratterà in questo Capitolo, ed il suo padre detto Crescentius a cavallo marmoreo, è nominato in un placito romano dell'anno 963 (PERTZ M. G. H. T. IV. p. 312). Quanto al prenome Ioannes dato dal cronista al figlio di Crescenzio, vedasi la *cronaca Sagornina*. (Leggi qui al f.º 185 la nota (2)).

(4) « Praeter pullos Consules ex Italia, et Tribunos neratos suspendio, Praefectum ipsum qui » successerat Rotfredo, fuisse nudatum. et asino impositum, utroque redimitum ad ludibrium » circumductum fuisse, virgis coesum, carceri demum traditum. Cadaver vero Rotfredi Praefecti

confortati ancora da novella cagione, sì che alla morte di Ottone I rompevano in nuovi delitti.

Sapevano i Romani quale turpe accoglimento avesse provato in Costantinopoli Lintprando (1), legato di Ottone a Niceforo Foca imperatore, e come questi avesse rimproverato ad Ottone le stragi di Roma, e il non permettere che quella città vivesse libera e indipendente (2). Parole altrettanto fallaci nella bocca del greco imperatore, che lusinghevole pe' Romani, delle quali presso di loro non andò perduta la memoria.

Fra il sobbollire di questi sdegni, che la temenza di Ottone teneva in freno, passarono gli ultimi anni della vita di questo imperatore, i quali furono pur gli ultimi del pontefice Giovanni XIII, posciachè Ottone pochi mesi a lui sopravvisse.

Ma morto nel maggio dell'anno 973, Ottone I, la giovinezza di Ottone II, già associato dal padre all'impero (3), e le guerre rotte in Germania, confortarono le speranze di parte Spoletina, la quale negli anni precedenti s'era venuta pianamente ingrossando di tutti coloro che ardevano di sottrarre Roma dal giogo de' principi tedeschi, come i padri loro l'avevano sottratta da quello de' re borgognoni.

Capo di costoro era Crescenzio, uomo come per natali, per ricchezza e per avvenenza di persona, così pe' suoi fatti, e pel miserando suo fine famoso (4).

» e sepulchro extractum in diversa loca distractum ac dissipatum. Talia sunt passi Romani in
 » Pontificum perduelles. » (*Contin. Anastasii* ap. BARONIUM *ad ann. 966 n. II*). — « Otto Imperator Italias iterum invasit provincias, Romanque veniens, iniurias Domini Papae graviter in
 » autoribus sceleris, partim exiliis, partim patibulis, variisque poenis et abominatibus inditavit. » (*Herm. CONTR. in Chron. l. c. p. 265*). — Peggio ancora si ha dal *Contin. Reginonis* (*l. cit. p. 112.*) « Anno Dominic. J. 967. Imperator Romae natalem Domini celebravit, et excepto
 » Praefecto urbis, qui aufugerat, XIII ex maioribus Romanorum, qui authores expulsionis Domini Joannis Papae videbantur, suspendio interire iussit. »

(1) « Pridio non. iunii Constantiopolim venimus et ad contumeliam vestram (Ottonis scil.) turpiter suscepti, graviter, turpiterque sumus tractati (*Legatio LIUTPR. R. I. T. II. p. 479*).

(2) « Romanorum alios gladio, alios suspendio interemit, oculis alios privavit, exilio alios relegavit si vero amicitiam desideratis Romam liberam esse Dominus tuus permittat. » (*Legatio ut supra l. c.*).

(3) MASCOV *Comment. de Ottonibus* p. 57. — MURATORI, *ann. 973.*

(4)

« Pulcher in aspectu Dominus Crescentius et Dux,

» Inelyta progenies, quam peperit sobolem.

»

Scrive il Sigonio ch'egli avesse per patria Nomento, città della Sabina, ed Ermanno Contratto, che fosse figlio di Teodora (1); queste indicazioni fecero credere ch'egli appartenesse al casato di quelle pesime femmine già signora di Roma, tra le quali era comune il nome di Teodora (2). Conforta quest' opinione ancora, la possessione della rocca di Sant' Angelo, della quale già abbian veduto come Marozia fosse signora, e che venuta forse per eredità nelle mani di Crescenzio, prese poi il nome di rocca o torre di Crescenzio, e rimase dopo la morte di questo console in quelle di altro suo figlio, che fu prefetto di Roma, siccome vedremo (3).

Molti furono in quegli anni in Roma i Crescenzi, come si può vedere nella cronaca di Farfa, il che aggiunse confusione nel ricercare i fatti di questo console; tuttavia questo sembra doversi ammettere, cioè che il Crescenzio che vien chiamato figlio di Teodora abbia avuto per padre un altro Crescenzio detto per soprannome *Dal Cavallo Marmoreo*, e che la madre di lui fosse nipote di quell'altra Teodora sorella che fu della senatrice Marozia. Di più che questo console ebbe due mogli, Teodora la prima (4) e Stefania la seconda: questa famosa per bellezza, cagione a lei d'atroci sventure (5).

Ad ogni modo numerosa ed illustre fu nella storia del secolo XI la stirpe de' Crescenzi, ed a' tempi del cardinale Baronio ancora ne du-

» Nam fortuna suos convertit lusibus annos,

» Et dedit extremum finis habere tetrum. »

(*Ex Epitaph. Crescentii, Romae (quondam) ad portam Aureliam*; ap. BARONIUM ann. 996. n.º X).

(1) SIGONIUS *De Regno Italiae* Lib. VII. col. 458. — HERMAN. *CONTRACTI Chron.* ap. PISTORIUM l. c. p. 266. Nella Cronaca Veneta Sagornina (la quale termina al 1088) al nome di Crescenzio viene aggiunto il prenome di Giovanni, come gli attribuisce pure Ermanno Contratto: quindi poi questo prenome vedesi frequente no' discendenti del console Crescenzio presso gli storici di Roma. (*Chron. Venet. Ioanni SAGORNINO tributum*, Venet., 1765, p. 93. — HERMAN. *CONTRACT. l. c.*).

(2) Dal BARONIO si ricordano due altri Crescenzi coetanei di questo, illustri amendue, uno de' quali in una vecchia sua epigrafe sepolcrale vien detto: « Ioanne patre Theodoraque matre » nitesceas. » Per questo quell'annalista suppose pure fosse figlio di Teodora e di papa Giovanni X. (*Ann. Eccl. l. c.*).

(3) Nel 1262 il Castel Sant'Angelo ancora appellavasi: *Castellum Crescentii* (MABILL. *Musaei Ital. T. II. Ordo roman. XII.* p. 215).

(4) « Item praedictus Octavianus (fil. Ioseph), et Rogata uxor eius pro anima Crescentii genitoris eius et Theodora genitricis Rogatae et Ioannis Patricii Romanorum, germani illius etc. » (*Chron. Farf. Lib. II. l. c. col. 516*).

(5) *Vita Meinwerii Episc.* apud LEIBNITZ R. B. T. I. Cap. X. p. 521.

rava in Roma la famiglia (1), dalla quale venne di poi quella de' Gac-tani (2).

Ma la storia di queste rivoluzioni di Roma negli ultimi anni del secolo X, delle quali fu gran parte Crescenzio, è tuttavia poco chiara. Il modo conciso e riservato con cui tali fatti furono, più che narrati, accennati dagli scrittori contemporanei, sia che per ispirito di parte, per timore, o che per solito andazzo, i cronisti in tal guisa scrivessero, lasciò il campo libero alle interpretazioni. E sì dacchè fu consolidata la pontificia potenza, gli scrittori romani da un lato, e gli scrittori oppo-nenti dall'altro, falsarono ed oscurarono la verità.

Senza essere presuntuoso d'arrivarla, penso ch'unico mezzo di meno stranare da quella, debb'essere un novello studio, ed un paragone sincero degli antichi scrittori, i quali in mezzo allo spirito di setta, e colle accennate reticenze, pur ei dipinsero gli nomini de' tempi loro, vestiti delle passioni di quell'età, e non travisati con quelle de' tempi da essi lontani, che inconsideratamente furono loro attribuite da' moderni.

Colla scorta pertanto di quegli scrittori, testimoni quasi oculari, di quell'età, e coll'aiuto de' nostri critici io verrò di volo investigando co-desti fatti, degni per se stessi di essere conosciuti, perchè al dir del Sigonio (3), forieri di quelli che prepararono la libertà italiana, e perchè, già l'osservammo, per la prossimità degli anni entrano nel pe-riodo di tempo propostomi per argomento di questi Studi.

Ripiglio la narrazione.

Era a Giovanni XIII, morto nel 972, succeduto tre mesi dopo, papa Benedetto VI (4) romano, e di fazione Tuscolana, come solevano essere i pontefici eletti sotto l'influenza imperiale, e come ben si può argomen-tare pur fosse Benedetto, dall'approvazione che il vecchio Ottone, presso a morte, dava alla sua nomina. Poco durò questo infelice pontefice.

Scorsi alcuni mesi dopo la morte di Ottone, narra un antico cronista che « Benedetto papa, accusato da' Romani e da Crescenzio figlio di » Teodora, sostenuto prigione in Castel Sant' Angelo, ivi vien strango-

(1) BARONIO l. c.

(2) CRESCIMBENI, *Dell' Istoria di Santa Maria in Cosmedin*. Lib. V. c. 3. p. 219

(3) SIGONIUS, *De Regno Italiae*, Lib. VII. col. 449 A.

(4) MIRATORI *ad aa.* 972. — PAGI, *Critica ad au*

» lato: e lui vivente, Bonifacio figlio di Ferruccio (detto Francone),
» ordinato papa » (1).

Qui fra gli accusatori di papa Benedetto comparisce per la prima volta quel Crescenzio testè da noi nominato, senza che si conosca nè quali si fossero le querele de' Romani contro di quel pontefice, nè se la morte sua fosse opera di Crescenzio.

Tolommeo da Lucca nella sua *Storia Ecclesiastica* dice apertamente, che Benedetto fu strangolato per comando di Crescenzio, e che la cagione ne dovette essere o di punire la di lui tirannide, o di trarre vendetta di una qualche privata inginria. Ma questo scrittore del XIV secolo non è tale da meritare fede alla cieca per le cose lontane da' suoi tempi (2).

Tuttavia quanto a quello di che poteva essere stato accagionato Benedetto, forse egli in parte s'appose. Probabilmente quella stessa impazienza di signoria che viene rimproverata da uno scrittore di quell'età a Giovanni XIII, animava pur anche Benedetto IV (3), e per questo fu da' Romani di parte Spoletina incriminato, e sostenuto in Castel Sant'Angelo.

Delle private ingiurie nessuno scrittore non fa parola (4).

Anche Amalrico, uno de' biografi pontificii, accusa Crescenzio della morte di quel papa (5); Amalrico visse assai lontano da que' tempi (6). All'incontro Pandolfo Pisano, il quale fiorì verso il 1118 (7), l'autore

(1) « Anno 974 Romae Benedictus Papa a Romanis eriminatus, et Crescentio, Theodora filio, in Castello Sancti Angeli custodia mancipatus, ibique strangulatur, et eo vivente, Bonifacius Ferrutii filius, Papa ordinatur. » (Herm. CONTRAT. ap. PISTOR. T. I. p. 266).

(2) PROLOM. Lucensis, *Hist. Eccl. Lib. XVIII. cap. 25. R. I. T. XI. col. 1012.* — MURATORI *ibid. in Praefat. p. 745.*

(3) Vedi la nota (2) alla pag. 183.

(4) Lo storico LEO (Liv. IV. ch. II. p. 198) dice che un odio privato di famiglia mosse Crescenzio contro Benedetto VI. Se l'asserzione sua non poggia sovra un qualche altro scrittore ch'io non conosco, la testimonianza di Tolomeo da Lucca non mi par bastante per porvi fede.

(5) « Deinde Benedictus ipse de mandato Cencii Theodora filius, violenter fuit ibi interfectus, atque strangulatus. » (AMALRICUS Augerius in *Vita Bened. VI.* ap. MURATORI R. I. T. III. P. II col. 332). Nel testo d'AMALRICO pubblicato dall'ECCARNO, *Corp. Hist. M. Aev. T. II. col. 1718* leggesi la variante che segue: « Deinde Benedictus ipse de mandato Theodorici filii sui violenter fuit interfectus etc. ».

(6) Secondo il MURATORI questo scrittore del secolo XIV non merita fede nelle cose che riguardano i pontefici anteriori ad Innocenzo III (1193.) (R. I. T. III. P. II. in *Praefat. p. 1*

(7) *Vitae Rom. Pont. R. I. T. III. P. II. p. 274 tergo.*

del *Catalogo de' Papi*, che condusse il suo lavoro sino all'anno 1045 incirca (1), e Gerberto, che fu poi papa col nome di Silvestro II nel 999 (2), tutti e tre anteriori di molto ad Amalrico, scrivono che quel pontefice fu ammazzato per opera di Bonifazio antipapa (3). Altronde parmi che venga assoluto Crescenzo da questo enorme assassinio, dal vedersi che, citato al placito tenutosi poi da Ottone III imperatore in Roma nel 996 per render ragione de' suoi portamenti verso Giovanni XV, non ebbe egli a purgarsi di tale accusazione (4).

Ma in breve si stancarono i Romani de' delitti dell'insurgente Bonifacio.

Era in quel tempo in Roma un nobile cittadino per nome Benedetto (5), figliuolo di Davide, nipote o discendente del glorioso principe Alberico, nella cui famiglia era passato il comitato di Tuscolo (6). Potentissimo perciò Benedetto, il quale alla testa della fazione imperiale non lasciò posa allo scellerato Bonifazio finchè non l'ebbe cacciato in fuga (7). Abbandonava egli infatti Roma e l'Italia dopo un mese, ma non senza aver prima spogliato la basilica vaticana de' suoi tesori, co' quali trafugavasi in Costantinopoli (8). Immediatamente dopo seguì l'elezione di Dono II di parte Tuscolana (9), e quindi nel 975, quella

(1) ECCARD. in *Monit. T. II. op. cit. n. XI.*

(2) « Succedit Romae in Pontificatu, horrendum monstrum Bonifacius, cunctos mortales nequitia » superans, etiam prioris Pontificis sanguine cruentus. » (GERBERTI, *Acta Concilii Remensis* ap. PERTZ *Mon. G. II. T. V. n. 28. p. 672*). S'avvertisca che qui Gerberto parla di papa Giovanni XIV pure ammazzato da Bonifazio, e che per ciò quelle parole « prioris Pontificis » si riferiscono a Benedetto VI. — Vedi la nota (1) alla pag. 191.

(3) « Benedictus VI... comprehensus est a quodam Cencio, Theodora filio, et in Castellum » Sancti Angeli reclusus, ibique strangulatus propter Bonifacium Diaconum, quem miserunt vi- » rente eo Papa. » (*Ex Cod. Vatic. auctore, ut creditur, PANDULPHO Pisano, apud MURATORI. R. I. T. III. P. II. p. 332*). « Ioannes II (corr. Benedictus VI) natione Romanus ex patre Hildebrando, » sedit an. 1 m. 6, et de consilio Malifacii (pro Bonifacii) strangulatus est in Castella Sancti » Angeli. » (*Ex Catalog. Papar. ap. ECCARD. l. c. col. 1640*).

(4) Annalista Saxo. ap. ECCARD. op. cit. T. I. col. 363.

(5) *Ex Catalog. Paparum* ap. ECCARD. T. II. l. c.

(6) VITALI, *Stor. Diplom. de' Senatori di Roma*, P. I. p. 23 presso SISMONDI, *Histoire des Républiques Italiennes* T. I. Chap. III. p. 158.

(7) « Hic primus repulit Francanis spurca superbi » Culmina, qui invasit Sedes Apostolicæ. »

(8) In *Epitaph. Bened. VII* ap. BARONIUM *ad an. 984*.

(9) BARON. *Ann. Eccl. 975*, n. 1.

(9) MARIANO SCOTO in *Chron.* ap. PISTORIUM T. I. p. 647. — GOTEFR. *Viterb. in Chron.* apud PISTORIUM T. II. p. 373. — WERNER. *ROLLEWINK in Fascic. Temp. ibid.* p. 535. — PACIUS *Fr. in Breviar. T. II. p. 194.* — In una cronaca ms. (copia) da me veduta nella biblioteca dell'Istituto in Parigi (segnata 198 4.^o), il cui titolo è: « *Chronic. sive Hist. rerum notabil. Romae, scripta*

del medesimo Benedetto, che fu il settimo del suo nome (1). S'ingannò pertanto il Sigonio nello scrivere, che dopo la morte di Benedetto VI i Romani a loro talento presero ad eleggere i pontefici senza curarsi dell'approvazione imperiale (2). La cosa fu anzi all'opposto. Avvegnachè dopo la morte di Dono, Ottone II non avendo potuto vincere la ripugnanza di S. Maiolo abbate di Cluni, ch'egli desiderava far papa (3), mandò pe' suoi messi dicendo a' Romani, fosse eletto un papa di parte Tuscolana (4): quindi eleggevasi Benedetto VII. Che anzi il Sigonio contraddice a se stesso, confessando poche linee dopo, che questo pontefice sorretto dalla esterna potenza di Ottone, e da quella della domestica fazione, col cacciare di molti tra gli avversari in prigione, tenne in freno il tumulto, che oggimai minacciava (5).

Converremo ciò non ostante con questo scrittore nel dire, che Crescenzo dimostrò maggior animo che consiglio nello spingere i Romani dopo la morte di Ottone il vecchio, a conquistare la libertà. Facil cosa era l'antivedere che la memoria del sangue sparso a' tempi di Giovanni XIII avrebbe fatto rinviare i Romani in maggiori delitti, e coll'irritar gli odi, rin vigorito la fazione imperiale, avvezza da lungo tempo a soprusi ed al potere, e certa alla fine dell'aiuto dell'imperatore novello. Difficile o impossibile l'intento.

Ma gli stimoli dell'ambizione, la nobiltà dello scopo, e lo stesso modo di vita fortunosa di un Grande Romano, non lasciavano in Crescenzo luogo a consiglio. Signore assoluto nel suo palazzo, che muniavano torri e propugnacoli, circondato da un folto stuolo di clienti e di schiavi, l'ottimate romano soleva passar per diletto da' tripudii delle cene, delle caccie, delle lascivie, al guerreggiare fazioso su per i trivii

» per Io. Petrum Scriniarium et Not. publ.; hoc an. Domini MCCCCL inchoata etc. », leggesi:

« Matthaei nobiles et illustres sunt, qui etiam dicuntur Papenses, sive Paparesci, et nobiles

» Romani, qui habitabant in regione Transiberina: et ex istorum familia sunt: Papa Donus II,

» et Papa Innocens II.

(1) PAGIUS Ant. in *Critica ad an. 975.* — MURATORI *ad an.*

(2) « Romani neglecti proximo Leonis decreto, Pontifices, quos libido tulit rursus sine Impe-

» ratoris auctoritate creaverunt. » (*De Regno Ital.* Lib. VII. col. 449).

(3) SYRUS in *Vita Sancti Maioli Abb. Cluniae.* Lib. III. cap. 8. apud MABILL. *Acta SS. O. S. B.* Sacc. V. T. IX. p. 803.

(4) PAGI in *Critic.* — BARON. *ad an. 975.* n. III.

(5) SIGONIUS, l. c.

e per le piazze di Roma, dove, più che l'arte e la prudenza, la frode, la rabbia ed il numero de' combattenti decidevano le liti cittadine (1).

Spinto da queste passioni era il potente Crescenzo entrato nella difficile impresa: ma vinto dalla fazione contraria, cedeva per allora alla maggior forza; e sia che egli esulasse da Roma, o riparasse nella sua fortezza di Sant'Angelo, nessuno scrittore non fa più parola di lui fino a' tempi di papa Giovanni XV (985-996).

Nell'anno 983 a Benedetto VII succedeva Giovanni XIV, già detto Pietro, vescovo di Pavia ed arcicancelliere di Ottone II (2): celebrata in quell'anno la solenne dieta di Verona (3), l'imperatore venne a Roma e vi collocò lui stesso con gran pompa il nuovo pontefice sulla sede papale (4).

Pochi giorni dopo passava Ottone II di vita. Come la notizia di tal morte e di quella di papa Benedetto VII, fu giunta in Costantinopoli, Bonifacio antipapa, colà fin dal 994 riparato, s'affrettava per a Roma.

Quivi coll'oro derubato in S. Pietro rannodati gli antichi aderenti, s'impossessava dell'infelice Giovanni XIV, ch'ei faceva miseramente perire in Castel Sant'Angelo di stento o di veleno (5).

Per togliere quindi ogni speranza agli amici del papa, ne esponeva lo straziato cadavere (miserando spettacolo!) sulle mura del Castello,

(1) Liutprando vescovo di Cremona e legato di Ottone I e II a Costantinopoli fa una descrizione assai minuta del modo di vita di Giovanni XII, la quale siccome osserva il LEO (*Hist. d'Italie* Liv. III. ch. 3) dee servire di norma per giudicare quale fosse in generale la vita de' Grandi nel secolo X. (Vedi LIUTPR. *Hist. Lib. VI. R. I. T. II*).

(2) MURATORI, *Ann. 983 e 984*. — *Dipl. Ott. II. pro Muro Fulturn. Actum Capuae an. 983 II id. nov. Ind. XI. ADELBERTI Cancell. ad vicem Petri Episc. (Papiens.) et Archicancell.* ap. MURATORI R. I. T. I. P. II. p. 464.

(3) Vedi il Capitolo IV di questi Studi.

(4) « Anno 983. Imp. itaque ad Placitum Veronae etc. Posthaec Romam reversus, Apostolicum » digno cum honore Setae Rom. praefecit Eccl. His omnibus peractis spiritum astris in- » servit. » (*Chronogr. Saxo.* ap. LEIBNITZ. in *Access. Hist.* p. 196).

(5) « Romae Ioannes XIV, qui et Petrus, Papiac prius Episcopus, Papa sedet menses VIII. cum- » que Bonifacius, Verrucii f., prius relegato Benedicto, (leggo: prius relegato a Benedicto (VII), » vedi la nota (1) alla pag. 189) male ordinatus, de Constantinepoli quo fugerat, reversus » comprehendit, et in Castellum Sancti Angeli relegatum fame, et ut perhibent, toxicavit, eiusque » sedem invasit. (Herm. CONTR. in *Chron.* apud PISTOR. T. I. p. 267). Sed hic etiam fugatus, » et in magna synodo damnatus post obitum divi Ottonis Romam redit, insignem virum apostoli- » cum Petrum, Papiens. Eccl. prius antistitem, data Sacramentorum fide, ab arce urbis deiecit, » deponit, squallore carceris affectum perimit. » (GERBERTI, *Acta Concilii Remensis* l. c. n. 28 p. 672).

e così inquinato del sangue di due pontefici, invadeva una seconda volta la sedia apostolica (1).

Questi fatti accadevano nel 984, nove mesi dopo l'elezione di Giovanni XIV (2).

Ma non lungamente godette Bonifazio di questo nuovo delitto. Sul principio dell'anno seguente (3) moriva egli inopinatamente, e gli stessi suoi aderenti irritati da tante scelleraggini, sfogavano la rabbia loro contra il di lui cadavere, battendolo, trafiggendolo e trascinandolo per le vie di Roma, fino presso alla statua di Marco Aurelio; ivi l'abbandonavano insepolto (4).

Alcuni antichi cronisti fanno a Bonifacio antipapa succedere un Giovanni di Roberto (5). Ma sia che l'elezione non fosse canonica, o che egli fosse eletto soltanto e non consecrato, esso non è dalla Chiesa noverato fra i papi. Non ne fa parola il Baronio, forse perchè il codice antico de' Romani pontefici al quale si riferisce, e la cronaca d'Ermanno Contratto, dopo Bonifacio antipapa collocano immediatamente un altro Giovanni figlio di Leone prete (6). Ad ogni modo coloro che lo comprendono fra i papi, gli attribuiscono quattro soli mesi di sede, dopo i quali e prima del finire di dicembre dell'anno 985 già era stato eletto e consecrato il nuovo papa col nome di Giovanni XV (7).

Scrivè il cardinale Baronio (ma senza indicare da quali titoli lo ricavi), che sebbene dopo l'elezione di questo pontefice avessero posato i settatori di Bonifacio, un nuovo tiranno sorgeva in Roma. « Quest'era, » dic'egli, Crescenzio, il quale in quel tempo col titolo di console in- » possessavasi di Castel Sant'Angelo, e quindi pigliava ad infestare Gio- » vanni papa; questi spaventato per quello ch'era accaduto al suo pre- » decessore Giovanni XIV, riparava in Toscana, d'onde richiedeva il » giovine Ottone III d'aiuto. Ma i Romani, proseguè quell'annalista, »

(1) *Ex Vet. Cod. Romanor. Pont.* apud BARONIUM *ad an. 985. n. II.*

(2) MURATORI *Ann. 984.*

(3) MURATORI *Ann. 985.*

(4) « Et in tantum enim odio habuerunt sui, ut post mortem caederent eum et lanceis vulne- » rant etc. » (*Ex Vet. Cod. Rom. Pont.* ap. BARONIUM l. c. n. III).

(5) Marianus SCOTUS in *Chronic.* ap. PISTORIUM T. I. *ad an. 986. p. 647.* — GOTEFR. *Viterb. Chron. P. XX* ap. eumd. T. II. *p. 374.* — *Antiq. Catal. P. R.* ap. PAGI *Crit. ad an. 985.*

(6) PAGI, *Critica ad an. 985. n. II.*

(7) MURAT. *Ann. 985.*

» memori de' passati gastighi, s'affrettavano di richiamarlo in Roma, » ove onorevolmente accogliendolo gli si sottomettevano. Quindi poi la » Chiesa Romana rimaneva tranquilla. » Fin qui il Baronio (1). Questi fatti narrano pure Giovanni Stella, ed il Ciaconio, i quali li tolsero da Amalrico Augerio (2) scrittore, come si è detto, di poca fede per le cose antiche, e da un raccoglitore tedesco del secolo XV (3). Sulla fede del Baronio li riferisce il Muratori all'anno 987, il Sigonio all'anno 993, ma con manifesto errore, poichè gli atti del concilio di Reims dell'anno 991 ci mostrano Crescenzio già capo della Romana Repubblica sul cadere del 989, e sul principio dell'anno seguente (4). Del resto infiora e magnifica il Sigonio la sua narrazione, dicendo che Roma in quel tempo, anzi l'Italia tutta traeva a libertà: che per essere Crescenzio uomo d'animo altissimo e insolente del giogo degli stranieri, presso de' quali scorgeva oggimai passare, come per diritto d'eredità, la corona dell'impero Romano, ardesse non tanto di ridonare a Roma la libertà antica, quanto di conquistar per se stesso e per gl'italiani principi la dignità imperiale: che spinti a questo i Romani, e richiesto papa Giovanni d'aiuto, questi, sia che mosso da carità verso la Repubblica, o da propensione pel re germanico, a lui disdicesse: che irato perciò Crescenzio cacciasse da Roma il pontefice, ma poscia per temenza di Ottone lo richiamasse, ed a lui col senato si sottomettesse (5).

Delle quali cose alcune sono vere, ma le più contraddette da' fatti, sono altresì contrarie all'indole di que' tempi.

Certo, che in quegli anni un'aurora di vita novella sorgeva per gli Italiani. Già noi vedemmo (6) come sotto Ottone III, Milano, Cremona, Vercelli ed altre fra le maggiori città del reame d'Italia, accennassero a libertà, e parte ne andassero conquistando sovra la depressa signoria de' conti. In Roma, guasta Repubblica d'ottimati, il popolo traeva a libertà, e conquistava il servaggio. Ma il sangue versato sotto

(1) *Ann. Eccl.* 985. n. IV.

(2) AMALRICUS Aug. in *Vita Ioan. XVI (XV)* ap. MURATORI R. I. T. III. P. II. p. 334.

(3) WERNER. ROLLEWINK. in *Fascic. Tempor.* ap. PISTOR. R. G. T. II. p. 536.

(4) *Acta Concilii Remensis* ap. PERTZ *Monum. G. II.* T. V. I. c.

(5) SIGONIUS, *De Regno Italiac* Lib. VII. 458.

(6) Vedi Capitolo II di questi Studi, passim.

i tedeschi imperatori, e l'amore di parte vi avevano reso abbagliante a' più il dominio forestiero, esoso il nome d'imperatore. Difficil cosa adunque il conseguirvi da un Grande l'imperiale corona, più difficile ancora, conseguita, il conservarla da chi non avesse come gli Ottoni un'esterna forza da opporre a' greci imperatori, cui le recenti vittorie e le seguite conquiste riconfortavano a maggiori speranze. Non la dignità imperiale era perciò lo scopo a cui mirava in Roma chi perveniva al grado di patrizio e di console; usato scopo bensì e bastante per l'ambizione d'un ottimato romano, era l'affrancare la Repubblica da' forestieri, e separare dalla ecclesiastica autorità la temporale signoria di Roma, e quella lasciata al pontefice, questa ritenere e usare intera col favore del popolo. Così Alberico cacciati i Borgognoni l'avea per oltre a vent'anni (932-954) tenuta in sua mano ora con autorità dittatoria, ora con quella di patrizio e di console di tutti i Romani. A questo erano rivolti i voti de' Romani sotto i due Giovanni XII e XIII, e che a questo ancora accennasse, anzi questo ottenesse il console Crescenzo, a' tempi di Giovanni XV, l'attesta Romualdo Salernitano (1) col dire che i capi de' Romani s'appropriavano in quegli anni la signoria di Roma.

Ma se non a torto era da' Romani disdetta l'assoluta potenza a que' pontefici di parte tedesca, i quali mal sopportavano i magistrati del popolo, non a torto del pari pretendevano i Capi della Chiesa una parte di quell'autorità, che con comune vantaggio tanti egregi pontefici aveano tenuta ne' secoli trascorsi. E come non si ristavano i rettori di quella Repubblica dallo impigliarsi nelle faccende di Chiesa, od incagliando la libertà a' pontefici, o disturbando l'esercizio dell'autorità loro (2), così non consentivano di buon animo a tal divisione di potere i pontefici sorretti dall'autorità degli Augusti Tedeschi. Perenni perciò l'ire e i dissidii

Ad ogni modo, sia che papa Giovanni XV s'acconciasse della signoria

(1) « Romani Capitanei Patriciatus sibi tyrannidem vendicaverunt. » (ROMUALDO SALERN. *Chron.* T. VII. R. I ad an. DCCCCXC. pag. 161). — Il MURATORI ad. 987 dice: « Usurpavano al Papa « il dominio temporale di Roma ».

(2) « Regii ac nostri legati Romam profecti, et epistolas Pontifici porrexerunt, et ab eo indigne « suscepti sunt. Sed ut credimus, quia Crescentio nulla munuscula obtulerunt, per iradium a « palatio seclusi, nullo accepto responso redierunt. (Acta Concil. Remens. ap. BARON. *Ann.* 992 XXIV).

di Crescenzio, o che tra l'uno e l'altro seguisse un patto per cui la temporale autorità rimanesse partita tra di loro, certa cosa è che Roma sotto il dominio di quel console, e durante la massima parte di quel pontificato, stette bastantemente in pace. Lo asseriscono l'Annalista Ecclesiastico stesso, ed il Sigonio, e lo confermano la mancanza di contrarie testimonianze, e l'epigrafe sepolcrale di Crescenzio (1).

Meno certa è la ragione che amendue quegli scrittori asseguano a questa pace, cioè che dopo il ritorno di Giovanni dalla Toscana, dove (dicono essi) per le molestie dei Romani aveva riparato, questi ed il console si fossero ad esso umiliati e sottomessi. Dubbia assai è questa fuga in Toscana, che da veruno degli antichi cronisti non è attestata, e la temenza di Ottone fece probabilmente chiamar sommissione di Crescenzio il patto che passò tra esso e il pontefice.

Ma se andò errato il Sigonio nello attribuire all'ambizione di Crescenzio fini maggiori che non capivano nella mente di un Grande di Roma, di meno non si lasciarono trasportare alla loro immaginativa, due moderni nobilissimi scrittori, de' quali uno volle scorgere in quel console un Bruto novello pronto a offerire se stesso, non che i figli, in olocausto alla patria (2): l'altro un generoso cittadino cui scaldava il petto il desiderio di ricondurre in Roma i be' tempi dell'antica Repubblica (3).

Male s'accordano questi elevatissimi sensi colla taccia d'avarizia fatta a Crescenzio da due scrittori di que' tempi, taccia del rimanente assai comune ne' Grandi di quel secolo (4), e da cui non andò immune lo

(1)

« Qui tenuit totam feliciter ordine Romam,
 » His latebris tegitur pauper et exiguus.
 » Pulcher in aspectu Dominus Crescentius et Dux,
 » Inclyta progenies quam peperit sobolem.
 » Tempore sub cuius valuit Tiberinaque tellus
 » Ius ad Apostolici valde quieta stetit,
 » Sed fortuna etc.

(ap. BARONIUM ann. 996 n. X).

(2) GIBBON, *Hist. de la Décad. de l'Empire R.* T. IX. pag. 400 (édit. de GUIZOT).

(3) SISMONDI, *Hist. des Républ. Ital.* T. I. ch. 3. p. 159.

(4) « Erat enim quidam Crescentius Romanorum civis praepotens, qui (ut illorum mos est) quanto onerosior pecuniao, tantum pronius servit avaritiae. » (GLAB. Rodulphi, *Hist. Lib.* I cap. IV — *Acta Conc. Remens.* vedi nota (1) alla pag. 194).

stesso pontefice Giovanni XV (1), sebbene il Baronio s'affaticò d'assolvervelo, rigettandola intieramente sovra Crescenzo (2).

Per questa ignobile sete dell'oro, e per la maggior sete di assoluta signoria turbavasi nuovamente la pace di Roma.

Nell'anno 993, ultimo della vita di Giovanni, usciva di minorità Ottone III. Parve pertanto a quel pontefice, ed alla fazione Tuscolana propizio il tempo per richiedere Ottone d'aiuto contro i potenti Spoletini.

Per la qual cosa i legati pontifici col consenso di tutti i Romani (così il cronista d'Ildelsheim) lo venivano invitando alla coronazione imperiale (3). Scendeva difatti Ottone III nella primavera dell'anno seguente, e celebrata la festività di Pasqua in Pavia, pigliava possesso del reame d'Italia, quindi passava a porre il campo presso Ravenna (4).

Ma quivi nuovi messi de' magnati romani lo raggiugliavano della morte di papa Giovanni, chiedendo gli piacesse affrettare a Roma la sua venuta, ed intanto indicare un successore al morto pontefice.

Ottone, cui stava a petto di conseguire la corona imperiale, nè voleva perciò, che fra il cozzare delle fazioni di Roma venisse eletto un papa a lui contrario, « mandava loro Brunone cherico, suo cappellano » e congiunto (5), uomo dotto nelle secolari discipline, d'alta indole, » ma di assai fervida giovinezza. Questi perchè piacque al re, fu eletto » da' Maggiori, poi da Willigiso arcivescovo di Magonza, e dal vescovo » Adelbaldo, suo collega, condotto a Roma, dove onorevolmente accolto » da' Romani, fu dai vescovi a tal uopo deputati, promulgato pon-

(1) « Interea eximius Abbo... Romam proficiscitur sane non qualem voluit, aut qualem » debuit, Sedis Apostolicæ Pontificem nomine Ioannem invenit, nempo turpis lueri cupidum, et » in omnibus suis actibus venalem reperit. » (AIMONINUS in *Vita Sancti Abbonis Floriacensis Abb.* cap. XI. ap. DI CHESNE T. IV. p. 129) « Iste exosos habuit clericos, propter quod et clerici eum » odio habuerunt. Et merito quia omnia, quæ habere et acquirere poterat, parentibus suis distri- » buerat. » (*Ex Cod. Vatic.*, auct., ut creditur, PAND. Pisano ap. MURATORI R. I. T. III. P. II. col. 335).

(2) BARONI *ann.* 992 n. XXIV.

(3) « Legati etiam Apostolicæ Sedis cum unanimitate Romanorum atque Longobardorum, Regem » Romanum invitant. » (*Ann. Ildelsheim.* ap. LEIBN. R. B. T. I. p. 720 ad an. 993). — MASCOVIN *Comment.* p. 91.

(4) *Chronogr. Saxo.* in *Access. Hist.* LEIBNITH *ad an.* 996. p. 205.

(5) Era Brunone figlio di Ottone, duca della Carinzia e marchese di Verona, e di Luitgarde figlia di Ottone I imperatore. (V. lo *Stemma* di GREG. V in MURATORI *A. M. Acc.* Dissert. XII. col. 741).

« felice » (1). Quindi circa un mese dopo, Ottone entrato con regio apparato in Roma, ricevette dal nuovo papa, detto Gregorio V, la corona imperiale (2).

Questa coronazione di due principi germanici non gradì per certo a tutti i Romani (3), e sebbene gli scrittori tedeschi parlino di comune giubilo e di universale concordia (4), la cosa dovette andare molto altrimenti, poichè ruppe fra breve in aperto scisma.

Imperocchè conviene avvertire, che i cronisti di quel tempo per lo più Tedeschi o di patria o di parte, in questi oscuri fatti di Roma attribuiscono all'universalità de' Romani quello che era soltanto opinione o fatto di parte Tuscolana. Così in quest' elezione di Gregorio V narrano ch'egli fu nominato unanimamente non solo da' voti del clero, ma ancora da quelli del popolo, da' quali conviene dedurre per certo i voti de' molti aderenti di Crescenzio, mentre all'opposto il Sigonio afferma, che Ottone di propria autorità fece crear papa Brunone suo congiunto, ed anzi sto per dire senza in qualche modo l'elezione, che poi seguì, di Giovanni Filagato, dicendo che Gregorio V veniva accusato da' Romani d'essere stato eletto dal solo Ottone senza il consenso del popolo (5).

Certamente non lasciano dubbio sovra la validità dell'elezione di Gregorio le tante testimonianze degli storici, de' quali al tempo del Sigonio, in parte almeno, stavano l'opere sepolte, e la testimonianza della Chiesa cattolica, la quale a quel modo che non ebbe per canonica l'elezione

(1) « Hunc quia regi placuit a Maioribus electum, Maguntinus Archiepiscopus Willigitus et » suus collega Adelbaldus Episcopus adduxerunt Romam. Proinde a Romanis honorifice acceptum » etc. » (*Vita S. Adalberti Rag. Ep. apud PAGIUM Critica an. 996. n. 3*).

(2) MURATORI *ad an. 996*.

(3) « Quam disparem tum fuisso animorum habitum credibile est, spectantium Germanum Principem a Papa Germano, et necessitudine coniuncto, augustalibus insignibus exornari? Nam ut » multi qui bene Caesari cuperent, eo firmitorem fore Principatum ominati fuerint, non dubito » alios, e Romanis maxime doluisse, amisso dudum imperio, iam et sacerdotii apicem ad Trans- » alpinos deferri. » (*MASCOVII Comment. de Otton. III. p. 93*).

(4) « Rex in Italia iam positus, rumore incitatus, praemisissis quibusdam Principibus, publico con- » sensu et electione fecit ordinari Apostolicum suum nepotem Brunonem, Ottonis filium, qui » Marchiam Veronens. servabat, imposito nomine Gregorii. » (*Annal. Saxo. ap. ECCARD. T. I. ad an. 996*). « Nepotem suum Brunonem virum valde praeclarum non solum Cleri, sed et omnium » Romanorum unanimi voto civium, Pontificem electum subrogari pio consensit. » (*Chron. Saxo. ap. LEIBNITZ l. c. p. 293*).

(5) « Otto usurpato iure, Brunonem Saxonem propinquum suum, Pontificem declaravit » (*De Regno Italiae Lib. VII. col. 460*). « Credo Gregorium criminati, quod ab uno Ottone sine populi » suffragiis esset intrusus, nec liberis sane comitiis designatus. » (*Ibid. col. 464*).

di Leone VIII, opposto da Ottone I a Giovanni XII, e quindi a Benedetto V, comunque fosse il primo di essi degno di tale dignità, indegnissimo il secondo, e l'ultimo eletto da' Romani a dispetto di quell'imperatore, così pure avrebbe rigettata la nomina di Gregorio V, ove non valida. Ma che la temenza di Ottone III, il quale stava con un esercito sulla via di Roma, nella elezione del pontefice spingesse gli uni, e gli altri rattenesse, e che quindi molti de' Romani d'allora, giudicassero poi non liberi i comizi in cui Gregorio era stato eletto, credo che nessuno non sarà per disdirlo.

Crescenzo intanto mentre queste cose si passavano in Roma, stava-sene probabilmente rinchiuso in Castel Sant'Angelo, d'onde chetamente osservando que' fatti, che dapprima per la vicinanza, quindi per la presenza d'Ottone, non aveva potuto impedire, aspettava il beneficio del tempo, od il ritorno dell'imperatore nella Germania. La qual cosa si può facilmente argomentare da' fatti che accaddero appresso.

Ma Ottone appena coronato imperatore avendo preso ad usare in Roma l'autorità sovrana *nella guisa stessa che i suoi maggiori*, adunò un placito ed intimò a Crescenzo di presentarsi. Le querele a lui apposte furono (così il cronista) per le ingiurie con cui di spesso aveva lacerato Giovanni XV (1).

Quali fossero queste ingiurie, le quali non impedirono nè a quel pontefice di governare per circa anni XI la Chiesa, nè a Roma, come nota il Baronio (2), di godere in quel tempo la pace, non viene dichiarato. Probabilmente non d'altro trattavasi che delle esagerate pretese di signoria, le quali erano le solite cagioni delle inimicizie de' Pontefici co' magistrati del popolo, per cui, secondo i citati scrittori più recenti, Crescenzo avea costretto Giovanni XV a fuggire in Toscana (3). Ad ogni modo come Crescenzo male si sbrigasse dell'accusa, lo dimo-

(1) « Ann. 996. Otto Romam veniens in Ascensione Christi, quae tunc erat XII kal. iunii, anno » aetatis suae XV, Regni autem XIII. Ind. VIII ab eodem (Gregorio V) unctionem perecepit Im- » perialem, et advocatus Ecclesiae Sancti Petri efficitur: et posthaec imperium illud, maiorum » suorum more gubernavit, aetatem suam moribus, industriaque vincens: habitoque cum Romanis » placito, quendam Crescentium, quia priorem Papam iniuriis saepe laceraverat, exilio statuit » deportari, sed ad preces novi Apostolici, omnia illi remisit. » (Ann. Saxo. ap. ECCARD T. I col. 363).

(2) Ann. Eccl. 985. IV.

(3) Amalr. Auger. ap. ECCARD. T. II. col. 1720. — PROLOM. Lucensis, Hist. Eccl. Lib. XVII. c. XXXI ap. MURATORI R. I. T. XI. col. 1046.

stra la sentenza per cui Ottone lo condannò nell'esilio. Se non che il nuovo pontefice interponendo le sue preghiere verso l'imperatore germanico, ogni cosa venne al console condonata. In tal guisa avvisavano Gregorio e Ottone attutare l'ire delle fazioni: ma invano. Non così tosto moveva Ottone da Roma per la Germania, che parte Spoletina ripigliava l'ardire. Qualunque si fossero le condizioni imposte a Crescenzo nel condonargli la pena del bando, e nel lasciarlo console in Roma, nè egli si brigò d'osservarle, nè il papa si piegò a solferire, ch'esso, come per lo addietro, vi usasse l'autorità sua. Ma la potenza che era nelle mani de' Spoletini, costrinse il pontefice a fuggire da Roma, onde sprovveduto, riparò in Pavia. Allora si fu che tacciato Gregorio V di essere stato eletto invalidamente da non liberi comizi, si deliberò d'eleggere un altro papa.

Giungeva appunto allora da Costantinopoli in Roma Giovanni Filagato, arcivescovo di Piacenza, uno degli ambasciatori mandati nel 995 da Ottone per trattarvi d'un suo parentado con una greca principessa (1).

I casi di costui, strano esempio della volubilità delle umane vicende, a noi uno novello ne porgono della corruzione de' Grandi di quel tempo, e soprattutto degli ecclesiastici.

Nato a Rossano in Calabria, di padre greco e di servil condizione, presentavasi Filagato a' tempi di Ottone II alla corte imperiale in abito di poverello. Ivi per le cure, forse troppo pietose (2), dell'imperatrice Teofania, greca com'esso, veniva accolto e nutrito. Astuto, cavilloso, ed ipocrita, coll'andare del tempo facevasi innanzi nella grazia di Ottone, e tanto il circonveniva, che dal grado di segretario, saliva fra i primi dell'aula imperiale, e da cappellano di Teofania, abbate del ricco monastero di Nonantula. Morto Ottone II volgeva l'arti sue a piaggiare coloro presso de' quali stava la cura del bambino Ottone III, e fra le agitazioni di quell'infanzia, Teofania lo faceva eleggere vescovo di Piacenza, cacciando da quella sede quegli che meritamente prima di lui vi era stato chiamato. Nè a ciò contento l'ambizioso Calabrese, otteneva da papa Giovanni XV, che la sede Piacentina fosse eretta in arcivescovato (3). Mandato, come si è detto, ambasciatore a Costantinopoli,

(1) *Chronogr. Saxo.* ap. LEIBN. l. c. p. 207. an. 997.

(2) S. PETRI DAM. *Epist.* 2 ad CADALOU.

(3) BARON. *Ann.* 996. n. XV. — *Chronogr. Saxo.* ap. LEIBN. l. c. an. 997. pag. 207. — ARNULFUS *Mediol. Hist. Lib.* l. c. II. R. l. T. IV. p. 11. — MURAT. *Ann.* 982-989.

presto s'avvide l'astuto Giovanni, siccome la corte greca, per la vittoria del 982, era ben più disposta a proseguire le sue conquiste in Italia, che non fosse a trattar di nozze coll'imperatore germanico. Volto l'animo a maggiore disegno, cominciò le occulte pratiche per ricondurre in suo pro, sotto il dominio de' greci imperatori, Roma che oggimai sapeva stanca della signoria tedesca (1). Forse fin da Costantinopoli aveva principio il trattato che seguì tra Filagato e Crescenzio, del quale la sede pontificia doveva pel primo riuscire la ricompensa, come il grado supremo nella Repubblica di Roma, sotto l'alto dominio de' greci imperatori, pel console Crescenzio la condizione.

Giunto pertanto in Roma dopochè papa Gregorio V ne era fuggito, era Filagato tostamente per consiglio di Crescenzio eletto pontefice. Quindi il console mostrando apertamente il viso ad Ottone, cacciava in prigione gli altri legati di lui, tornati da Costantinopoli, e quelli che Gregorio V mandava a Roma (2), mentre accoglieva a grande onoranza gli ambasciatori greci, già forse intinti della congiura (3).

Come la notizia di questi fatti accaluti nel maggio di quell'anno 997 (4), fu giunta a Gregorio V, s'affrettava egli d'adunare in Pavia un concilio, nel quale mandavasi l'anatema contro Crescenzio e contro Filagato (5). I quali ben sapendo siccome Ottone impacciato in nuova guerra contro gli Slavi, non potrebbe così tosto scendere coll'esercito dalla Germania, avevano fidanza, che il soccorso de' Greci Augusti non sarebbe per fallir loro, e che Roma già sarebbe condotta nella signoria di quelli, prima che l'armi tedesche dappresso non la minacciassero. Ma comechè per ben otto mesi durasse l'indugio d'Ottone (6), sia che le pratiche co' Greci fossero state troppo alla cieca condotte da Crescenzio, e dal suo papa, o che le nuove guerre co' Bulgari impedissero

(1) « De quo dictum est, quod Romani decus Imperii astute in Graecos transferte tentasset » (ARNULPHI Mediol. Hist. l. c.).

(2) MURAT. *An.* 998. — *Chronogr. Saxo.* l. c. — DITMARUS in *Chron.* l. c. Lib. IV. p. 354.

(3) « Il est probable que les Ambassadeurs Grecs trempoient dans ce complot. » (LE BEAU, *Hist. du Bas Empire*, Liv. LXXVI. p. 502). — MURAT. l. c.

(4) FAGI ANL. *Critica ann.* 997. n. X.

(5) *Ann. Hildesheim* 997 l. c. p. 721. — *Acta Contil. Ticin.* ap. PERTZ *Monum. H. G. T. V.* p. 694, n. 6.

(6) *Dipl. Ott. III. Imp. pro Eccl. l'ercell. Dat. Papiae II vel XI kal. ian. an. 997. Ind. XI (X)* in *H. P. Monum.* T. I. col. 315.

a Basilio e Costantino, imperatori, di mandar altra armata ne' mari d'Italia, la fede greca fallì a Crescenzo, e l'aiuto sperato non giunse.

E intanto Ottone vendicata coll'armi la sommossa germanica, già nel dicembre di quell'anno medesimo era sceso coll'esercito in Italia, e bandita l'oste italiana, moveva minaccioso da Ravenna per a Roma, dove con papa Gregorio giungeva sul cader del febbraio (1). Sprovvéduti d'ogni maniera di difendere la città contro le forze imperiali, l'antipapa ed il console avvisarono scampare dall'ira d'Ottone, il primo trafugandosi travestito, e Crescenzo chiudendosi co' suoi fidi fra le mura di Castel Sant' Angelo giudicate in quel tempo insuperabili (2). Ma come a Filagato non valse il fuggire, conciossiachè preso da' Romani di parte tedesca, fu crudelmente mutilato, accecato e sostenuto prigioniero, così poco a Crescenzo giovò il riparo di quelle mura, delle quali se non l'armi, trionfò il tradimento. S. Nilo, greco come Filagato, abbate di un monastero posto su' monti presso Gacta, compreso d'orrore per l'atroce trattamento fatto a quello sciagurato suo nazionale, portavasi infermo e decrepito (oltrepassava gli anni novanta), per un tempo inclemente in Roma, alla presenza di Ottone e di Gregorio, chiedendo per amore di Dio, mercè per l'infelice Filagato, e domandando la mal viva persona di lui che l'uno e l'altro di essi avea tenuto sul fonte battesimale (3).

Già cedeva l'imperatore alle supplicazioni del santo vecchio, ma il papa tedesco non cedeva (4). L'orribile strazio di quel malangrato antipapa ancora non appagava la barbarie di que' tempi, che al sangue voleva aggiunti gli scherni e i vituperi. Fatto addurre alla presenza sua l'arcivescovo Filagato, gli fece Gregorio strappare gli abiti sacerdotali, e postolo accavallato al rovescio sur un giumento, volle fosse condotto per le vie di Roma fra gli schiamazzi della concitata plebaglia (5). Al-

(1) Vedi per le date i diplomi in MURATORI *ann.* 998.

(2) *Chronogr. Saxo.* l. c. *ad ann.* 998. p. 208.

(3) *Acta S. Nili Aegumeni ap. BYRON. an.* 996. n. XV. XVI et XVII.

(4) « Tunc Imp. modicum lacrimatus (neque enim revera tota res eius consilio peracta est » respondit B. Nilo: Praesto sumus ut omnia quae videntur sanctitati tuae perficiamus, si enim tu exaudias petitionem nostram, et dignaberis accipere monasterium in civitate, quodcumque volueris, et esse nobiscum sempiterno tempore Et iam accepisset B. Nilus conditionem studens, ut quam petebat gratiam, obtineret. Sed durus ille Papa non contentus malis, quae adversus praedictum Philagatum patraverat etc. » (*Acta S. Nili, ut sup.* n. XVIII).

(5) *Ibid.* n. XVIII et S. P. DAMIANI *Ep.* 2 *ad CADALOUM.*

lora ristette S. Nilo dalla sua domanda, ma nel ritrarsi di nuovo nel suo monastero, intimò al papa ed all'imperatore l'ira del Cielo (1).

Punito in tale elferata maniera l'antipapa Giovanni, più difficile impresa e più importante era per Ottone il trionfare di Crescenzo, il quale e pe' molti aderenti che teneva dentro e fuori di Roma, e perchè munito da' propugnacoli di Castel Sant'Angelo, minacciava di far lunga e forse non superabile resistenza. Ma nelle età corrotte facilmente all'arte ed alla forza si supplisce cogli' inganni e co' tradimenti.

Al postutto la fine di Crescenzo viene raccontata in diverso modo da varii scrittori di quel tempo, secondochè sono o tedeschi, od addetti a quella parte, o italiani.

Narrano i primi, che dopo alcuni giorni di strettissimo assedio, la fortezza nella quale si difendeva il console, e che allora prese il nome di Torre di Crescenzo, fu vinta con macchine e per assalto, e che il console con dodici de' suoi vi fu preso, precipitato dalla cima e quindi impiccato (2).

Ma secondo gli storici d'Italia la cosa passò altrimenti, e con poca gloria di Ottone e di papa Gregorio.

Conciossiachè dopo ripetuti assalti, durando tuttavia la resistenza, Ottone mandava a Crescenzo un suo messo per nome Tanino, il quale veniva protestandogli sotto la fede del giuramento imperiale l'impunità, ove s'arrendesse. Preso in tal guisa sotto la fede di un patto, non arrossivano l'imperatore ed il papa di mandarlo a morte (3). Ed acciò meglio fossero palesi a Roma e il supplizio di Crescenzo e la rotta fede, gli fu mozzato il capo sulla vetta del clivo di Cinna, che sta di contro

(1) *Acta S. Nili* l. c.

(2) THIETMARUS in *Chron.* Lib. IV, § 21 ap. PERTZ l. c. — RODULPHI GLABRI, *Mon. Clun. Hist.* Lib. I. c. IV.

(3) « Ita illo (Cresc.) adnitente Papa, quasi reus maiestatis, capitalem sententiam subiit. » (S. PETRUS DAM. in *Vita S. Romualdi* cap. 23. p. 216). — ARNULPH. *Mediol. Hist.* Lib. I. c. X. l. c. — « Interfectus est Crescentius comes, inssu Ottonis et Gregorii Papae, qui nimis distri- » « cle placita infra Romam exercebant. » (HUGO Farsensis, *De imminutione rerum Monasterii sui* ap. MABILL. *Ann.* T. IV. p. 117 et 700). — « Imperator . . . Crescentium . . . sacramento de- » « ceptum coepit, et mox quasi reus maiestatis capite obtruncavit. » (LEO Ost. in *Chron. Cass. Monasterii* Lib. II. cap. XVIII). — « Egressus inde Crescentius, contra fidem datam captus . . . » « cum duodecim aliis foedissimo suspendii supplicio est affectus; quae res maximam clarissimo » « Ottonis nomini, perfidiae notam inussit. » (SIGON. *De Regn. Ital.* Lib. VII. ann. 997). — BARON. *Ann.* 996. n. IX.

al Vaticano, e il cadavere appeso per i piedi. Al qual luogo fu allora dato da Tedeschi il nome di *Monte Gaudio*, e da' Romani quello di *Monte Malo*, nome che lungamente ritenne (1), e del quale rimane un qualche indizio nella denominazione di *Monte Mario* con cui viene a' giorni nostri appellato. La spoglia di lui fu da alcuni suoi fidi sottratta: quindi clandestinamente sepolta nella chiesa di S. Pancrazio, fuori le mura presso la porta Anreliana, fu onorata di pietosa iscrizione (2).

Così finiva Crescenzio, uomo del quale forse alcuni scrittori avrebbero meglio rispettata la fama, ove l'altezza dell'intento suo di render libera Roma dal giogo forestiero, non fosse in lui stata contaminata da modi corrotti e da passioni indegne di chi vorrebbe farsi liberatore di un popolo. Ma l'età guasta in cui visse Crescenzio, e che in qualche modo lo assolve, non fece a lui trovar grazia presso quegli scrittori, e l'amor di setta lo trasformò presso alcuni altri in un eroe dell'antica Roma.

La morte di Crescenzio fu celebrata da Ottone come una insigne vittoria; questo apparisce da un diploma da lui concesso al monastero di Einsidlen nella Svizzera, il quale porta la singolare nota: « Dato in Roma » il 3 delle calende di maggio, giorno in cui fu suppliziato Crescen-
» zio » (3).

Ma colla morte di quel console non cessarono le fazioni di Roma. Grande era stata la di lui potenza, infinito e crescente il numero degli aderenti, i quali più volte rinnovarono contro di Ottone e contro i di lui successori le stesse sommosse. E nessuna cosa, a parer mio, meglio dimostra qual fosse l'autorità del nome di quello (4), quanto il vedere che Ottone, forse costretto, lasciava prefetto di Roma Giovanni figliuolo del console da lui ammazzato (5); la qual cosa rinviò i mali

(1) *Chron. Reg. S. Pantaleonis* p. 897. — NIBBY, *Itiner. di Roma*, T. II. p. 672.

(2) L'epigrafe sepolcrale di Crescenzio che ora più non esiste in Roma, fu pubblicata dal BARONIO negli *Ann. Eccl.* an. 996. n. X.

(3) « Dat. III. kal. maii ann. Dominicæ Incarnationis 998 Ind. XI, anno tertii Ott. regnantis » XV, imperii secundo. Actum Romæ quando Crescentius decollatus suspensus fuit. » (MABILL. *Ann. Ben.* T. IV. p. 117).

(4) « El pro eo (Cresc.) planctus magnus factus est (Romæ.) » (ADEMARI, *Historiar.* Lib. III. § 31 ap. PERTZ *M. G. II.* T. VI. p. 130).

(5) *Chron. Farf.* ap. MURATORI R. I. T. II. P. II. p. 505. — LEO, *Hist. d'Ital.* T. I. Liv. IV. p. 204. Questo scrittore dice che Ottone III si lasciò persuadere dalle blandizie di Stefania vedova di Crescenzio nel far prefetto di Roma Giovanni di lei figlio. Osservo che Giovanni era già pre-

amori nelle due fazioni. Così all'una di esse venne attribuita la morte di papa Gregorio V, accaduta l'anno seguente (999) (1), come all'altra l'indegno trattamento fatto a Stefania vedova di Crescenzio, la quale prima di passare agli amori imperiali, fu data in balia alla lascivia de' Tedeschi (2).

Frattanto, per l'opera nuovamente di Ottone, succedeva al defunto Gregorio V il famoso monaco Gerberto detto Silvestro II (3), nel quale perchè a lui affezionatissimo e pratico delle cose di Roma, Ottone poneva l'intera la sua fiducia.

Quest'pontefice fu certamente uno de' più dotti uomini dell'età sua (4). Nato in Alvernia da umili genitori, la natura sua mutabile e insufferente lo fece passare per di molti gradi prima di giungere al papato. Fu successivamente monaco in Francia e in Ispagna, pubblico lettore di buone lettere in Reims, quindi arcivescovo di questa città, poi di Ravenna, d'onde pel patrocinio di Ottone III suo discepolo, salì in Roma pontefice (5). Merito suo singolarissimo fu quello d'aver ridestato in Francia e in Italia i buoni studi quasi perduti, specialmente i matematici. Molte sono le di lui opere in varie discipline (6), che fanno testimonianza della sua dottrina, la quale in que' tempi di tenebre e di barbarie gli fruttava la taccia di negromante. La verità che terse la fama sua da questa vecchia calunnia dell'ignoranza (7), non lo liberò

retto, vivente suo padre, come apparisce dal confronto di un giudicio dell'anno 998 Ind. XI del 9 d'aprile, (*Chron. Farf.* l. c. p. 505), nel quale è sottoscritto, col diploma suddetto della nota (1). Quod si che se la vedova di Crescenzio fosse stata la madre di Giovanni prefetto, difficilmente le sue bellezze sarebbero ancora state tali da far impazzare quel giovine imperatore; Crescenzio aveva avuto una prima moglie per nome Teodora, da cui più probabilmente era nato Giovanni il prefetto di Roma, di cui si parla, il quale dopo la morte di Ottone III, fu fatto patrizio de' Romani (vedi la nota (3) alla pag. 184, e *Chron. Farf.* col. 552, D). — Il P. Beretti nella sua *Corografia* col. cccviii) nomina un'altra moglie di Crescenzio chiamata Giovanna, ma credo per isbaglio.

(1) MASCOVI *Comm. de Ottone III.* pag. 97 nota (1). — *Vita Meinwerii Episc. Paderbon* apud LEIBNITZ. II. B. T. I. p. 520. — MURATORI *ann. 999.*

(2) « Stephanía uxor Crescentii traditor adulteranda Teutonibus » (*ARCHIPI Mediol. Hist. Lib.* l. c. 12. p. 11).

(3) MURATORI l. c.

(4) « Gerbertus vir magni ingenii, ac miri eloquii, quo tota Gallia ac si lucerna ardente vibrabunda refulsit. » (*RICHERI Hist. Lib. IV.* apud PERTZ *M. G. H. T. V.*).

(5) MABILL. *Ann. Ben. T. III.* p. 569 et seq. 602, et T. IV. p. 88. 101. 127 etc

(6) Apud PEZICUM *Thesaurus Anecd. P. II. T. III.*

(7) MURATORI *ann. 1003.* — BOETIUS *De Consol. Philosoph.* prosa IV

dall'accusa d'ambizione (4). Fu nondimeno Silvestro pio e moderato pontefice, il quale difese con giustizia i diritti delle chiese e de' vescovi, soli depositari in que' tempi delle reliquie dell'antica sapienza.

Composte coll'elezione di papa Silvestro, sotto mendace apparenza di calma, le cose di Roma, muoveva Ottone per alla Germania con numeroso seguito di principi e di cardinali nella primavera dell'anno millesimo (2). Ma gli umori inquieti delle fazioni sobbollivano. Poco sono note le vicende di Roma durante la di lui assenza: ma la notizia data da San Pier Damiano, che papa Silvestro portava l'assedio a Cesena, e la uccisione del capitano dell'imperatore fatta in quel tempo da' Tivolesi, zelatori della parte di Crescenzio, dimostrano che sempre vivevano nelle terre romane gli spiriti destati da quel console (3).

Poco durava l'assenza di Ottone. Nel dì d'Oguissanti dell'anno medesimo già trovavasi in Roma (4), dove il richiamavano novelle istanze di papa Silvestro, e dove ardeva egli stesso di ricondursi per compirvi i maggiori disegni, che da gran tempo meditava sopra Roma.

Fu infatti fama, ch'egli avesse in animo di restaurare l'antico imperio

(1) *Art de vérifier les dates*, T. III. P. I. p. 325.

(2) THUETMAR. *Chron.* Lib. IV. § 28.

(3) S. PETRI DAMIANI *Vita S. Mauri*, cap. III.

(4) *Dipl. Ott. III pro Eccl. Verzell. Datum Romae kal. nov. anno Domini Incarnationis M. Ind. XIV.* (Append. n. 18 e 19). — Forse a questo tempo vuol riferirsi una lettera di papa Silvestro II ad Ottone III recentemente pubblicata per la prima volta nelle Note alla vita di questo pontefice dal signor HOCK, la quale come interessante per la storia di que' tempi, parmi di qui ripetere. Questa lettera è forse una di quelle di cui si fa cenno nella Prefazione alla Storia del monaco RICHERO, pubblicata dal PERTZ (*T. V. M. G. H.* p. 567. — Vedi pure *Histoire du Pape Silvestre II et de son siècle*, par C. T. HOCK; traduite de l'Allemand par l'Abbé AXINGER p. 363. nota (27)).

« Sylvester Ep. servus servorum Dei dilecto suo Ottoni Caesari semper Aug., imperii decus et » insuper apicam benedictionem. Multa vobis per Gregorium Tusculanum, ob vestram cautelam » demandavi, quae fama volans pertulit. Sed quae nobis apud Orlam inter sacra missarum so- » lemnia pervenerunt, non leviter accipienda censeo. Illi namque qui servitio nostro nihil prae- » buerunt, seditionem et tumultum in Ecclesia excitaverunt contra eos, qui romana nobis mun- » scula offerebant, offerrique debere ab aliis acclamabant. Inferbuit aerior ira quod quaedam pau- » percula contra suum Iudicem apud nos conquiri ausa est, quasi illa conquisitio ad invidiam » Comitum esset facta. Itaque inter sancta sanctorum districtis gladiis inter hostium frementium » gladios urbe excessimus. Prima quae debuerunt vobis esse hospitia in adventu nostro eum pridie » essent stantia disparuerunt. Secunda tales exitus habuerunt. Sed de his alias. Hoc non solum » nunc si non propter nos saltem propter vos vestrosque precor utque nostri iuris in Sabino a qui- » buslibet detinente (*) per vestrum nostrumque legatum in nostrum dominium revocentur, ut in- » dignitatem rerum summoveat praesens copia fructuum. Data prid. id. iun. (an. M.?) Per omnia » honor. ».

(*) Sembra che si debba leggere la frase a questo modo: precor ut quae nostri iuris in Sabino detineantur.

romano, e di trasportarne in Roma novellamente la sede (1). A ciò volgeva egli i suoi pensieri per naturale desiderio di gloria, e per giovanile vaghezza di onorare se stesso col fasto e colla pompa de' prischi imperatori romani, che la ruvidezza germanica aveva bandito. Già molte novità aveva egli introdotte, che agli uni gradivano, agli altri dispiacevano. Queste gl'inimicavano i suoi principi della Germania, avvezzi a più semplici modi, e nemici d'ogni insolita usanza. Ordinasì pertanto contr'esso una congiura da' conti, da' duelli e da molti vescovi della Germania, i quali richiedevano d'aiuto Arrigo, figliuolo d'Arrigo il Rissoso duca della Baviera, quegli che fra breve vedremo successore di Ottone ed emulo del re Ardoino. Ma Arrigo si mantenne in fede, e la morte di Ottone III venne presto a troncargli i fili della congiura, e de' magnifici disegni di questo imperatore (2).

Intanto sul principiare dell'anno 1001 aveva Ottone mandate le macchine da guerra contro i Tivolesi ribelli, ed occisori di Romolino suo capitano. Era la città ben munita, e inutili erano stati gli assalti e le fatiche per espugnarla. Venuto egli stesso in campo, già s'agitava di levarne con vergogna l'assedio, quando introdotti in Tivoli il papa ed il vescovo Benivardo, maestro e consigliere di Ottone, i Tivolesi si lasciarono condurre ad umiliarsi e ad arrendersi a discrezione. Tenuto quivi un placito, l'imperatore vi delibera di perdonare non che a' cittadini, alle mura ancora di Tivoli, che la fazione de' Tuscolani voleva distrutte (3). Questo dispiacque a' Tuscolani, i quali rannodatisi questa volta cogli altri Romani della fazione nemica a' Tedeschi, ridestarono in Roma contro di Ottone una generale sommossa.

Sprangate le porte della città, e asserragliate le vie, travevano gl'insorti, parte ad assediare Ottone nel palazzo di Monte, parte a far impeto contro i capitani e i militi tedeschi sparpigliati per Roma (4). Ogni scampo pa-

(1) MASGOVII, *Comment. de Otton. III.* p. 105 et passim ap. Script. eoevnes.

(2) *Annal. Sax.* ap. ECCARD. T. II. ann. 1000 et 1001. col. 374. 375 e 376.

(3) MURATORI ann. 1001. — TANGMARI presbyt. *Vita Berwardi Ep.* ap. LEIBNITZ R. B. T. I cap. XXIII.

(4) « Romani denique indigne ferentes Tiburtinos cum Imperatore pacatos, urbi quoque suae » portas seris muniunt, vias obstruunt, libere entrandi vel exeundi facultas negatur. » (TANGMARI Presb. I. c. Cap. XXIV). « Romani ... contra eum (Ott.) conspirant, et aliquot militum eius » peremptis, eum in Palatio obsident. » (SIGEB. Gembl. ap. PISTORIUM T. I. p. 825). Varii diplomi di Ottone III di que' tempi tengono la data di « Romae in Palatio Montis. » (scorretto poi

reva tolto: poichè nè i Tedeschi sparsi per le campagne, potevano nella città introdursi, nè uscire glì assaliti. A far testa ai sollevati non erano che i palatini, a' quali stava commessa la guardia del principe. Di questi si faceva capo il vescovo Bernwardo, il quale dopo aver celebrate le sacre cerimonie, e brandita l'asta imperiale, moveva animoso contro i Romani, mentre Arrigo duca di Baviera ed Ugo marchese di Toscana, fattisi in mezzo ad essi, con mansuete parole e con simulate promesse procuravano sedar l'ire, confortando i tumultuanti a cessar l'armi ed a recarsi pacifici al palazzo imperiale (1).

V'accorrevano infatti nel mattino del giorno seguente, ed Ottone salito sovra una torre, all'uso degli antichi imperatori, pigliava ad arringarli: rimproveravani d'aver dato di piglio all'armi, uccisi i suoi famigliari, posto l'assedio a lui nel proprio palazzo, fatto prova di cacciarlo da Roma: tutto ciò, diceva, per rimunerarlo de' benefici da esso ricevuti, dell'amore di padre, che sovra ogni altra città dell'impero suo, a Roma portava, dello averne ampliata la gloria, e recatone il nome là dove mai da' loro maggiori non era stato posto il piede. I Romani aver egli anteposto a' Sassoni ed a' Tedeschi, e per questo avere concitato contro di se l'invidia e l'odio di tutti i Germani. Oggimai esser ben noti, e cogli occhi suoi propri numerare in quel punto i capi ribelli. Ma non s'affidassero, che i pochi tristi a lui nemici potessero contaminar coll'esempio i molti fedeli per cui era uscito vincitore della sommossa (2). Queste parole dette dall'imperatore, se facciamo a fidanza col biografo di S. Bernwardo, commovevano que' concitati fino alle lagrime, i quali così compunti promettevano ammenda, e manomessi due de' capi, battuti, nudi e semivivi li trascinavano a' piedi di Ottone (3).

Ma non per questo affidavasi Ottone a quell'apparenza di pace. Novelle insidie tese a lui da un suo familiarissimo, per nome Gregorio (4),

dagli amanuensi in *Palatio Monasterii*). Ella è dunque naturale supposizione, che Ottone facesse la sua solita residenza in « *Palatio Montis* ».

(1) TANGM. Presbyt. l. c. — Cfr. SIGEB. l. c.

(2) « *Interim piissimus Imperator turrim quandam ascendens ad illos concionabatur dicens etc.* » (TANGMARI Presb. in *Vita Bernwardi Ep.* l. c. cap. 25 p. 453).

(3) « *Hac oratione Imperis ad fletus usque compuncti satisfactionem promittunt, duos corripunt etc.* » (TANGM. l. c.).

(4) Forse quest'era quel Gregorio conte Tuscolano, di cui nella lettera di Gerberto. Vedi la nota (4) alla pag. 204.

lo chiarivano che tra esso e i Romani era spacciata ogni fiducia. Scampavano a stento per opera de' due anzidetti, Ugo di Toscana ed Arrigo di Baviera, trafugandosi con papa Silvestro per una delle porte di Roma. Quindi pigliava la via di Ravenna (1). Agitato a un tempo dall'ira e da' rimorsi per la fede spergiurata a Crescenzo, mentre mandava dicendo a' suoi Germani che nuovi armati provvedessero per piombar sopra Roma (2), egli recavasi compunto, a piedi nudi, da Roma al monte Gargano a piangere il suo peccato: quindi si ritraeva nel monastero di Classe. Colà tra i digiuni, i cilici e il salmeggiare passava l'intera quaresima di quell'anno, aspettando l'ora di vendicarsi, e intanto prometteva a S. Romualdo abbate, in penitenza del suo spergiuro, di vestirsi monaco ogni volta che avesse punita Roma ribelle, e trionfante fosse entrato in Ravenna (3). In tal guisa associavansi in quell'età i sensi di pietà religiosa con quelli di ambizione e di vendetta. Le quali cose narrate da S. Pier Damiano dimostrano siccome a' tempi di questo scrittore, cioè verso la metà del secolo seguente, la memoria di Crescenzo era in Italia tuttora compianta e onorata. Che anzi è cosa osservabile, siccome nel parlare della morte di quel console, Pier Damiano cardinale zelantissimo della Chiesa Romana sta contento a dire che: Crescenzo senatore aveva incorso l'indignazione del re (4), senza incolparlo nè della elezione dell'antipapa Filagato, che altrove egli riprova (5), nè delle altre cose di cui gli furono sì larghi accusatori i cronisti tedeschi (6): indizio forse che il nome di Crescenzo popolarissimo tuttora, faceva forza sul-

(1) THIETM. *Chron.* Lib. IV.

(2) SIGEB. *Gemblac.* l. c. ad an. 1002. — TANGM. Presb. *Vita Bernwardi Ep.* ap. LEIBNITZ R. B. T. I, cap. 38.

(3) « Ipse autem rex (cioè Ottone III) ex eodem crimine (cioè la mancata fede a Crescenzo) »
 « beato viro (Romualdo) confessus poenitentiae causa nudis pedibus se romana urbe progrediens,
 « sic usque in Gargauum Montem ad S. Michaelis perrexit Ecclesiam. Per totam etiam quadra-
 « gesimam in Classeensi monasterio B. Apollinaris, paucis sibi adhaerentibus mansit, ubi ieiunio
 « et psalmodiae prout valebat intentus, cilicio ad carnem indutus aurata desuper purpura tege-
 « batur. » (S. P. DAMIANI *Vita S. Bernwardi* c. XXV. oper. T. II. p. 216). — « Romualdus...
 « ut rex Monachus fieret insistere vehementius coepit. At ille facturum se quidem, quod exige-
 « batur asseruit, si tamen prius Romam quae sibi rebellabat impeteret, et ea devicta, Ravenno
 « cum victoria remearet. » (S. P. DAMIANI *ibid.* c. XXX. p. 219).

(4) « Crescentius Senator Rom. indignationem regis incurrens. » (S. PETRI DAMIANI, *Vita S. Romualdi* c. XXV, p. 216).

(5) S. PETRI DAMIANI *Ep.* XVI. Lib. I. ad CADALOUM op. T. III. p. 29.

(6) LAND. sen. Lib. II. c. 18 et 19. — SIGEB. *Gembl. ad an. 1002.* — *Chron. reg. S. Pantaleonis* — ADALB. *Vita Henrici Imp.* — *Ann. Quedlinburg. an. 1002.*

l'animo di quello scrittore, il quale non condannava in quello l'intendimento politico. Già si sa che S. Pier Damiano non era di fazione imperiale.

Confuse assai sono le date di questi ultimi fatti della vita di Ottone. Così, per esempio, il Muratori sembra pendere ad assegnare la data della sommossa romana di cui parlammo, posteriormente alla quaresima del 1001; poi di nuovo ne dubita. Dal testo di S. Pier Damiano da noi addotto apparisce che fu anteriore (1). Certa cosa è che nel Natale dell'anno 1001, Ottone trovavasi in Todi, dove con papa Silvestro celebrò addì 26 di dicembre un concilio di molti vescovi (2). Da Todi recatosi a Paterno, passava dopo pochi giorni di vita (3).

La morte sua fu attribuita da alcuni scrittori di Germania a caso fortuito di malattia (4), ma da altri molti, specialmente italiani, testimoni meno di quelli, sospetti di falsità in questo fatto, a veleno datogli da Stefania la vedova di Crescenzio. Poco d'accordo sul modo, novellarono anch'essi a loro posta, dicendo gli uni che Stefania essendo stata sposata, e poi ripudiata da Ottone, gli altri, che essendosi indotta ad amoreggiare con esso per la speranza di regnare, e quindi credendosi abbandonata allorchè Ottone si recò in Germania, si condusse ad ammazzarlo (5).

Ma l'insussistenza di tali racconti palesemente si manifesta, considerando alla poca probabilità, che Ottone si consigliasse di far moglie sua ed imperatrice colei ch'esso avea fatto svillaneggiare dalla soldatesca; nè maggiormente è credibile, che Stefania potesse dopo di ciò nutrire cotale stolta speranza, tanto più che una nuova e più magnifica ambasceria avea Ottone mandato a patteggiare per esso nella corte d'Oriente una sposa (6). Più conforme alla corruzione di quell'età, età più assai di

(1) MURAT. *Ann. 1001*. — Vedi la nota (6) alla pag. 207.

(2) Cfr. *Ann. Ildesh.* ap. PERTZ T. V. *ad an. 1002* et MURAT. *Ann. 1001* in fine. — TANGMARO nella *Vita di S. Bernwardo* (PERTZ, T. V. § 36) dice: « Anno singularis nativitatis D. N. I. C. » millesimo secundo, Ind. XV. Apostolicus cum Imperatore Tudertinae natale Domini celebravit, » ubi in festivitate S. Ioh. Evang. (27 decembr.) concilium coadunatur. » L'anno dunque era cominciato addì 25 dicembre.

(3) *Ann. Ildesh.* — ibid. RUPERT. Tuitziensis, *Vita S. Heriberti*, cap. 2. § XI. — Auctor *Vitae S. Meinwerii* apud LEIBNITZ T. I. R. B. 510.

(4) THIEHMARI, *Chron. Lib. IV. c. 30* ap. PERTZ M. G. II. T. V. p. 782. — TANGM. Presb. l. c. § 37.

(5) « Crescentii uxor spo imperandi Imperatorem ad suum illexerat amorem, sed cum doleret » repatriantem, et nuptiis se frustrari, misso clam veneno illum infecit. » (REINERUS in *Vita S. Wolbodonis* § IX. ap. STRUVIUM *Corp. Hist. Germ. I.* 316).

(6) MASCOVII *Comment. ad an.* — Questa legazione di Ottone male s'accorda colla promessa di vestirsi monaco, fatta da lui a S. Hemnaldo. Vedi la nota (6) pag. 207.

sangue che non d'amori, egli è il credere che la vedova di Crescenzio, donna superba per grado e per elegante bellezza, a vendetta del tradito consorte e della propria contaminazione, non s'adontasse degli amori d'Ottone per aver campo di spegnerlo (1).

Fu da' cortigiani tenuta nascosta la morte dell'imperatore, tanto che i Tedeschi qua e là dispersi ne' dintorni di Roma, non furono raccolti. I quali avviatisi colla spoglia di lui verso la Germania, ebbero per sette giorni continui a combattere contro le sollevate popolazioni; nè trovarono posa finchè non furono giunti in Verona (2). E qui nuovamente potremo osservare quale già fosse l'effetto prodotto sovra gl'Italiani dalle novità introdotte dagli Ottoni nel governo delle provincie del reame, dove le popolazioni dal basso stato in cui le trovammo verso la metà del secolo X, erano in questo cominciare del seguente, sorte a segno di manifestare co' fatti l'odio loro, comune co' Romani, pel dominio straniero.

Frattanto la punizione di Crescenzio e dell'antipapa Giovanni, e le dimostrazioni che Ottone III era ito facendo di radunare un nuovo esercito nell'Italia inferiore, aveano mutato gli animi di Basilio e di Costantino imperatori d'Oriente. Fatto più maturo consiglio, aveano essi aderito alla proposta di nozze recata da Arnolfo II arcivescovo di Milano, splendido legato di Ottone, e già Arnolfo colla fidanzata principessa era di Costantinopoli partito colmo di donativi e d'onorificenze.

Mentre la nave sua stava per porre nel porto di Bari, Ottone rendeva l'anima a Dio sul fiore degli anni (3).

(1) Fra gli scrittori italiani LANDULFO seniore (*Histor.* Lib. II. cap. XIX. R. I. T. IV) rinnova a proposito di Ottone e di Stefania la favola di Deianira e di Nesso centauro. Ma LEONE Ostiense (*Chron. Cassin. Monii* Lib. II. c. 24 *ibid.*) dice apertamente: « Imperator mortuus est ad oppidum » quod nuncupatur Paternum, non longe a civitate quae dicitur Castellana, ab uxore ut fertur » Crescentii senatoris, quem superius ab illo retulimus decollatum, qua impudice abutebatur, » potionatus. » — Fra gli scrittori Tedeschi LAMBERTO autore della *Vita di S. Eriberto* arcivescovo di Colonia, verso il 1050, e RUPERTO Tuitiense alcuni anni dopo, narrano che Ottone cadde nelle insidie di certa trista femmina, della quale egli aveva fatto decollare il marito Crescenzio, suo ribelle: e che sebbene ammonito più volte dall'arcivescovo Eriberto, non avendo da essa voluto astenersi, morì avvelenato, mentre dormiva (*Vita Herib. Col. Arch., auctore LAMBERTO*, ap. PERTZ T. VI. § 7). Le stesse cose narra un anonimo del secolo XII, *scriptor Vitae Meinuericii Paderbrunn. Episc. n. X* ap. LEIBNITUM R. B. T. II.

(2) THIETMARI *Chron.* Lib. IV. § 31 ap. PERTZ I. c.

(3) LANDULFI senior. *Hist.* Lib. II. c. 18. l. c. — ARNULFI *Histor.* Lib. I. cap. XIII et XIV. *ibid.* — LEO Ost. *Chron. Cass. Monii* Lib. 2. c. 21. *ibid.*

CAPITOLO VII.

ELEZIONE D'ARDOINO A RE D'ITALIA.
SUE VITTORIE ALLE CHIUSE DELL'ADIGE.

1003

Ventiquattro soli giorni dopo la morte di Ottone, Ardoino marchese d'Ivrea veniva inopinatamente chiamato re d'Italia dalla Dieta generale del reame convocata in Pavia, e quivi addì 15 di febbrajo, nella maggior basilica di S. Michele solennemente incoronato (1).

Questa subita esaltazione di un principe, che i sincroni documenti ci mostrano negli ultimi anni della vita di quell'imperatore, posto come pubblico nemico al bando dell'impero, e condannato nelle più severe canoniche penitenze, desta in sulle prime il pensiero che di un altro Ardoino si tratti, e non di quello del quale narrammo le prepotenze. Ma confrontando i testi di Arnolfo e di Landolfo seniore, soli storici italiani di quegli anni che accennino quest'elezione, con quelli di Ditmaro, di Adalboldo e di altri scrittori coevi della Germania, cade ogni dubbio, e l'identità della persona d'Ardoino, re d'Italia con quella del marchese d'Ivrea colpito da quelle sentenze, risulta evidentissima (2).

Dell'anomalia, o dirò meglio della contraddizione che spicca nel vedere in un momento riuniti i suffragi di tutta la Dieta Italiana per chiamare al trono un principe bistrattato e vilipeso a quel modo, già si è da noi fatto parola: aggiungeremo ancora che se si considera in quali condizioni fossero posti in quel punto gl'Italiani, quali necessità, quali

(1) *Chron. Regum Italiae*, apud MURATORI R. I. T. IV. p. 149.

(2) Cfr. ARNULPHI *Mediol. Hist.* Lib. I. cap. XIV. — LANDULPHI Senior *Mediol. Hist.* Lib. II. cap. XIX. — THIETMARI *Chron.* Lib. IV. § 34, apud PERTZ *M. G. H.* T. V. — ADALBOLDI, *Vita Heinrici Imp.* § 15, PERTZ T. VI etc. Le parole di quest'ultimo scrittore sono più dell'altre esplicite e chiare: « Quidam episcopus Harduinus nomine » (così chiama Ardoino, apponendogli l'uccisione di Pietro I vescovo di Vercelli) « non regnabat, sed vitiis in se regnantibus subserviebat » in Italia Audita enim morte Imperatoris Ottonis, Langobardi surdi et coeci, et de futuro non providi, hunc elegerunt, et ad poenitentiam festinantes, in regno sibi coronaverunt »

passioni li travagliassero, come le cose operate da Ardoino per fini di privata ambizione, giovassero a conseguir quello scopo a cui miravano le risorgenti popolazioni, ogni anomalia viene meno, ogni contraddizione svanisce, e l'elezione di questo principe ricco, potente e animoso apparisce come un naturale e facile risultato della successione de' fatti.

Conciossiachè qualunque fosse stata l'operosità de' nemici d'Ardoino presso l'imperatorè, qualunque la gelosia di questo principe contro il suo ribelle vassallo, le sentenze imperiali che lo condannavano nello avere, nel grado e nella persona, erano rimaste senza effetto, od appena alcuno ne avean prodotto confiscando a pro di Leone vescovo di Vercelli qualche parte di que' comitati, de' quali esso aveva testè ottenuto l'esenzione dal troppo facile imperatore, qualche parte dico, che si trovava più lontana dalla sede d'Ardoino; ma nè questa sede, cioè Ivrea, città ben munita dall'arte e dalla natura, nè le altre castella che guardavan le valli dell'ampio suo territorio, non erano passate nelle mani degl' imperiali, nè le ricchezze che lo avevano reso il più potente fra i grandi vassalli del regno, avevano cessato d'appartenergli.

Nè un effetto maggiore trovo io avessero prodotto le condannazioni ecclesiastiche per cui dapprima Warmondo vescovo d'Ivrea *con tutto il ceto de' vescovi* circonvicini (1) l'aveva iteratamente scomunicato, e quindi il sinodo romano lo condannava ad esulare ramingo, od a vestire l'abito monacale (2): avvegnachè nè egli abbandonò giammai la sua sede, nè l'autorità sua od i numerosi suoi aderenti vennero meno nel suo marchesato. Forse noi ci siamo apposti, dicendo che le sue ricchezze, delle quali mai non venne spogliato, gli donassero modo di ricomperarsi con pie largizioni da ogni sinodal penitenza (3). Quanto agli anatemi di Warmondo avviseremo fossero tolti, e che Ardoino tornasse in pace con esso, allorchè questo vescovo ebbe ottenuto nell'anno 1000 dal medesimo Ottone la sospirata *esenzione* per una parte del territorio d'Ivrea (4): sia perchè fra le carte recentemente trovate, leggesi dopo la formola della scomunica quella pure delle riconciliazioni (5), sia perchè, siccome

(1) Appendice n.º 10.

(2) Appendice n.º 13.

(3) Vedi la nota (2) alla pag. 135.

(4) Append. n.º 17.

(5) « Qualiter Episcopus reconciliat, vel recipiat excommunicatum » (Append. n.º 8)

già osservammo, questo vescovo ritenne la chiesa d'Ivrea fino alla morte sua, dopochè il marchese Ardoino salito sul trono avrebbe avuto modo di togliene il possesso.

Dichiararono il Sigonio ed il Muratori quest'inopinata elezione d'Ardoino dicendo, che un nobile pensiero di nazionale orgoglio fosse quello che avesse spinto i Grandi del regno a tal scelta improvvisa di un principe italiano, prima che non si ridestassero oltremonti in quegli che verrebbe eletto re della Germania le antiche pretese sovra l'Italia, e sovra il soglio imperiale, ed in tal guisa gl'Italiani venissero a riacquistare l'una e l'altra corona, che dappoi quarant'anni erano divenute come il retaggio della Casa di Sassonia (1). Ma per vero dire come mai ci condurremo noi a credere capaci di sì alti sensi que' principi elettori, in gran parte d'origine barbarica, caldi tutti del solo utile loro privato, e che fra breve noi vedremo vendere vilmente al nuovo re della Germania i loro voti, e la fede giurata al re Ardoino?

In altra guisa scorse a sua posta uno scrittore più moderno la chiamata d'Ardoino al trono. « L'ardito principe (dice lo storico Leo) confidante nella sua forza, nella solidità delle sue castella, e nel suo numero roso parentado, si difendeva ancora contro le armi imperiali, quando Ottone III morì. Questa morte inaspettata lo determinò a farsi proclamare egli stesso re d'Italia per liberarsi in modo definitivo dal timore d'ogni castigo. Ebbe prestamente compri molti vescovi (2) con l'oro o con le promesse, talchè agli altri prelati di Lombardia fu mestieri il fare altrettanto . . . Arduino, assicuratosi il favore dei più autorevoli, convocò una dieta in Pavia, che lo acclamò re d'Italia. La maggior parte dei vescovi più prossimi al marchesato d'Ivrea, che conoscevano il brutale animo suo, gli si erano per vero levati contro, e se allora cederonò alla forza, nol fecero che per aspettare l'opportuno momento in cui un sovrano tedesco venisse a sperimentare le sue ragioni » (3).

(1) SIGONIUS, *De Regno Italiae*, Lib. VIII. col. 471. — MURAT. *Annal.* 1002.

(2) I vescovi ed i maggiori abbatì erano grandi vassalli del regno, epperiò elettori nella Dieta Italiana (ROVELLI P. II. *Dissert. prelim.*, Artie. I o II).

(3) LEO, *Storia degli Stati Italiani etc.* Lib. IV. cap. 2. § IV. — Le ragioni che qui invoca il D. LEO non erano appoggiate ad altro che alla forza materiale: le leggi longobarliche e franche che in quel punto reggevano l'Italia non sancivano queste ragioni. Meglio dunque che ragioni esse deb-

A queste sentenze dello storico Leo parmi di poter rispondere, che da nessun contemporaneo documento non risulta, che negli ultimi anni della vita di Ottone, e dopo le bandite sentenze, Ardoino venisse assalito nella sua Marca. Ottone assalito egli stesso, e dalle fazioni in Roma, e dagli Slavi in Germania, non aveva avuto nè agio, nè modo di farsi incontro a questo suo animoso vassallo per costringerlo all'obbedienza, epperò non altrimenti l'aveva combattuto che con poco potenti diplomi. Ond'è che comunque possa parere strano che Ardoino dopo tante sentenze conservasse e la dignità di marchese, e la maggior parte delle sue tenute e delle sue ricchezze, egli è evidente che nessuna fatica non aveva durato per sostenere l'autorità sua, e la sua potenza nella Marca d'Ivrea, dove munito dalle sue castella, non si dava altro pensiero che di aspettare il beneficio del tempo. Largo infatti ed inatteso gli si proferrà questo beneficio per la morte del giovine Ottone nel 1002, ed io non so raccapezzare come più che l'ambizione che lo dominava, il timore de' meritati castighi dovesse consigliare lo sbandeggiato Ardoino di farsi re! S'egli aveva forza bastante per procacciare la propria elezione, come si trovava egli condotto a provocarla per isfuggire questi castighi?

Quindi che Ardoino con denari e con patti comprasse i voti d'alcuni

non essere appellate pretese, ed erano, che ogni re di Germania acquistasse coll'atto dell'elezione sua al reame germanico, il reame ancora d'Italia. Queste pretese sono combattute vittoriosamente dall'autore della Storia di Como (ROVELLI, *Storia di Como* P. II. Dissert. prelim., art. 2.^a, p. LXX o seguenti); ecco qui il sunto delle ragioni addotte da questo scrittore: Il regno d'Italia (dic'egli) era elettivo: le pretese germaniche non asserivano già che le antiche leggi non avessero lasciato agl'Italiani il diritto di eleggere il proprio re nella Dieta generale del regno, ma sì, che da elettivo il trono d'Italia fosse divenuto ereditario ne' re della Germania, dacchè Berengario I e Berengario II l'avevano ricevuto in beneficio, quegli da Arnolfo, questi da Ottone I re della Germania. Così da due fatti parziali operati da due re d'Italia, i quali non potevano senza il consenso della Dieta alienare una tale prerogativa della nazione, vogliono essi dedurre un fondamentale assioma direttamente opposto alle leggi costitutive longobarliche e francoe che formavano il pubblico diritto del reame italiano. Ma non aveva stimato che una tal variazione fosse legalmente stabilita, il re di Germania Ottone I, giacchè egli aveva voluto ottenere dalla libera elezione de' principi italiani quella stessa corona d'Italia, che Arnolfo aveva conceduto in beneficio a Berengario I, e ch'egli medesimo aveva similmente restituito nel 951 a Berengario II. In virtù di somiglianti elezioni ottennero il reame d'Italia Ottone II ed Ottone III, e successivamente Arrigo I (detto il II da' Tedeschi), Corrado il Salico ed altri molti della nazione germanica; prova irrefragabile che rimase sempre in vigore l'antica legge longobardica, stanziata da Carlo Magno, e più particolarmente da Carlo il Calvo, che nessuno non potesse essere tenuto per legittimo re d'Italia, ove non venisse eletto dalla libera Dieta Italiana. (Vedi ROVELLI l. c. o Dissert. I. p. 1).

grandi ecclesiastici, fondata presunzione ne formano i vari diplomi delle donazioni fatte a molti di essi appena fu salito sul trono. Ma quanto questo storico asserisce circa i vescovi elettori, e soprattutto circa quelli confinanti della Marca d'Ivrea, tutto vien contraddetto da Adalboldo scrittore contemporaneo e tedesco, la cui testimonianza non verrà ricusata dal dottor Leo. Dice egli in primo luogo, che nella Dieta di Pavia i più caldi e più zelanti promotori dell'elezione d'Ardoino furono i vescovi (1): qualunque pertanto fossero le cause di questa caldezza e di questo zelo, essi non *cedettero*, come scrive il dottor Leo, *alla forza*, ove d'altra forza, d'altra violenza si tratti, che di quella de' donativi. Inoltre nel nominare quelli fra i prelati d'Italia che primi si sperginarono ad Ardoino in favore del nuovo re di Germania, lo scrittore Adalboldo non comprende nè il vescovo d'Ivrea, che più degli altri (e non a torto) era stato avverso ad Ardoino prima della elezione sua, nè altri de' vescovi circonvicini, tolto Leone di Vercelli, antico e costante nemico di Ardoino (2).

Quanto agli altri Grandi che lo nominarono, egli è evidente che il marchese d'Ivrea, sia per le ricchezze sue dalle quali piover potevano i guiderdoni su quegli avarissimi principi, sia per l'antica dignità di Conte del sacro palazzo, che essi erano stati avvezzi a riverire, non poca influenza usar dovette nella Dieta nel maneggio de' loro suffragi. Ma il dottor Leo seguì sopra di ciò la versione di Landolfo seniore, il quale scrive che pochi fra essi consentirono ad Ardoino, ed anzi che nello squittino, il partito fu vinto per esso quasi di furto (3). Questo vuol dire ch'egli non fu eletto a pieni voti: e sia pure: esso adunò pur sempre voti bastanti per essere eletto. Del resto Landolfo era di parte contraria ad Ardoino, ed al dire del Muratori e del Giuliani esso è scrittore di poca fede, e che soventi volte favoleggia. Ma le parole di Arnolfo, storico di ben altra fanna (4), sono molto più esplicite.

(1) « *Episcopos qui in electione illius prae ceteris aestuantes et sitientes fuerunt etc.* » (ADALB. *Vita Heinr. Imp.* § 15 l. c.).

(2) ADALBOLDUS *ibid.* sul fine del §.

(3) « *Interea Ardoinus nobilis et marchio altus locuples in auro, sed scientia parvus, armis prudens, ingenioque ignarus, paucis consentientibus Italiae Primatibus, Ottone iam mortuo quasi furtim in regem surrexerat.* » (LAND. *Sen. l. c.*).

(4) « *Duo lamen prae LANDULPHO, scriptorem hunc (ARNULPHUM) magis commendant; alterum est LANDULPHI opus fabulis, anacronismis, etc. non carere: quum contra ARNULPHUS illorum.*

Narra egli infatti, che tutti i voti s'accoriarono non solo per eleggere Ardoino a re d'Italia, ma per salutarlo Cesare, cioè *imperatore presunto*: e quindi che esso prese a visitare tutto il reame, usando dovunque l'autorità regia (1). Vero è che la dissidenza di questi scrittori contemporanei, sopra l'elezione del marchese d'Ivrea, fece credere a taluni che l'autorità del nuovo re fosse ristretta soltanto alle provincie più occidentali del regno, ma un diploma di lui che produrremo più tardi, serve di prova alla narrazione d'Arnolfo (2).

Al postutto queste opinioni del professore di Halla sono la conseguenza dell'altra, da lui posta per base, cioè che Ardoino sorse unicamente per fatto suo proprio (3). Unicamente no certo. Perciocchè se si considera alla rapidità con cui Ardoino giunse al trono, se si bada siccome in meno tempo che un mese, fra quelle difficoltà di distanze e di passaggi, la notizia inaspettata della morte di Ottone III dovette da Roma giungere ad Ardoino in Ivrea, e questi adunare i suoi fidi nella sua Marca, spiccarsi da que' gioghi, scendere improvviso a Pavia: quivi convocati i suoi *Pari* da tutte le provincie del regno, vincere i dissidenti, careggiare con lusinghe e con doni gli aderenti, accattarsi insomma i necessari suffragi della Dieta, farsi gradire, eleggere e coronare: se, dico, a tutto questo si bada, non sembra che il tempo bastasse a tante cose, e siamo necessariamente condotti a pensare che una causa più potente e più grande abbia in qualche singolar modo favorito il già sbandeggiato Ardoino, ed abbia vinto gli ostacoli che si frapponevano alle sue mire ambiziose.

Per verità gettando lo sguardo sovra gli avvenimenti che andarono uniti a quest'inopinata elezione, noi vedremo, che un fatto domina in quel tempo ogni altro fatto, e vantaggia per la sua importanza nella scelta di un re, ogni raggio, ogni arte, ogni virtù, che per le altre cariche sue, per le sue sterminate ricchezze usar potesse sovra gli altri principi il marchese d'Ivrea. Quest'è la volontà ferma, diretta, e già

« temporum gesta satis accurate exhibeat etc. » (MURAT. *Praef. in Hist. Arnulphi* R. I. T. IV. cfr. *causd. Praef. in LANDULPHI Senior. Hist.* T. eod. — GIULINI, *Mem. di Milano*, I. III. p. 21 e 22).

(1) « Tunc Ardoinus quidam nobilis Ipporegiae marchio a Langobardis Papiae eligitur, et vocatus Caesar ab omnibus regnum perambulat universum, regio iure cuncta pertractans » (ARNULPHI *Lib. I. c. XIV l. c.*).

(2) Docum. n.º 26 nell'Append.

(3) LEO l. c. sul principio del Capitolo II.

gigantesca, manifestatasi nella giovine popolazione italiana, d'affrancarsi dalla dominazione germanica, sotto la cui ombra i grandi vassalli del regno, e sovra gli altri gli ecclesiastici, l'oppressavano. Conciossiachè per una di quelle tante contraddizioni di che sono piene le storie di quegli anni, l'arricchimento del clero che le *esenzioni* Ottoniane avevano prodotto, e che fu causa più tardi dell'emancipazione italiana, aveva in sulle prime servito ad opprimere in altra guisa il popolo, il quale pertanto avversava questa nuova foggia di governo, e la dominazione germanica che ne era stata la causa.

Di quest'avversione, di quest'ardenza contro il dominio straniero, solenne e spontanea manifestazione aveva dato testè la gioventù italiana assalendo ed inseguendo tumultuariamente da Roma insino a Verona i Tedeschi che recavano in Germania gli avanzi del giovine imperatore morto, come si è detto, in Paterno (1). Ma già in altri tempi, e prima ancora della calata di Ottone I, le crudeltà commesse da Arnolfo, bastardo dell'imperatore Carlomanno, e primo fra i re di Germania che usurpasse la corona dell'Italia e dell'impero (2), avevano desto contro la signoria germanica l'odio come di Roma, così di tutte le città del reame italiano.

Favorito da quest'odio e forse dalla propria virtù Berengario I duca del Frinli, principe italiano (3), restituiva nella persona sua alla sua patria l'una e l'altra corona: spento poi dalla perfidia di alcuni suoi famigliari, un lungo intervallo lasciò vacante l'impero. Ma nel frattempo perenne argomento a quelle fiamme porgeva la signoria de' principi provenzali e borgognoni chiamati dall'incostanza degli elettori al trono d'Italia. Noi già vedemmo come il re Ugo, uno di essi, fosse cacciato ignominiosamente da Roma dagli ammutinati cittadini (4).

(1) « Tunc tristis turba dilecti senioris corpus comitata, magnas bellorum asperitates VII dies » continue perpessa est, nullaque securitatis certitudo ab hostibus concessa est, nisi tum dumtaxat, quando ad Bernam (*Veronam* MURAT.) perveniunt civitatem » (THIETMARI *Chron.* Lib. IV. § 31 l. e.). — Cfr. ADALBOLD. *Vita Heinrichi Imp.* § 3. l. e.

(2) Nel Concilio Romano tenuto da Papa Giovanni IX nell'anno 898, l'elezione imperiale di Arnolfo venne annullata (PAGI Franc. *Breviar. gestor. Pont. Romanor.* T. II. p. 142).

(3) MURAT. *Ann.* 883. — « Italus Princeps exercitus armis » così l'appella l'Anonimo Pancgi-rista Lib. I. vers. 23. apud PERTZ *M. G. H.* T. VI; e quindi il medesimo al Lib. II. vers. 34: « Quicque Berengario regnum concessit avitum ».

(4) Vedi Capitolo V.

Finalmente altri due principi nazionali conseguivano la corona d'Italia, Berengario II, re forse più sventurato che colpevole, ed Adalberto suo figlio associato al trono dal padre. Questi fu viva immagine dell'odio e della resistenza contro l'occupazione tedesca. Imperciocchè la viltà de' Grandi d'Italia che aveva venduto il regno ad Ottone I, non fece piegare il generoso Adalberto. Privo di provincie e d'armati, ridotto a pochi fedeli, ed a que' raccoglittici che l'oro suo e le vessazioni con cui i Tedeschi insolentivano contro le popolazioni, a lui procacciavano, rigettava questo re ogni proposta di sommissione e di concordia col re forestiero: nè a ciò contento, coll'accendere la guerra qua e là su vari punti del regno, dalle frontiere delle Gallie al Tevere, e dal Lido Italico all'Alpi Graie, non solo diede, finchè gli durò la vita, danni e molestie agli occupatori della sua patria, ma aizzò e vivo mantenne l'odio contro al loro dominio. Così appena coronato Ottone I a imperatore de' Romani, portavasi Adalberto a Roma, e favorito dal pontefice sommoveva quel popolo contro l'imperatore novello.

Ivi una di quelle fazioni terribili, che quella città travagliavano, associando l'ira sua di parte a quella che seco portava Adalberto, aggiunse esca alle proprie sue fiamme. Già noi vedemmo siccome, spenti poi il glorioso Adalberto ed Ottone I, durasse in Roma sotto il regno degli altri due Ottoni, l'opposizione al dominio straniero, e come sotto i papi tedeschi vieppiù s'infervorassero i Romani in quell'odio (1), che mai nè per supplizi, nè per sconfitte, nè per la morte stessa di Ottone III, più non posava. Nudrita pertanto in esso, era ne' primi anni del secolo XI la generazione italiana cresciuta a vita novella. Da movimenti accaduti nelle varie città d'Italia durante il regno del secondo Ottone, e la minorità del terzo, specialmente da' fatti occorsi in Vercelli negli ultimi anni del secolo X, noi vedemmo siccome dovunque il desiderio della individuale libertà, a dispetto delle nuove leggi Ottoniane a pro del servaggio (2), avesse fatto scemare il numero degli schiavi: Ardoino, cui nella guerra ch'è mosse per privati suoi fini a Pietro vescovo di Vercelli, la propizia fortuna aveva nel 996 reso capo di quelli fra gli schiavi della chiesa Vercellese che avevano ottenuto la libertà,

(1) CARLI, *Antich. Italiane*, P. IV. p. 23, e passim nelle pagine precedenti.

(2) PERTZ, *Monum. G. II.* (Legum).

nel sortir vincitore di quella lotta, avea conseguito il favore di tutti coloro che anelavano farsi liberi, e che nella indipendenza dalla dominazione germanica, e nella elezione di un re italiano scorgevano un mezzo di ottener quello scopo. Non è quindi strana cosa, che stipato, direi così, da questo favor popolare, reggesse dapprima Ardoino contro l'ira d'Ottone III: che all'ombra delle sue fortezze, e difeso dalle rupi della sua Marca d'Ivrea, sfidasse la potenza di quell'Augusto implicato in più gravi bisogni, e mal gradito a' principi ed alle popolazioni d'Italia; e così si facesse beffe delle sentenze, che l'avidità del vescovo Leone avea strappato allo invelenito imperatore. Nè punto sarà più difficile ad ammettersi che dopo la morte di Ottone, Ardoino, il quale di certo era men semplice uomo che non avvisarono (al dire del cronista Landolf) i principi d'Italia (1), rappattumatosi con Warmondo e cogli altri vescovi che lo avevano scomunicato, potesse in un baleno cingerè il capo di quella corona alla quale la giovane popolazione italiana con concorde desiderio lo veniva appellando.

Rettamente pertanto argomentò lo storico Leo (2), che l'elezione di Ardoino fosse un fatto speciale di quell'età, e non la conseguenza della solita incostanza de' grandi vassalli del regno, che tanti principi or nazionali or forestieri aveva fatto succedere sul trono d'Italia. Ma non parimenti felice fu l'altra deduzione di quello scrittore, cioè che Ardoino per *fatto suo proprio*, e non per opera di una parte della popolazione venisse esaltato a quel grado. Le cose fin qui discorse dimostrano apertamente l'opposto. Non mai la potenza del marchese d'Ivrea avrebbe bastato a fargli conseguire i voti di tutti gli elettorig (3), ove egli non avesse avuto per se i *secondi militi*, cioè l'ordine secondo de' vassalli (4), che abbracciava una gran parte della libera popolazione. Egli si vuol dunque necessariamente conchiudere, che costoro i quali già avevano preso l'armi contro i grandi vassalli (5), li costrinsero ad eleggere Ar-

(1) LANDULPHI Senior, *Hist.* l. c. — All'incontro SCHEIDT (in *Orig. Guelf.* Lib. II. c. 8. § 2) dice d'Ardoino: « Arduinus ex marchionibus Segusiensibus (metti *Taurinensibus*) ortus, Princeps » potens, et virtute ingenioque eminens ».

(2) *Storia degli Stati Italiani* Lib. IV. Cap. I. § III. Vedi la Prefazione di questi Studi.

(3) ARNULPHI, *Hist.* Lib. I. c. XIV l. c.

(4) « Secundos vero milites pene omnes in periculi crimen coegisso. » (Docum. d'Ivrea n.º 9 nell' Append.).

(5) Vedi al Capitolo III di questi Studi.

doino, e che i Grandi si consolarono di questa violenza, colle avere speranze poste nel principe che forzatamente appellavano al trono.

Considerata in tal guisa l'elezione d'Ardoino viene chiarita come il naturale effetto della condizione de' tempi; perciocchè non era egli per gl' Italiani nè il sognato erede del trono de' Berengari, nè il santo ed incivilito principe favoleggiato da' nostri seicentisti, ma quegli bensì nel quale per le prove già fatte, la risorgente popolazione italiana idoleggiava la propria indipendenza, voto comune, e frutto di una verace rivoluzione, quella cioè, che non pel capriccio di una fazione, o per la congiura di alcuni potenti si opera, ma che una comunanza di bisogni e di tendenze genera spontanea e indomabile negli animi de' molti. E che tale si fosse quella avvenuta negl' Italiani, ben lo dimostra la caduta stessa del re Ardoino, occorsa non senza sua gloria dopo dodici anni di lotta, la qual caduta non impedì agl' Italiani l'arrivare a quello scopo a cui traevano, cioè all'affrancamento de' loro Comuni.

Le quali osservazioni rispetto alla popolarità di Ardoino sono tanto più ammissibili, in quanto che, siccome abbiamo accennato colla scorta di uno scrittore contemporaneo, l'elezione sua fu subito riconosciuta da tutte le provincie del regno (1).

A questo tempo ragioni vuole che da noi si riferisca una delle tre monete coniate sotto il regno d'Ardoino (2), che il cavaliere di S. Quintino ci ha fatto conoscere, sebbene veruna di esse non porti nè data, nè altra precisa indicazione del punto in cui fu battuta (3). Troppo la è cosa evidente siccome star doveva a petto al nuovo re di far uso, appena eletto, del diritto regale di battere moneta, per dichiarare a tutto il reame l'eccelsa dignità da lui conseguita.

Diede quindi principio al suo regno col largheggiare, secondo l'uso accomunato dagli Ottoni, di donazioni e di privilegi verso i Grandi di Chiesa, i quali più degli altri principi erano stati caldi e zelanti della di lui elezione (4). Da vari diplomi, che tuttora rimangono, concessi da

(1) « Regnum perambulat universum, regio inre cuncta pertractans. » (ARNULPHI *Hist.* Lib. I cap. XIV).

(2) Vedi il Proemio di questi Studi sul principio.

(3) *Lezioni intorno ad argomenti numismatici* di GIULIO DI S. QUINTINO (Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, an. 1842, T. V. Serie II.).

(4) ADALBOLDI, *Vita Henrici Imp.* § 15. ap. PERTZ *M. G. H.* T. VI.

Ardoino in questi primi tempi del suo regno (1), siamo chiariti di due punti essenziali per le cose che quindi seguirono: cioè in primo luogo de' patti ch'erano, siccome si può argomentare, seguiti tra esso ed i grandi ecclesiastici per averne favorevoli i voti, e della insaziabile avidità loro, per la quale non contenti alle donazioni d'Ardoino, fra breve si rivolsero a patteggiare nuovi accordi col re di Germania. Quindi, che i principi laici, verso de' quali non risulta che Ardoino fosse largo di nuovi onori, trassero probabilmente da questo un motivo per accostarsi anch'essi al re sopraddetto, delusi per avventura nelle speranze concepite di poter governare il re Ardoino a loro talento.

Ma sopra gli altri grandi ecclesiastici premèva ad Ardoino di rendersi benevolo Arnolfo arcivescovo di Milano. Il quale salito pochi anni prima (2) pel favore di Ottonè III all'arcivescovato di quella città, era uomo per indole e per proprio interesse affezionatissimo alla parte tedesca. Tornato, come già si è detto, dalla legazione alla corte d'Oriente, erasi Arnolfo trattenuto in Roma dopo la morte di Ottonè, sì che al suo arrivo in Milano, Ardoino era già salito sul trono (3). La potenza di lui e la dimostrata parzialità per gli Ottoni, davano di molto pensiero al nuovo re italiano, ond'è che appena fu egli informato del ritorno dell'arcivescovo, si fece ad incontrarlo per via; adoperandosi con modi e con profferte di farselo amico (4). Ancora un'altra cagione moveva Ardoino a cotali dimostrazioni. Era illustre privilegio fra i molti di cui godevano gli arcivescovi di Milano, quello di coronare i re d'Italia. Sopra ogni cosa pertanto star doveva a petto al re Ardoino di veder confermata col consenso dell'arcivescovo Arnolfo la coronazione sua, eseguita all'insaputa e durante l'assenza di quello, da un altro vescovo.

Dissimulò l'animo suo quell'astuto arcivescovo, corrispondendo buone parole alle cortesie d'Ardoino (5), e intanto non impedì (forse perchè

(1) I Diplomi d'Ardoino che ho potuto raccogliere sono stati pubblicati nell'Appendice.

(2) UGHELLI, *Ital. Sacra*, T. IV. col. 99.

(3) « Arnulphus Archiep. quo tempore Ardoinus creatus fuit rex, nondum a legatione » Constantinopolitana redierat. » (*Mem. Basil. Ambr.* p. 232). — Cfr. CALCHI *Hist. Lib.* VI. p. 121, et LANDULPHI Senior. *Hist. Lib.* II. l. c. p. 80.

(4) « Cognito iam dicti Praesulis reditu (Ardoinus) occurrit ei in itinere obvius, securitate » quanta valuit, sibi illum applicare procuraas. » (ARNULPHI *Hist. Lib.* I. c. XIV. l. c.) « Cum » Arnulphus Archiep. Constantinopoli rediisset, nullo non officii genere eum sibi conciliare Arnulphus studuit. » (*Trist. CALCHI l. c.*).

(5) GIULINI, *Mem. sullo Stato di Milano* P. III. p. 23-24.

non potè impedirlo) che Milano riconoscesse la podestà del re novello. Un documento dell'archivio capitolare di Sant' Ambrogio, citato dallo storico Giulini, dimostra che nel corso di quell'anno 1002 le pubbliche carte erano in quella città segnate col nome del re Ardoino (1), la qual cosa distrugge la favola spacciata da Landolfo il vecchio, e ripetuta da quasi tutti gli scrittori posteriori, che l'arcivescovo appena giunto in Milano convocasse una Dieta in Roncaglia, nella quale rigettata l'elezione di Ardoino facesse chiamare re d'Italia Arrigo re di Germania (2). Il semplice confronto delle date basta ancora a chiarir falsa quest'asserzione, perciocchè Arrigo di Baviera non fu innalzato al trono della Germania, che vari mesi dopo il ritorno d'Arnolfo, siccome fra breve verrà dimostrato.

Quanto poi al privilegio di coronare i re d'Italia, ella è cosa notissima, che gli arcivescovi di Milano fin da' tempi di Carlo Magno ne erano investiti, sia che la coronazione avesse luogo in Milano, in Monza, od in Pavia. Che assente l'arcivescovo, questo privilegio passasse all'abate di Sant' Ambrogio, se in Milano, all'arciprete del Capitolo se la coronazione facevasi in Monza, apparisce egualmente dalle storiche testimonianze addotte dal Muratori, e che sarebbe cosa vana di qui ripetere (3). Circa a Pavia sebbene manchino somiglianti prove, ragion vuole si creda che nell'assenza dell'arcivescovo di Milano un tal diritto spettasse al vescovo di quella città (4): e Tristano Calchi sembra accennare tal cosa per la coronazione d'Ardoino, dicendo, che Guido vescovo fu in quel tempo arricchito dal nuovo re di amplissime donazioni: il che poi pienamente dichiara lo scrittore della *Papia Sacra* (5).

(1) « Permuta fatta fra i dodici Proti Decumani, custodi ed ufficiali della Basilica di Sant' Ambrogio, ed un certo prete Pietro del luogo d'Abiate, assistito da un delegato dell' Arcivescovo Arnolfo. *Dat. Mediol. Arduinus gratia Dei rex, anno regni eius primo, tertidecimo kal. Iulius, Indict. quinta decima.* » (GIULINI ivi).

(2) LANDOLFO Sen. *Hist.* Lib. II. c. 19. l. c. p. 82. Quest'asserzione fu accettata, come di dovere, dagli Storici Tedeschi più moderni; fra questi il MASCOVIO (*Comment. de rebus Imper. Roman. Germ. de Henrico I Imp.*) mette nella bocca dell' arcivescovo Arnolfo queste parole dette nella supposta Dieta: « Proximum libertati esse Germano Principi parere! » Abbiamo dal GIULINI (*Mem. Ist. di Milano* P. III. p. 489) che la prima Dieta no' prati di Roncaglia fu probabilmente quella tenuta da Arrigo II imperatore nell'anno 1055.

(3) MURATORI, *De Corona Ferrea* in T. II. Anecdol.

(4) « Nitra coronabat tua, quondam Papia reges. » (*Papia Sacra* p. 20. P. I).

(5) « Ingentia praedia Papiensi Ecclesiae donavit (Arduinus), cuius tum Praeses Guido annu-

Ma che per decreto di S. Gregorio Magno, l'arcivescovo di Milano nella vacanza del trono d'Italia, fosse privilegiato di eleggere co' suoi sulliraganci, quindici giorni dopo la morte del re precedente, e d'incoronare chi più gli piacesse a re d'Italia, questo è un sogno; che il Sigonio appoggiato a non so che *Annali ms.* (in dialetto milanese, epperchè non antichi) audè spacciando, ripetuto da molti scrittori milanesi, e disdetto da altri molti non milanesi, e fra questi dall'annalista Le-Cointe, il quale non dubitò di chiamar fittizio un tal privilegio (1). Altronde ove pure una qualche costituzione favorevole agli arcivescovi di Milano fosse stata bandita da' pontefici per l'elezione de' re d'Italia, questa non sarebbe stata opera di Gregorio I, a' cui tempi i Longobardi, per lo più Ariani di fede, signoreggiavano gran parte dell'Italia, ma piuttosto di Gregorio V (2), il quale, come papa tedesco e fatto pontefice da Ottone III, avrebbe così inteso agevolare la via alle pretensioni germaniche. Ed egli è a dire, ciò ammesso, che la Dieta Italiana non accettò una sì importante innovazione, per cui sarebbe rimasta priva di uno de' suoi più splendidi diritti, a quel modo medesimo, che la Dieta Germanica non volle perdere il suo nell'elezione di Arrigo il Santo, il quale sebbene pretendesse ottenere il trono della Germania per diritto di successione, non fu da quella riconosciuto fino a che non ebbe favorevoli i voti di tutti i popoli di quel reame (3).

Del resto questa incerta costituzione di Gregorio V, i cui atti sono perduti, ed alla quale si rappicca da taluni la favola de' sette elettori dell'impero, non avrebbe lasciato al metropolitano milanese altro privilegio se non quello di coronare il re eletto, il quale doveva essere per gl' Italiani quegli medesimo, che la Dieta di Germania aveva eletto per proprio re, e così per presunto imperatore (4); costituzione con-

» pabatur » (*Trist. CALCHI Hist. Lib. VI. p. 121*). — Vide etiam GAUDENTII Merulae, *De Gallorum Cisalp. antiquitate* p. 95. — FLAVIA Papia *Sacra* P. I. p. 53.

(1) « At ubi legitur hoc privilegium? fictitia profecta sunt etc. » (*COINTII Ann. Eccl. Franc. an. 774*).

(2) CASTIGLIONI, *Note al Regno d'Italia* d'Em. TESAURO, nota (506).

(3) « Henricus ad regnum, quamvis familiae iure sibi deberi contenderet obtinendum, singulorum populorum suffragia colligere opus habuit. » (*MASCOVII Comment. Lib. IV de Henr. II* p. 113).

(4) CASTIGLIONI, *Note al Regno d'Italia*, nota (535).

traria al diritto delle genti, epperiò impossibile, o, come si è detto, non accettata, nè messa in uso in que' tempi (1).¹

Ben più probabilmente pertanto il diritto di presiedere alla Dieta di Pavia, per l'elezione del re d'Italia, e quello di coronare l'eletto, potevano pretendere gli arcivescovi di Milano; dall'essere stata la prima Dieta Italiana tenuta nell'anno 876, dopo la morte di Lodovico II imperatore, da Ansperto arcivescovo di quella città, il quale co' vescovi, abbatì, e conti e cogli altri ottimati d'Italia convenuti in Pavia, chiamò al trono d'Italia l'imperatore Carlo il Calvo (2), sia che con quell'atto avessero inteso que' principi di rimettere gl'Italiani nell'antico diritto di eleggere i propri re, che forse sotto la dominazione de' Carolingi più non usavano se non concorrendo alle Diete generali dette i *Campi di Marzo* della monarchia de' Franchi, o sia che in tal guisa avvisasse l'arcivescovo Ansperto impossessarsi di un nuovo diritto nel presiedere la Dieta degli elettori.

Al postutto adunque avrebbe potuto lagnarsi l'arcivescovo Arnolfo, che la Dieta Italiana fosse stata convocata e presieduta da altri che da lui; la elezione fatta ad insaputa sua e la coronazione del nuovo re eseguita da un altro vescovo, come giustamente poteva la Dieta Italiana invocare la necessità de' tempi, e l'assenza dell'arcivescovo, mandato ambasciatore a Costantinopoli; nè altro che questo significavano per avventura le dimostrazioni, colle quali invano cercava Ardoino di rendersi benevolo lo stesso arcivescovo.

Chechè ne sia, se quindi a poco Arnolfo si volse a favorire il nuovo re di Germania, ed a procacciarsi aderenti per accoglierlo in Italia, ben più possente ragione a ciò lo spinse, che non si fosse quella di un' offesa giurisdizione, che non poteva distrurre i dritti della Dieta. Perciocchè gli spessi conflitti, e le dissensioni che sorgevano tra gli arcivescovi di Milano ed i *buoni uomini* di questa città per l'esercizio dell'autorità comitale, rendendo ad Arnolfo necessario l'appoggio di un re, cui premesse di serbargliene il possesso, egli era dal proprio in-

(1) CARLI, *Antich. Ital.* P. IV. p. 31.

(2) « Nos quidem Anspertus, cum omnibus Episcopis, Abbatibus, Comitibus ac reliquis, qui » nobiseum convenerunt Italici regni Optimales Nos unanimiter vos (Carole Auguste) » protectorem, dominum ac defensorem omnium nostrum, et Italici regni regem eligimus etc. » (*Acta Concil. Ticin. an. 877. R. I. T. II. P. II. pag. 150*);

teresse condotto a far salire sul trono d'Italia un re di Germania, il quale per avere la sua sede oltremonti, lasciasse maggior campo alla di lui ambizione, e non scendesse, che invocato, a favorirlo nelle necessità sue contro i cittadini: mentre un re italiano, accetto come Ardoino alla risorgente popolazione, e che aveva dati saggi dell'animo suo contro le esagerate pretensioni de' Capi delle Chiese, poco poteva gradire al suo desiderio.

Ma mentre l'arcivescovo di Milano covava in segreto il suo mal animo verso Ardoino, volgendo le perfide sue speranze al futuro re della Germania, questo reame stava in preda alle civili discordie per la scelta di un successore al morto Ottone III.

Molti erano i pretendenti. Fra i maggiori, Arrigo di Baviera, Ottone duca della Carinzia e marchese di Verona, Ermanno duca di Allemagna e d'Alsazia, Teoderico della Lotaringia, ed Eccardo marchese della Turingia (1).

Vantavano origine regia, Arrigo ed Ottone discendenti, quegli pel padre e pell'avolo, questi per la madre Luitgarda figliuola di Ottone I imperatore, da Arrigo l'Aucnpe primo re della Germania, della linea Sassonica (2); fra gli altri, ampiezza di dominio il duca Ermanno, e parentela co' re della Borgogna, prodezza in guerra (singolar pregio presso i Germani) e numerose vittorie, il marchese della Turingia (3); tutti dovizia di beni, lungo seguito d'amici e di congiunti, sì che turbati parteggiavano i popoli, incerti pendevano i primati del regno.

Ma più d'ogni altro fra i pretendenti metteva Arrigo fidanza ne' titoli, che lo chiamavano al trono. Figlio d'altro Arrigo, detto *il Rissoso*, duca della Baviera, quegli che a' tempi degli Ottoni II e III aveva turbato il reame, e di Gisla nata da Corrado re della Borgogna (4), godeva Arrigo di ben altra fama, che il padre. Cresciuto (secondo la scienza d'allora) a' buoni studi da Wolfango vescovo di Ratisbona (5), aveva egli nome di pio e di saggio: a questo pregio altro aggiungevane

(1) THIETMARI, *Chron.* Lib. V. ap. PERTZ T. V. nn. I. 2 et seq. — ADALBOLD. l. c. n. 5. — *Vita Meinwercii Episc. Paderb.* cap. XI. ap. LEIBNITZ R. B. T. I. p. 511. — STRUVII, *Corp. Hist. Germ.* T. I. *De Henr. II.* § 2. — MASCOVII *Comm. de Henr. II.* Lib. IV. pag. 108-109.

(2) STRUVII l. c. — MASCOVII l. c.

(3) THIETMARI *Chron.* Lib. V. nn. 2 et 4. — MASCOVII l. c.

(4) MASCOVII l. c.

(5) THIETM. *Chron.* Lib. V in *Prologo* l. c. — BARON. *Annal.* 1002 n. VII.

possente a conciliargli favore, quello dirò di aver governata pacificamente la Baviera, benefico verso le Chiese, mantentore severo delle leggi (1). Attenuavano, è il vero, queste doti d'Arrigo, una gracile salute, pe' mali ereditari da' quali di frequente andava egli assalito (2), nè si ristavano gli avversari di predicarlo per questo incapace del regno, e di renderlo dispregievole alla Germania (3): ma l'arte ond'era il giovane Arrigo provveduto, sopperiva al danno che gliene poteva incogliere. Così fin da principio, per avere un pegno del trono, impossessavasi delle insegne imperiali, ch'egli con blandizie, con promesse o colla violenza otteneva da' proceri del regno, tornati d'Italia accompagnando le spoglie di Ottone III (4), così coll'arte ancora vinceva Ottone di Verona, il quale preso a' modi ossequiosi d'Arrigo, scambiava la parte di pretendente a quella di primo fra i di lui zelatori (5).

Con tutto ciò lunga ed accanita profferivasi la lotta fra i pretendenti. Impossibile in tanto subbuglio l'adunare in Dieta generale i Grandi del regno, i quali qua è là, a seconda del loro parteggiare, convenivano in privati comizii, fermento alla guerra cittadina già rotta in qualche provincia (6).

Come d'ogni cosa trionfasse l'avventurosissimo Arrigo, come eletto dalla di lui fazione, venisse coronato da' suoi in Magouza, come morto Ecardo il più animoso de' suoi avversari, gli altri c' conduce a inau-

(1) « Is tunc temporis ducatum in Baviensi regno tenebat, populum pacifice regebat ... »
 « leges et religiones magnificabat. Tandem sic in ducatu vixit, quod omnibus placuit, ut de ducatu transduceretur ad regnum etc. » (ADALBOLDI, *Vita Henrici II.* ap. PERTZ T. VI. n. 1).
 — Cfr. *Vita Meinwerchi* l. c. et THIETMARI *Chron.* Lib. V. n. 8. l. c.

(2) « Colicam infirmitatem ab antecessoribus suis sibi ingentam, gravissime patitur. » (ADALB. u. 21). — Cfr. *Ann. Hildsh.* ap. PERTZ T. V. ad ann. 1013. — *Cesar. Numburg.* ap. STRUDEM l. c. p. 320.

(3) « Maxima pars Procerum, qui his interfuerunt exequiis (nempe Ottonis III) Herimanno duci auxilium promittunt ad regnum acquirendum, et faciendum, Henricum mentientes ad hoc non esse idoneum propter multas causarum qualitates. » (THIETM. *Chron.* Lib. IV. l. c. n. 34).

(4) « Quos (Proceres) singulatim ut se in dominum sibi et regem eligere voluissent, multis promissionibus hortatur; et corpus imperatoris cum apparatu imperiali, lancea dumtaxat excepta, quam Heribertus Archiepiscopus clam premittens, suam sumpsit in potestatem. Archiepiscopus autem custodia parumper detentus etc. » (THIETMARI in *Chron.* IV. l. c. p. 782. n. 31).

(5) « Cum post mortem Cesaris iure consanguinitatis et ætatis, virtutumque maturitate ab Henrico tunc duce in regem eligeretur, ... eundem primus per internuncios, ac per se ipsum, quasi ad hæc aptiorem sibi preposuit, fideliterque semper adiuvit. » (THIETM. *Chron.* Lib. V. n. 16. l. c.).

(6) MASCOV. l. c.

gararlo nel settembre di quell'anno 1002 in Aquisgrana, non è fatto mio di raccontarlo (1). A me basterà (ed era pur troppo necessario) questo rapido sguardo su' primi fatti di un principe, le cui susseguenti geste, oggimai troveremo connesse con quelle che siam per descrivere, avvegnachè destinato dal Cielo a ridestare novelle tempeste in Italia, alla quale per l'opera specialmente di Arnolfo arcivescovo di Milano il convitava l'infanzia de' principi del reame (2).

Appena infatti l'elezione di Arrigo vi fu nota, tutte le sozze voglie e le vili passioni della maggior parte de' Grandi vi si ridestarono. Vero è che Ardoino (se diam fede agli scrittori tedeschi) co' suoi modi concorreva ad inasprire contro di se l'animo loro. Avuto non so che diverbio col vescovo di Brescia, narra Adalboldo, che afferratolo pe' capelli in terra lo stramazasse (3), mostrando con quest'atto d'essere uomo per ira subito e tracotante. Ma quest'eccesso (se vero, poichè non è riferito da verun Italiano, ma solo da quello e da altri scrittori tedeschi) quest'eccesso, ripeto, non basta al certo a scolpare i principi d'Italia, chè anzi può parere strano, che il Muratori lo ammetta quasi come una loro discolpa, mentre Arnolfo storico di quel secolo, Italiano, e molto in grado di conoscere il vero, scrisse apertamente, che l'avarizia fu quella che spinse i principi del reame a invitare il re tedesco al trono d'Italia (4). Checchè ne sia di questo fatto contro il vescovo di Brescia, di cui forse a torto viene tacciato Ardoino, certa cosa è che egli era uomo di carattere impetuoso, e ben lo dimostrano le sue divergenze avute co' vescovi del suo marchesato, il modo stesso con cui ottenne la corona, e gli ulteriori suoi fatti che siam per narrare. Che se l'impetuoso carattere giovò talvolta al re italiano per antivenire, colla rapidità de' suoi movimenti, le menè e gli apparati de' suoi avversari, molto più spesso dovette riuscirgli fatale, sia col disgu-

(1) TRIETMARI, *Chron.* Lib. V. n. 12. p. 796 l. c. — La solenne inaugurazione d'Arrigo a re di Germania ebbe luogo addì 8 di settembre ann. 1002: quella di Ardoino a re d'Italia era stata eseguita il 15 di febbrajo dell'anno medesimo.

(2) CASTIGLIONI, *Note al Regno d'Italia* di Em. TESAURO, p. 665 (nota 534).

(3) « Quadam namque die Episcopum Brixensem ad se venientem, et nescio quid ratiocinari » volentem, ut coepit ei ratiocinatio displicere, per capillos arripuit, et humo tenus quasi bubul- » eum vilissimum deiecit. » (ADALBOLDI, *Vita S. Henr.* n. 15. l. c.).

(4) « Principes regni fraudulentè iocedentes Henrico latenter favebant, avaritiæ luera » sectantes » (ARNOLFI *Hist.* Lib. 1. c. 15. l. c.).

stare i suoi aderenti, che col suscitare a lui nemici nelle inquietate popolazioni, e servir di pretesto all'avarizia de' principi suoi vassalli, per vendere la loro fede al re forestiero.

Ma fra questi vassalli, i più caldi parteggiatori di Arrigo, furono i vescovi, i quali (e in ciò meglio apparisce quanto fosse la corruzione de' Grandi, soprattutto di Chiesa in quel tempo) come primi e più accesi eransi manifestati nell'elezione d'Ardoino, così primi e più accesi si profferivano a tradirlo (1).

Tuttavia non tutti osarono mostrare sfacciatamente il viso al re d'Italia, che anzi alcuni pochi soli dapprima si dichiararono aperti di lui nemici: questi furono l'arcivescovo di Ravenna, ed i vescovi di Modena, di Verona e di Vercelli: gli altri che segretamente parteggiavano per Arrigo erano l'arcivescovo di Milano, i vescovi di Cremona, di Brescia, di Pavia e di Como (2), fra i quali i due ultimi erano stati più specialmente beneficiati dal re Ardoino. Segreto e cauto animatore di questa congiura era l'arcivescovo Arnolfo (3): aperto e capo Tietbaldo, cioè Tedaldo marchese di Modena, l'avolo della contessa Matilde (4): guidatore e maneggiatore Leone vescovo di Vercelli, antico e infestissimo nemico d'Ardoino (5).

Cominciarono pertanto costoro or con messi, or con lettere a volgersi al nuovo re della Germania, richiedendolo con ipocrito zelo di soccorso per l'*oppressa patria*, e pregandolo, ove impacciato in altre bisogne non potesse scendere egli stesso in Italia, fosse contento mandare alcuno

(1) ADALBOLDI, *Vita Henrici* l. c.

(2) « Quapropter quidam pro coronatione eius poenitentia ducti, regi Henrico alii legatos alii literas transmittunt In voluntate huiusmodi aliqui manifesti, alii erant occulti. Tiedoldus namque Marchio, et Archiepiscopus Ravennas, et Episcopus Mutinensis, Veronensis et Vercellensis, aperte in regis Henrici fidelitate manebant. Archiepiscopus autem Mediolanensis et Episcopi Cremonensis, Placentinus, Papiensis, Brixienensis, Comensis, quod volebant, maiori festabant. » (ADALB. *Vita S. Henr.* § 15. l. c.).

(3) FIORENTINI, *Mem. di Matilde*, p. 8.

(4) MANZI, nota (a), pag. 12 al FIORENTINI, *Memorie della Contessa Matilde*.

(5) « Nostra quidem sub aetate, fuisset gemma Praesulum

» Leo illo Vercellensis, ornans totum saeculum

» Ardoinum qui se regem dicebat in gentibus,

» Diademate privavit. » (BENZONI *pseudo-Episc. Alb. panegyri. rithm. Henr III*

Imp. cap. 30, Lib. IV. ap. MENKENIUM R. G. S. T. I. col. 1020).

de' suoi principi a combattere Ardoino, contro il quale essi pure si farebbero armati (1).

Non fallì il re di Germania alla proposta: ma sia che impacciato in maggiore bisogna giudicasse di poco momento questa che a lui suscitava Ardoino, ovvero che di molto confidasse nel soccorso promesso dai principi d'Italia, sdegnava di recarsi egli stesso a vincere sì lieve ostacolo, e commetteva ad Ottone duca di Carinzia, e marchese di Verona di condurre le sue squadre a punir *quel ribelle*, occupatore di quel trono d'Italia, eh'egli considerava come suo (2).

Dal suo canto Ardoino non fu tardo alle difese. Conosciuti i provvedimenti degli avversari, ed inteso come all'arrivo de' tedeschi, s'affrettarebbero in loro soccorso Tedaldo marchese di Modena, Federigo arcivescovo di Ravenna, e gli altri congiurati Italiani nominati di sopra (3), deliberò d'impedire ad ogni modo la congiunzione de' due eserciti.

Con quella celerità pertanto, di cui già aveva dato sperimento, move egli dall'oste sua radunata in Pavia (4), e con buona mano di fedeli, vola ad occupare Verona, e ad assalire le Chiuse dell'Adige, tenute dal vescovo. Queste come lampo espugnate, recavasi nelle pianure di Trento dove, per un falso avviso, sperava già fosse giunto il nemico: non trovatolo, tornava colla celerità stessa ne' campi di Verona, ponendo gli alloggiamenti in un castelluzzo per festeggiarvi la solennità del Natale (5). Nel frattempo giungeva il duca Ottone (e con esso alcuni al-

(1) « Alii legatos, alii literas transmittunt, ut terrae oneri gravissimo subiacenti subveniat etc. » (ADALBOLDI l. c.).

(2) STRUVI, *Corp. Hist. Germ. T. I. De Henrico II. § VI.* — GIULANI, *Mem. di Milano*, P. III p. 21. « Tandem a rege Otto dux Carentanorum, qui etiam Veronensem Comitatum tenebat, ad petitionem Longobardorum explendam eligitur, et cum paucis propter fiduciam superius nominatorum, in Italiam dirigitur. » (ADALB. l. c. § 16).

(3) « Hunc (Ottone) ex parte regis venientem, Archiepiscopumque Ravennae Frithericum cum Marchione Thiedolfo, ceterisque regis fidelibus ei ad auxilium occurrentem, Hartwigus... cum comperiret. » (THIETMARTUS in *Chron.* Lib. V. l. c. n. 16. p. 798).

(4) « Ea re cognita Ardoinus, qui ingentem ex omni Lombardia Papiæ militum manum coegerat sine mora se so ad Alpes obiecit. » (SIGONIVS *De Regno Italiae*, Lib. VIII. Oper. T. II col. 473). Ma il Sigonio sbaglia narrando queste cose all'anno 1003. Vedi il MURATORI *Ann. ad ann. 1002*, e nota (5) al SIGONIO.

(5) « Haec Hardoinus praesciens Veronam cum maxima multitudine venire festinavit, ut et ibi Italeis in adiutorium Teutonicorum festinantibus, viam intercepteret, et Clusas, quae ab Episcopo Veronensi servabantur, expugnaret; quod et fecit..... Teutonicis non inventis se in Campaniam Veronensem reduxit, ibique in quodam castellulo Nativitatem Domini celebravit. » (ADALB. l. c. §§ 16 et 17).

tri principi della Germania) conducendo seco le bande tedesche nelle gole di quelle Alpi che l'Italia dalla Carinzia e dalla Baviera dividono. Ivi pure con alcuni altri convenivano i Carentani, e i Friulesi. I quali tutti venuti costeggiando le rive della Brenta, ponevano il campo alle falde di certo monte, detto *Ungarico*, distante una mezza giornata dal luogo occupato da Ardoino (1). Ma il capitano d'Arrigo udendo come il re italiano avesse ridotto in sua mano Verona, e come le Chiuse fossero da lui state vinte, e di fresco munite, sperò ottenere per negoziati il passo delle strette dell'Adige, che dall'armi d'Ardoino gli era tenuto. Mandava pertanto a lui dicendo pe' suoi legati, gli piacesse dare libera la via a' Tedeschi, e venire egli medesimo con essi loro a congiungersi (2); la qual cosa valeva quanto il dire ad Ardoino, che riconoscesse per suo re il re di Germania. Rispose Ardoino a questa strana ambasciata col dire agli inviati tedeschi, si contentassero per quella notte di albergare nel suo campo, che alla domane riceverebbero quella risposta, che dal consiglio de' suoi fedeli verrebbe stanziata.

Custoditi dalle guardie d'Ardoino, sostettero tranquilli i messi di Ottone, buonamente di nulla non avvedendosi: ma il re italiano girando pel campo, spese la notte a preparare ed a confortare i suoi alla bat-

(1) ADALBOLDI et THIETM. II. cc.

(2) « Interim Teutonici iuxta montem quemdam, qui Ungarius (nescio qua de causa) vocatur » pervenientes, et Harduinum iam Clusas occupasse scientes, ipsi Harduino legatos suos transmittunt, et ut aut eis cedat, donec transeant, aut sibi cedentibus veniat, rogant. » (ADALB. § 17). — Questo monte pure appellato da Ditmaro Ungaricus, aveva forse pigliato il nome dagli Ungari a' tempi di Bereogario I imperatore, stanziati in que' contorni, la qual cosa ignoravano gli scrittori germanici. Sovra la positura geografica di questo monte, ecco quanto ne pensa il dotto signor FRAPPORTI, autore di una carta topografica delle antiche provincie Venete, da me fatto richiedere del suo avviso dal P. BRESCIANI della Compagnia di Gesù: « Io ho sempre ritenuto, che il monte Ungarico esser deve una delle vette della catena Vicentina, ad occidente de' due passi che conservano ancor traccia del nome, dicendosi l'uno l'Ongära, e l'altro l'Ongära. Siccome però io non ho mai potuto rettificare questa supposizione, parlando co' montanari di colà, così ho creduto bene, trovandomi in Padova, farne cenno al dotto storico ed antiquario Lodovico MENIN. Questi, scartabellati e consultati gli scritti di alcuni, non so se cronisti o dotti, ed osservazioni sue proprie, mi espose la sua opinione: essere il monte Ungarico imminente al luogo di Val di Brenta detto Campo Vitale, non lungi da Fontaniva. » (Lettera del signor FRAPPORTI al P. BRESCIANI). Questa definizione va d'accordo con quello che si legge nella cronaca di Andrea DANDOLO (Lib. IX. cap. I. Parte 39. R. I. T. XII). « Adversus quem (Ardoinum) Henricus rex Ottonem Ducem cum exercitu in Italiam mittit: inter quos iuxta Alpes in campo qui Vitalis dicitur bellum peractum est. » Del qual parere del valoroso Tirolese, e delle per me cortesi parole, con cui le accompagna, rendo a lui, ed all'esimio P. BRESCIANI quelle maggiori grazie ch'io so e posso.

taglia. Spuntata appena l'alba, e i legati venendo a lui per la risposta, trovano gl'Italiani armati e pronti a combattere. Maravigliati domandano Ardoino, che cosa significhi quell'apparato: a' quali, motteggiando, egli diceva, che la risposta sarebbe per avventura recata al duca Ottone a un tempo solo, e da essi e da quegli armati: intanto se ne andassero pure con Dio; levato quindi subitamente il campo, moveva contro i Tentonici (1).

Qui è curiosa l'ira colla quale gli antichi scrittori germanici irrompono contro Ardoino, chiamando co' più scellerati nomi di tradimento e di frode il ben lecito stratagemma usato da esso, acciò i legati non s'avvedessero del suo proposito d'affrontare il nemico; quasi che i primi violatori delle frontiere non fossero stati i Tedeschi, ed egli non fosse l'assalito, e che perciò gli si potesse apporre d'essere, contro le consuetudini di guerra allora in uso, inopinato aggressore (2). Con codeste contumelie intendevano forse que' cronisti di scolpare il capitano di Enrico della sua militare imperizia.

Giunse difatto Ardoino verso la metà del giorno alle falde del monte, dove lo sprovveduto Ottone teneva i suoi qua e là disseminati, altri foraggiando per il paese, altri alla guardia delle vie che mettevano al campo. Tuttavia al primo comparire de' feritori italiani, i tedeschi alla meglio s'affrettarono alle difese, cosicchè se gagliardo fu l'impeto, ostinata fu pure la resistenza, e grave la perdita da ambe le parti. Dopo un accanito combattere, la fuga di uno de' principi venuti col duca Ottone, decise la sorte della giornata. Perciocchè il re ricondotte le sue genti a nuovo assalto, sperperò l'oste tentonica indebolita e sfiduciata per quella fuga, nè si ristette dal farne strage e dallo inseguire i pochi

(1) ADALBOLDI l. c. § 17. — THIETM. *Chron.* Lib. V. n. 13. l. c. p. 798.

(2) Era difatto tenuta per cosa rea in que' tempi l'assalir il nemico « non praemissa diffidatione. » Questa militar consuetudine fu poi ferma con legge di Federigo I. (MERAT. *Ant. M. Ae.* T. II Diss. 26. col. 531). Ma qui non era caso di ciò per Ardoino, trattandosi di ributtare il nemico da' limiti già invasi del suo reame.

« Harduinns audita legatione, se se in fraudem deceptionis convertens ait: nobiscum nocte manentis etc. Die lucente legati venientes ad accipiendum responsum, Langobardos omnes loriceatos et ad praelium paratos vident; quid hoc significet, Harduinum interrogant. Ille consilium iniquitatis evomens ait etc. » (ADALB. l. c.) — « Illis petitis, ex profunda calliditate animi Hartwigus respondit etc. » (THIETM. l. c.) Vedi pure l'*Ann. Sassone* ap. ECCARD. T. I. an. 1002

rimasti, finchè non li ebbe del tutto respinti fuori de' confini d'Italia (1).

Il luogo della battaglia, detto dagli storici di Germania il *Monte Ungarico*, viene da Arnolfo storico nostro di quel secolo appellato il *Campo di Fabbrica* o *della Fabbrica* (2), la qual disparità d'appellazione non implica contraddizione; conciossiachè naturalissima cosa sia, che l'appellazione tedesca sia nata dal nome del castello occupato dalle squadre di Ottone, come quella dello scrittore italiano, dal luogo occupato dagli Italiani (3).

Quanto al numero de' combattenti dalle due parti, non si può raccogliere nulla di certo. Sallustiano gli scrittori d'Arrigo di far comparire piccolo l'esercito tedesco, e strepitoso quello del re Ardoino, per diminuire così l'onta della disfatta con tanta ingenuità espressa dal vescovo Ditmaro (4). Solite iperboli numeriche degli scrittori di parte, in tutte le età ed in tutti i paesi.

Secondo la legge militare longobardica, ogni principe in caso di guerra era tenuto condurre con se dal suo comitato un certo numero d'armati (5); difficilmente pertanto ammetteremo che le squadre de' due principi venuti in Italia col duca Ottone, aggiunte a quelle d'esso duca, ed alle altre mandate dalla Carinzia e dal Friuli, sommassero a soli cinquecento uomini, come scrive Adalboldo (6). Quanto ad Ardoino, lo stesso scrittore ne chiama l'esercito doppio di quello di Ottone (7);

(1) « Inde (Ardoinus) promovens exercitum media die ad Ungaricum montem pervenit . . . » Fit congressio, fit pugna, fit coedes ex utraque parte gravissima, et pene Teutonicorum, quamvis paucissimorum, esset victoria, si non impediret Ottonis fratris Regensborgeosis episcopi fuga. Illo enim fugiente, Teutonicorum acies minuitur, et iterum a multis congressa devincitur. » (ADALB. § 17). — « Tum vero ex magna parte mutilata pro pudor! coeditur et victoriae honore privatur, sed non sine maximo Hartwigi detrimento. » (THIETM. l. c.) — « quam plures stravit, caeteros extra fines regni fugavit. » (ARNULPHI Hist. I. 15. l. c.).

(2) « Occurrit viriliter Ardoinus in campo Fabricae. » (ARNULPHI l. c.).

(3) Esiste sui Colli Euganei non lungi dalla Brenta una villa, attualmente chiamata Fabbrica, posseduta dalla famiglia de' conti Durini di Milano.

(4) « Proh pudor! » (THIETM. l. c.).

(5) MURAT. *A. M. Ae.* Dissert. 26. T. II. — ROVELLI, *Stor. di Como*, P. II. p. 32.

(6) « De Teutonicis vero vix erant quingenti. » (ADALB. l. c.). — L'Editore della Vita di Arrigo è pure del nostro avviso sul numero degli armati, Quae illie tamquam de suo, quamvis non magni momenti auctor adiecit (ex. gr. § 47. numerus utriusque exercitus) sublestioris esse fidei mihi videntur. (G. WAITZ in *Proleg. ad Vit. Heinr. Imp.*, auct. ADALBOLDO, ap. PERTZ l. c. T. VI. p. 680).

(7) « Exercitus autem illo existimabatur 1015 esse virorum. » (ADALB. ibid.). Adalboldus hos numeros apud Thietmarum haud invenit. (Ivi nella nota (47)).

sfoggio anche questo di parole, ma in opposto significato, e che di poca fiducia va meritevole, se si considera siccome dovette riuscire malagevole ad Ardoino in mezzo a tanti principi traditori, o di dubbia fede, il raccogliere l'oste italiana: e che ad ogni modo colle poche legioni adunate, gli era forza guardarsi alle spalle da' congiurati, tenere Verona, afforzare le Chiuse, e combattere i nemici sui limiti del regno.

Ma la rotta delle genti teutoniche persuase Arrigo di Germania, che la sua venuta non era del pari desiderata dal popolo d'Italia, quanto dall'avarizia de' principi. Impacciato nelle sue guerre transalpine, rimandava a miglior tempo il fare le sue vendette, volgendo intanto l'arte sua a tentar con promesse e con donativi quegli altri vassalli d'Ardoino, la cui fede già tentennava (1).

(1) V. in UGHELLI (*It. Sac.* T. II. in *Epis. Parm.*) il diploma da Arrigo II re di Germania concesso a Sigefrido vescovo di Parma: «*interventu nostri fidelis Theobaldi Marchionis,*» cioè il marchese Tedaldo soprannominato, avolo della Contessa Matilde. In questo diploma che contiene la donazione della ricca Badia di Nonantola al detto Sigefrido, leggesi quest'espressione: «*Quatenus (Sigefridus) firmatus in fide, acriter deserviret nobis.*» «Cosi il buon re Arrigo (sono parole del MURATORI *Ann. 1003*) non aveva allora scrupolo a guadagnarsi de' partigiani in Italia,» facendo il liberale co' beni ancora delle Chiese.

Le note del diploma sono le seguenti:

«*Dal. 14 kal. martii ann. Inc. Domini MIII. Ind. I. anno vero Domini Henrici regis primo. Actum Novicomagi.*»

CAPITOLO VIII.

FONDAZIONE DEL MONASTERO DI FRUTTEARIA.

ARRIGO II RE DI GERMANIA SCENDE IN ITALIA.

TRADIMENTO DI VERONA. INCENDIO DI PAVIA.

(1003-1004).

La vittoria delle Fabbriche fruttò all'Italia alcuni mesi di pace. Come si spendesse il re Ardoino e con quali provvedimenti ordinasse le difese contro le future aggressioni del re di Germania, da nessuno degli storici viene riferito.

Ma da' siti ch'egli occupava verso le frontiere allora che re Arrigo per la seconda volta si fece ad assalirlo, si può argomentare che, secondo la poca perizia delle cose militari in quel tempo, Ardoino badò soltanto ad occupare validamente la valle dell'Adige, solito passo de' barbari per venire in Italia, cominciando nelle vicinanze della città di Trento, e facendo lungo le gole e gli anfratti della valle, novelle chiuse e bastite, o restaurando le antiche che già esistevano, e da lui, siccome vedemmo, superate. Ma trascurò di guardarsi da tergo, dove per la via lungo il fiume Brenta, che trae la sua origine dalle Alpi noriche, poteva il nemico recarsi dalla Carinzia. E ciò tornò a suo danno, siccome or ora racconteremo.

Intanto consentendo all'uso ed alla necessità de' tempi, spendeva Ardoino l'ore in far donazioni a varii principi d'Italia, i quali o s'erano dimostrati a lui favorevoli, o temeva non fossero per abbandonarlo, ed a quelli ancora che meglio avevano saputo coprire la fede vacillante: de' quali tutti avvisava egli di contenere l'avarizia coll'esca di maggior guiderdone.

Così oltre alle donazioni già fatte al vescovo di Como nell'anno precedente, del comitato di Bellinzona, delle Chiuse, del Ponte e del co-

mitato di Chiavenna (1); di vari dazi, privilegi posconferme, un nuovo diploma concesse il re Ardoino in quest'anno 1003 (2) in favore di quel vescovo (3), al quale egli aveva inoltre conservato il grado di arcicancelliere del regno che esso teneva sotto Ottone III. I benefici che non trattennero quel Grande, dal farsgli a pro del re di Germania da fede.

Altri diplomi per le chiese, pel clero, pe' monasteri di Ivrea, di Morcelli, di Modena (spiccava Ardoino ben quell'istesso tempo (3)), e dalle date di Inogo ch'essi tengono, si scorge: che in quell'anno, il non ostante il tradimento di vari principi già apertamente passati alla parte di Arrigo, teneva Ardoino tuttora sotto la mano sua, gran parte del regno, ch'egli si recò a visitare, e si a per renderci ragionate, che per l'iscoverire come fossero a lui favorevoli gli animi della risorgente popolazione. Ancora in quest'anno 1003, sotto gli auspici di Ardoino e della regina Berta sua moglie, dayasi principio al monastero di Fruttuaria; la cui fondazione già da alcuni anni era stata stanziata, per opera di S. Guglielmo abate Divionense, da tre di lui fratelli Gotofredo, Nitarde e Roberto, figliuoli di Roberto conte di Volpiano in Canavesè, e di Perinza, sorella del re Ardoino (4).

La fondazione di un monastero insigne fin dal suo nascere come per santità, così per ricchezze, per fondi e per privilegi, era, in que' tempi agitati da mille tempeste, un'opera non solo di pietà religiosa, ma di carità, come ora si direbbe, umanitaria. Perciocchè lasciando da parte quanto s'appartiene ad una più severa disciplina monastica, o quivi da S. Guglielmo introdotta, all'esercizio della carità verso i poverelli, e dell'ospitalità verso tutti, al che provvidero dapprima i fondatori, poi le ricchezze d'Ardoino e quelle d'Ottone Guglielmo duca di Borgogna, suo congiunto, lasciato ancora ch'ivi secondo la scienza del tempo attendevasi da' monaci alla educazione de' fanciulli (5), fu il nuovo cenobio illustrato, per l'assoluta indipendenza da ogni esterna dominazione quivi in ispecial modo accertata, la quale rendendone più sicura l'esistenza,

(1) Append. numeri 23. 24 e 25.

(2) Arch. S. Eufemiae de Insula, ap. ROVELLI, *Storia di Como*, P. II. p. 79.

(3) Per quest'ultimo diploma vedi SIGONIO, *De Regno Ital.* Lib. VIII. col. 471: e per gli altri vedi *Hist. Patr. Mon.* T. I. e l'Append. ad an.

(4) MABILLON, *Ann. O. S. B. T.* IV. p. 164.

(5) S. *Wilhelmi Divion. Abb. Opera* a DE LEVIS collecta, Aug. Taur. 1797, p. 173 e seg.

ne fere più ambito e più tranquillo il soggiorno a chiunque veniva cercando pace e penitenza.

Quella libertà infatti, che ogni fondatore di un nuovo cenobio poneva ad assicurare la libertà del fondo ad esso assegnato, per tuttarlo contro le prepotenze che i Grandi sì secolari, che ecclesiastici usavano contro somiglianti istituzioni, era più che altrove opportuna pel monastero di Fruttuaria. Perciò che una parte de' beni del nuovo cenobio essendo posta nella diocesi di Vercelli, a ragione temevano i fondatori, che Leone il Monaco vescovo di quella città non meno avverso a S. Guglielmo che a re Ardoino (1), non venisse a tribolare i nuovi cenobiti, minacciando d'usurpare il possesso del monastero Fruttuariense, come già s'era industriato di fare, sotto altri pretesti, per quelli di Luccio e di Bremese, e per la chiesa vescovile d'Ivrea (2).

Del rimanente l'animo della libertà e della indipendenza che in quegli anni in Italia diveniva il desiderio e lo scopo del maggior numero, e del quale, se ben si osserva, si trova qua e là l'impronta ne' documenti delle sociali transazioni di quell'età, apparisce nelle parole dell'atto d'istituzione. Quest'è l'atto detto allora *Giudicato* o *legal testament*, pel quale Roberto, l'ultimo de' sovrannominati fratelli di S. Guglielmo, divenuto per la monacazione degli altri, solo erede del pingue patrimonio paterno, volle che il fondo di Fruttuaria, da esso con altri beni assegnato al nuovo cenobio, rimanesse pienamente immune e libero da ogni episcopale, monacale o secolare soggezione, « affinchè (così s'esprime) lo scritto) quel fondo che da' predetti fratelli passa nella possessione degli Dio non venga sotto verun pretesto a perdere la dignità della prima ed antica libertà sua » (3).

(1) GLABRI Rod. *Vita S. Will. Divionensis Abb.* c. XI. n. 28.

(2) MABILLON, op. cit. T. IV, p. 131-141. — MURATORI, *Ant. M. It.* T. VI, 318. — *Chron. Novat. Lib. V.* cap. XXXV. *Hist. P. M. T. V.*

(3) « Ut postquam a prefatorum fratrum possessione transiret in Domini possessionem, nullo modo primam et antiquam perderet libertatis dignitatem. » (Docum. CCXLIV in *Hist. P. Mon.* T. I. col. 415). — Forse mi si opporrà che somiglianti formole osservansi in altre monacali istituzioni, e che la parola libertà non suona altro che immunità del fondo: non però mi ricredo: pare a me di scorgere qui una certa speciale affettazione nella formola dell'atto, consimile affatto ed analoga allo stato degli animi in quel punto. « Verumtamen quoniam singula loca in quibus cura nostra vigilabat se gaudebant et gaudent habere proprium possessorem et defensorem et hic de quo fit specialis mentio quia gratia libertatis nullum videbatur habere protectorem licet diversi inde contenderent non causa religionis vel pietatis sed causa avaritiæ et dilataendi do-

La libertà pertanto del cenobio Fruttuariense fu per tal modo accer-
tata, ch'egli divenne in quel tempo di dissensioni e di guerre, un ri-
fugio per tutti senza distinzione di parte: singolar pregio che presto lo
fece salire in fama, e che accrebbe in breve le sue ricchezze. Così se
dal re Ardoino riceveva donazioni e privilegi (1), altrettanti negli anni
seguenti ne riceveva da Arrigo re di Germania (2): così ancora allora
chè lo stesso re Arrigo cinto già della corona imperiale s'impadroniva
del tutto del reame d'Ardoino, il monastero di Fruttuaria posto sotto la
special protezione, e come allora appellavasi sotto il *mundiburdio* d'Ar-
rigo imperatore, offriva allo stanco Ardoino un asilo di calma e di si-
curezza: quindi poco appresso, a lui ed alla reina Berta tomba onorata.

Un antico documento pubblicato scorrettamente da monsignor Della-
Chiesa, dal Mabillone e da altri (3); ed estratto dalla cronaca Frut-
tuariense (4), sembra fosse destinato a perpetuare sul marmo la data

« minit desudatum est nostro studio ut defenderetur et constitueretur in propria libertate. » (Doe.
CCXLIV sup. cit.). Del resto si paragonino queste parole con quelle dell'epigrafe pubblicata qui,
pag. seg. nota (1). Aggiungasi fra' privilegi di questo monastero quello d'essere esente dal paga-
mento delle decime, e da ogni altra imposizione, sia laicale che ecclesiastica, come apparisce da
una Bolla di Giovanni XVIII S. P. data nell'anno 1006. (V. TERRANEO, *Note agli Ann. del Me-*
RA TORI, ms. della R. Università, T. VI. P. II).

(1) Esiste un diploma del re Ardoino pel monastero di Fruttuaria, dato V kal. febr. an. D. I.
MIV, stampato nel Libro, *Rugioni della S. Sede sopra la Badia di Fruttuaria*: manca in esso l'in-
dizione, e per questo e per certe sue espressioni fu giudicato falso, o per lo meno dubbio da molti
Paleografi: io lo crederei piuttosto gnasto, o come si suol dire *interpolato* di giunte e cambia-
menti, come lo fu l'antica cronica di Fruttuaria. Fra le altre espressioni che lo fecero bandire,
leggesi questa: *totius Italiae nationis*, che fu giudicata precoce nell'indicare la nazionalità italiana.
Opporrei a questa sentenza le seguenti parole tratto da un documento pubblicato dal LERI
(Iod. dipl. Bergom. T. II. col. 393) dell'anno 991: *natione eius Italiae*. A questo aggiungerei,
che Ardoino essendo in quel punto quegli a cui volgevasi le speranze d'indipendenza degl' Ita-
liani, ed egli stesso accennando alla corona imperiale, non è maraviglia che nel suo diploma egli
trovasses la salute della *nazione italiana*. Ad ogni buon conto certo si può credere, che Ardoino
in quel tempo favorisse il nuovo cenobio non solo, come fece, co' suoi tesori, ma altresì co'
soliti diplomi regali. Per questo ragioni, io mi consigliai d'ammettere per legittimo il diploma, e
lo pubblicai nell'Appendice al n. 31, avvertendo tuttavia, che forse fu *interpolato* di qualche
aggiunta.

(2) *Hist. P. M. T. I.* Documenti CCXI e CCLV, e nell'Append. il n. 32.

(3) *Ab Ecclesia Chronol. Hist.* Cap. XXVII. — MABILLON, *Ann. O. S. B. T.* IV. p. 164. —
VALER CASTIGLIONI, *Note al Regno d'Italia del TESAURO*, nota (547).

(4) Questa cronaca è suarrita. Quella di cui in vari archivi delle famiglie patrizie del Canavese,
e nell'archivio della R. Camera de' Conti si conservano copie, non è che una favolosa congerie
di falsi dati, messa in campo od immaginata forse da Filiberto PINCON scrittore del secolo XVI.
Fra le altre favole vi si legge, che S. Guglielmo Divionense era figlio del re Ardoino: si sa dal

di questa istituzione. Noi qui lo ripetiamo nelle note, correggendone sul testo dato dal Terraneo, gli errori occorsi nelle precedenti pubblicazioni (1). Da esso apparisce che tal fondazione, e per la solennità con cui venne eseguita, e per le condizioni in che trovavasi l'Italia dopo la vittoria d'Ardoino, si collegava colle cose politiche. Questo sembra accennato; se non altrimenti, da' versi 7.º ed 8.º, il cui senso letterale dice, che il re Ardoino oggimai fermo sul trono, *Regna nell'Esperia, tende verso l'Ausonia*. Si sa, che come per l'Esperia intendono gli antichi geografi l'Italia settentrionale, così per l'Ausonia l'Italia di mezzo, cioè Roma dove coronavansi gl'imperatori. Evidentemente sta espressa in questo verso la speranza che allora nutrivano gl'Italiani, che Ardoino, quel re che rappresentava in quel tempo l'italica indipendenza, fosse per conseguire la corona imperiale. Egli non fu dunque per errore, come volle sospettare il Giuliani (2), che lo storico Arnolfo scrisse siccome Ardoino nella Dieta di Pavia del 1002, non solo era stato eletto re d'Italia, ma salutato Cesare da tutti (3), cioè a dire destinato all'impero, posciachè da questo epigrafico monumento chiarissima dimostrazione abbiamo, che tali erano le speranze degl'Italiani, e che a quel fine mirato avea l'elezione del re Ardoino. Ma per usare un'espressione che s'incontra di frequente ne' documenti di quegli anni, altro *esigevano i peccati degli Italiani*.

GLARRO che il padre di S. Guglielmo era Roberto conte di Volpiano, e la madre una sorella di Ardoino della Perinza ecc.

- (1) « Si quis Fructuariae mavult praenoscerè quando
 » Coenobii coeptum rite fuisset opus:
 » Millesimus sublimis erat tunc tertius annus
 » Partus virginis principis aetherei:
 » Martii septenae (seu Indictio prima) calendae
 » Tempus vel cursum annis suum peragunt
 » Rex Ardoinus sceptri moderamine fissus
 » Regnat in Hesperia, tendit in Ausonium.
 » Adiuvat ipse locum Dominus, quem munere dotat,
 » Rebus consuluit fratribus assiduus.
 » Praesul Ottobianus, * quod iure dicando sacravit,
 » Abbas Willelmus construit hoc Domino. »

(TERRANEO, *Note agli Ann. del MONASTERO*, T. VI. P. I. ad an. 1003, ms. della R. Università).

(2) GIULINI, *Mem. di Milano*, P. III. p. 22.

(3) « Tunc quidam Ardoinus, nobilis Ipperegiae Marchio, a Longobardis Papiae eligitur et vocatus, Caesar ab omnibus etc. » (AENULPHI, *Mediol. Hist. Lib. I. c. XIV. l. c.*).

La notizia della vittoria d'Ardoino era giunta dopo un mese al re Arrigo in Maestricht (*Traiectum ad Mosam*); il quale sebbene, come dice il suo storico (1), l'ebbe con grave cordoglio, tuttavia ne ricevette con saviezza l'annunzio, riponendo altamente nell'animo il desiderio di farne vendetta. Ma poco mancò che il dolore non l'uccidesse (2). Riatutosi, e celebrata la Pasqua in Quidlinburg, vi accoglieva con prudente dissimulazione Ottone marchese di Verona, suo capitano nella perduta fazione contro Ardoino, ed Ernesto, figlio di Liutpoldo marchese d'Austria, che anch'esso aveva malamente combattuto in quella battaglia. Costoro, fuggitivi e feriti, non solo erano da Arrigo umanamente accolti, ma consolati ed onorati di novelli doni (3). La qual benignità di modi, dettata a lui da una fine ed antiveggente politica, conforme alla natura sua dissimulata e scaltra, sebbene non distogliesse il principe Ernesto, giovane di mente leggiera, dal mostrarsi in sulle prime ingrato ad Arrigo, maravigliosamente giovò a questo re pe' fini a quali tendeva. Ben diverso in questo dal focoso Ardoino, il quale troppo fidando nella propria virtù, e nella propria sua spada per la difesa della giustissima sua causa, mentre avvisava vincere il mal talento de' suoi principi, spandendo sovr' essi le piene mani i benefici, non sapeva vincere se stesso inoderando l'impetuosa natura, che sempre gli suscitava novelli nemici.

Duravano nondimeno in Germania le turbolenze che avevano trattenuto Arrigo dal tentare una seconda discesa in Italia, sempre quivi aspettato ed invocato dagli spregiuri vassalli del re Ardoino (4). Invece di

Eransi nuovamente ribellati al re di Germania due principi potenti: Boleslao, cioè, duca di Polonia, ed Arrigo di Suinfurt conte di non so quali comitati della Baviera, della quale governava la Marca (5). Or

(1) « Dein Traiectum . . . de praelio nostrorum male pugnato ibi certum comperit. Et quia omne quod nequit corrigi, leonitur patientia, quamvis graviter lameo sapienter audita sustulit incommoda. » (THIETM. Chron. Lib. V. § 17. ap. PERTZ, T. V. p. 798).

(2) « Inde Leodinum (Liegi) . . . veniens, ibi colica passione admodum gravatur. » (THIETM. ibid.).

(3) « Ibi (Quidlinburg) etiam Ottonem Ducem et Ernestum a praelio male pugnato revertentes, regis donis honorat, paternisque adminiculis consolatur. » (THIETM. Chron. Lib. V. § 19. p. 799). — « Ottonem quoque et Ernestum tunc sibi obviam ab Italico praelio venientes, pro vulcerum susceptione, pro necessariae fugae confusione, donis regis honorat, et debita consolatione relevat. » (ADALBOLDI, *Vita Henrici*, § 22. p. 689. ap. PERTZ, T. VI. — *Annalista Saxo* ap. ECCARD. T. I. ad an. 1002).

(4) *Ann. Idesheim* 1004. ap. PERTZ, T. V.

(5) MASCOVI *Comment.* Lib. IV. Cap. VI. p. 115.

costoro s'erano uniti vari altri principi, come Ernesto figlio di Lintpoldo di cui testè si è fatto cenno, e lo stesso fratello del re Arrigo, Branone, che poi fu vescovo di Augshurgo (1). Traeva il malcontento di Arrigo di Sinfurt, dall'aver il re rifiutato di dare a lui, meritevole (diceva) per servigi, il ducato della Baviera, della quale egli sospettava volesse far duca (come poi fece) un Arrigo di Lucemburgo, fratello della regina Cunegonda. Assentivano Ernesto e Brunone, sia per gelosia che indrissero contro il principe di Lucemburgo, sia perchè aggrati e impauriti da Boleslao animatore di questa congiura (2).

Da maggior causa, siccome vedremo, era mosso Boleslao. Dallo storico Ditmaro viene questo duca appellato compagno e quasi collega di Ardoino (3) e sopra di questa appellazione composero il Baronio ed il Castiglioni, scrittore piemontese del secolo XVII, un'alleanza fra Boleslao e il re d'Italia (4). Per verità a chi consideri quali fossero in quel tempo la scarsezza delle vie, e le difficoltà de' passi delle Alpi, soprattutto fra due regni in caso di aperta guerra, siccome erano l'Italia e la Germania, non sembrerà che questa supposizione possa avere probabile fondamento. Checchè ne fosse, lo storico Ditmaro non fa più altra parola di questa immaginata alleanza. Parmi pertanto voglia essere opinione più logica il credere, che con quelle parole non avvisasse lo storico tedesco dir altro, se non se, che Boleslao era per la Germania, come Ardoino per l'Italia, un ribelle verso il re Arrigo, i cui supposti diritti sul reame d'Italia costituivano, secondo Ditmaro, il re Ardoino in istato di ribellione, come senza dubbio in virtù della costituzione germanica lo era Boleslao. Conciossiachè è da sapersi, che essendo morto Vlodomiro, duca della Boemia, Boleslao per denaro, per fallaci promesse e per astuzia, erasi impossessato di Praga, capitale di quella provincia (5). Al quale, re Arrigo desideroso d'esser libero d'ogni altra briga per poter più presto avacciarsi al conquisto d'Italia, aveva mandato dicendo, pe' suoi legati, che ove volesse *col farsi suo milite* (6) riconoscere da

(1) ADALBOLDI, *Vita Henrici II Imperat.* § 24. l. c. p. 689.

(2) MASCOVI, *Comment. de reb. Imperii Rom.-Germ.* Lib. IV. p. 115.

(3) « Huius (Bolislavi) compar et quasi collega Hartwigus a Langobardis falso rex appellatus. » THIETM. Lib. VI. § 57. p. 833).

(4) CASTIGLIONI, *Note al Regno d'Italia del TESAURO*, annotazione (571).

(5) ADALBOLDI, *Vita Henrici*, § 22. l. c. p. 689.

(6) Come si legge d'Arrigo di Lucemburgo « Milite suimet, generoque Henrico XII lat. apr.

lui secondo l'antico ius germanico in beneficio la terra occupata, sarebbe egli pronto a concedergliela: ove no, gli si opporrebbe coll'armi (1).

Punto non aveva badato alla benigna profferta il duca Boleslao il quale, guerriero ambizioso, avvisava a maggiori conquiste. Acconciatosi pertanto co' principi sopradetti, attese a difendere se stesso dall'armi di Arrigo, il quale raccolto un valido esercito mosse tosto contr'esso e contro gli altri principi sollevati (2).

Questa spedizione germanica durò dal mese di agosto di quell'anno 1003 fino al principio di marzo del seguente (3).

Non difficile bisogna fu pel re il distrurre le genti di Arrigo di Suinfurt, dare il guasto alle sue terre e impossessarsi de' di lui castelli. In una di queste fazioni fu preso il giovane Ernesto, uno de' congiurati, il quale dannato nel capo pel tradimento, fu tosto da Arrigo rimesso in grazia (4); tale longanimità condusse Brunone fratello del re, a rammentarsi per ottenere perdono; e questo parimenti ottenne più tardi Arrigo di Suinfurt: ma la Baviera ch'egli ambiva, fu data al fratello di Cunegonda (5).

Altra cosa era il vincere Boleslao, principe bellicoso, potente, e di spiriti assai maggiori. Il quale fin da principio per isturbar dagli alleati le forze del re, spinte aveva le sue squadre insino all'Elba: e varcato il fiume a Strela, dava il sacco alla provincia, e ne ritornava con tre mila prigionieri (6).

Mosse Arrigo contr'esso, sperando in breve costringere, come gli altri, anche questo principe ribelle, e ributtarlo dalle provincie occupate. Ma l'aria già più mite della vicina primavera, strutte avendo le nevi, e queste allagato il suolo, dovette Arrigo star contento ad indugiare a miglior tempo l'impresa; lasciata perciò parte delle sue squadre ad

» cum omnium laude praesentium, cumque hasta signifera etc. » (THIETM. Chron. Lib. VI. § 3. l. c.).

(1) « Nuncios ad Bolislaum misit, mandans ei si terram nuper a se occupatam de sua gratia, ut ius antiquum poscit, retinere, sibi in omnibus fideliter vellet servire, se eius voluntati in hiis assentire, sin alias, se armis illi velle contraire. » (THIETM. Chron. Lib. V. § 19 l. c. p. 799).

(2) THIETM. ibid. § 20.

(3) THIETM. Lib. V. et VI. p. 800-805. l. c.

(4) THIETM. § 21. Lib. V.

(5) THIETM. VI. § 2.

(6) THIETM. V. § 22.

alcuni conti suoi fedeli, per impedir Boleslao dal far ulteriori danni alla Sassonia, egli di mal animo torse a Merseburgo (1).

Composte alla meglio in tal guisa queste guerre germaniche, re Arrigo volse del tutto l'impaziente pensiero all'impresa italiana; con tutto ciò non parendogli avere ad incontrar prospero il viaggio, ove prima non facesse le sue orazioni a S. Maurizio, recavasi a Magdeburgo. Quindi sciolto il voto, per la Turingia e per la Francia Orientale scendeva a Ratisbona, d'onde, tenutovi un solenne placito il 21 di marzo, moveva verso Augusta (2).

Colà accorrevano a lui volontari per la guerra d'Italia i Lotaringi, i Franchi e gli Alemanni: ed egli accomiatata la regina Cunegonda, portava il campo a Thingan presso Kempten, dove esser doveva il generale convegno di tutta l'oste germanica (3).

Con questa traeva tosto direttamente per a Trento, superando non senza gravi fatiche delle sue genti, le asperità montuose dell'Alpi Retiche, dove le rotte strade per una regione sterile e selvosa rendevano difficile il passo. In quella città riposava le sue schiere, e celebrava il di delle Palme, che in quell'anno 1004 cadeva addì 9 d'aprile (4).

Frattanto il re Ardoino, udito l'arrivo in Trento del nemico, mandava da Verona nuovi rinforzi e fidi capitani alle Chiuse, mentre egli concentrava il tiervo delle sue legioni ne' campi Veronesi, campi fatali, dove tante volte furono combattute le sorti dell'Italia, pieno di speranza non solo di far resistenza, ma di preparar nuova rotta al re forestiero (5).

Conobbe tosto re Arrigo essere o insuperabile o difficile assai, senza grave sua perdita, il passo delle Chiuse dell'Adige. Tornato dunque in-

(1) THIETM. VI. § 2.

(2) THIETM. *ibid.* § 3. p. 803.

(3) ADALBOLDI, *Vita Henrici*, § 32. l. c.

(4) THIETM. Lib. VI. § 4. p. 803. — « Inde promovens exercitum per loca sterilia, per non
» lana aspera, per silvas spatiosas, per vias lubricas, ad Tridentinam civitatem pervenit. Ibi in
» die Palmarum, qua oportuit celebritate suos diurnare fecit. » (ADALBOLDI § 33 l. c.).

(5) « Ex adverso Ardoinus fidens viribus, nec minus armis instructus, non tantum defendere
» quantum super eum (Henricum) paratus insurgere, occurrit illi Veronae. » (ARNULPHI, *Hist.*
Mediol. Lib. I. c. 16. R. I. T. IV). — « Quem adventatam Hardwigus rex presciens, ac multum
» expavescens, ad munitiones supra memoratas nuntios probatos misit » (ADALBOLDI dice § 33
» quos sibi fidelissimos existimabat, custodes transmisit). Ipse autem collectis agminibus in Ve-
» ronensi planicie consedens, sperabat praesentia praeteritis prosperitatibus forsitan respondere.
(THIETM. l. c. § 4). — È osservabile in questo passo il contrapposto in cui lo scrittore mette
il supposto terrore d'Ardoino colla speranza della vittoria.

dietro, faceva consiglio co' suoi, se meglio fosse coll' aiuto de' Carintii tentar altre Chiuse assai da queste lontane, le quali allo shoeco di val di Solagna, o val Sugana, difendevano il passo della Carinzia, in val di Brenta. Queste, siccome accennammo, aveva Ardoino munito meno validamente, sia per poca militare perizia, sia perchè la via da quella parte, stretta, difficile e insolita, non pareva al re italiano potesse essere presa dall'esercito nemico (1).

Deliberato il partito, spedì Arrigo un suo cappellano per nome Elmiger, a sollecitare e ad ammonire i Carintii, i quali obbedienti, fatte due schiere di pedoni, una ne mandavano la mattina seguente prima dell'alba ad occupar certo monte posto a cavaliere delle Chiuse tenute dagl' Italiani sopra la Brenta, e coll'altra chetamente moveano di fronte verso le Chinse. Sorta l'alba e udito il segnale convenuto colla prima schiera, urtò improvvisa la seconda contro i difensori di quelle Chiuse: nel punto medesimo gli altri che tenevano il monte, ruinando precipitosamente alle spalle degl' Italiani, questi si trovarono fra due assalti ad un colpo.

Comunque virtuosa fosse la resistenza, inevitabile e totale esser doveva e fu la sconfitta degli Ardoinici: molti sterminati nell'assalto, altri rovesciati nella Brenta sottoposta, i rimanenti cacciati in rotta precipitosa (2).

Re Arrigo inteso il prospero fatto, che gli apriva l'adito in Italia, lasciate le salmerie, con un drappello di scelti satelliti s'affrettava per la Carinzia alla Brenta, sovra la cui sponda sinistra poneva gli alloggiamenti per passarvi la settimana santa e le solennità della Pasqua (3).

Il dì 19 d'aprile mandava, per mezzo del conte Palatino, un bando all'esercito per cui prometteva ricompense a chiunque fosse per combattere virilmente, e minacciava pena del capo a chi abbandonasse le

(1) ADALB. *Vita Henrici*, l. c. § 34. p. 691. — Cfr. CARLI, *Storia di Verona*, T. II. p. 416.

(2) « Carentani regis mandatis obediunt, et Helmiger suadente, in duas turmas dividuntur: » una ante solis ortum, omissis equis, latenter Clusis superpositum montem occupat, altera lucescente iam die, signis ab his qui in monte erant auditis, ad Clusas expugnandas festinat. Custodes nihil de his qui in montem occupaverant, scientes, ad resistendum Clusis impugnantibus accedunt. » Repente in monte latentes exiliunt, Clusasque defendentibus, a dorso infeste superveniunt. » Custodes se deceptos esse percipientes, alii in fugam miserunt, alii in praecipitium, alii in Brentam aquam subcurrentem. » (ADALB. l. c. § 34. p. 691. — Cfr. THIETM. *Chron.* VI. § 4. p. 805).

(3) THIETM. *ibid.* — La Pasqua fu in quell'anno il 16 aprile.

anni (1). Singolar bando che il re pubblicava sdegnoso, ricordando come per la turpe fuga di parte delle sue schiere, la battaglia precedente era stata da Ottone perduta. Quindi riportava il campo sull'altra sponda del fiume, mandando esploratori in cerca del nemico (2).

Ma sebben perdute le Chiuse, non diffidava tuttora il re Ardoino della resistenza. Perchè con fondamento sperar poteva, che le fresche sue legioni ammassate in Verona, trionferebbero di quelle del re tedesco, stanche dal lungo cammino e da' patiti disagi. Disponevasi perciò con tutto l'animo a contrastare al nemico il possesso di quella città, e meditava una seconda rotta degli aggressori. Ma l'avarizia de' principi d'Italia non s'acconciava di nuove battaglie. Fin da quando nel Natale di quell'anno medesimo stava il re Arrigo in Palithi (3), vari di essi erano a lui accorsi, sotto la guida del vecchio vescovo di Verona, il quale dopo d'essere stato da Ardoino cacciato dalle Chiuse dell'Adige, era venuto pien di spavento ad appiattarsi presso il re in Germania (4). Costoro offerivano ad Arrigo preghiere e doni acciò affrettasse la sua calata in Italia. Ancora circa a questo tempo a lui giungeva Tadone, legato di Tedaldo, marchese di Modena, e di Leone vescovo di Vercelli, il quale per non dare sospetto ad Ardoino, aveva percorso, pedestre ambasciatore, la lunga via, fra mille stenti ed infiniti pericoli, apportatore delle supplicazioni di que' traditori (5). Ora ragion vuole si creda che da tutti costoro, e specialmente dal legato di que' due principi, capi come si è detto de' congiurati italiani, fosse aperto ad Arrigo, e con esso concertato l'accordo, che doveva mettere in mano sua la città di Verona. Basterà prova ne sono le cose accadute di poi, e le ricompense che gran parte de' principi italiani, e sopra gli altri il marchese Tedaldo, e più

(1) « Rex Palatino comiti praecepit, ut per bannum regale exercitui toti fuga interminaretur. » adderet etiam, ut si quis fugere praesumeret, plectendum se capitali sententia sciret » (ANALB. l. c. p. 692. — TRIETM. aggiunge: « resistantibus viriliter promittitur solatio futura. » l. c. p. 806.).

(2) ANALB. ibid.

(3) Forse Polden nel ducato di Brunswick - Hildesheim. (Vedi TERRANEO, Note agli Ann. del MURATORI ad ann. 1003 ms. cit.).

(4) « An. 1004. Rex nativitatem Domini Palidi mansit; illo ad eum Episcopus Veronensis ac alii quidam Priuores Italici regni venerunt cum regis muneribus. » (Ann. Hildesheim ap. PERTZ, T. V. p. 92. Cfr. CARLI, Storia di Verona, l. c. — BIANCOLINI, Notizie della Chiesa di Verona, T. I. p. 182.).

(5) « De Tadone vero, qui fuit pedester legatus Marchionis etc. » (BENZO in Panegirico Henrici IV. ap. MENCKENIUM, R. G. T. I. l. c.).

tardi il vescovo sunnominato, coll'ambasciatore Tadone, riportarono dal re vincitore.

Avvisare potremo pertanto, rimanesse fermo tra il re Arrigo ed i principi, che appena l'esercito tentonico avrebbe superato le Chiuse, e si troverebbe di fronte a quello del re Ardoino ne' piani veronesi, quelli fra i principi d'Italia, i quali fino a quel tempo non avevano osato manifestarsi nemici del re italiano, scioglierebbero l'esercito, congedando ciascuno quelle schiere che, secondo la legge longobarda, era stato costretto da Ardoino di condurre al campo a Verona.

Questo fu fatto. Sceso Arrigo in quelle pianure, già i due eserciti stavano in faccia, già il re Ardoino stava per dare il segno della battaglia, che impazienti attendevano que' soldati italiani, che avevano trionfato due anni prima alle Chiuse, allorchè la maggior parte de' capitani fatto l'inatteso comando della ritirata alle proprie legioni, posero in iscompiglio l'esercito d'Ardoino (1). In tal guisa svanivano le nobili speranze del re italiano, il quale scorgendo oggimai impossibile ogni resistenza, provvide alla propria salvezza, ritraendosi colle poche schiere rimaste fedeli ne' suoi comitati d'Ivrea.

Così ad un turpe accordo e ad un più turpe tradimento de' Grandi del regno, non alla virtù delle proprie legioni od a pochezza d'animo delle legioni avversarie, audè debitore il re germanico della vittoria, e della corona d'Italia.

Tutto andava a seconda d'Arrigo, principe fra molti altri avventurossimo. Mentre una parte de' suoi capitani pigliavano ad inseguire il re Ardoino, e lo cingeano d'assedio nella rocca di Sparrone (2), Verona, spalancate le sue porte, accoglieva il vincitore colle usate acclamazioni. Quivi concorrevano a lui il marchese Tedaldo e Bonifazio suo figlio, cogli altri principi congiurati, lieti tutti di veder finalmente appagati que' voti, che lunga pezza aveano meditati e tenuti nascosti, cioè di ricondurre l'Italia sotto la dominazione tedesca (3).

(1) « Sed deceptus perfidia Principum, maiori militum parte destituitur. » (ARNULPHI *Hist. Mediol.* l. c.). « Interea qua ratione oescio, Langobardorum unanimitas scinditur, et ad resistendum discordes, omnes ad propria redire festinant. » (ADALB. l. c. § 36. p. 692).

(2) *Chron. Novalic.* Lib. V. cap. XXXVII. II. P. M. T. V.

(3) « Huic occurrunt diu expectato, Thiedoldus Marchio cum praedictis auxiliatoribus, gaudens tempus advenisse, quo secretum bonae voluntatis sibi liceret huic aperire. » (THIETM. *Chron.* VI § 5 p. 806).

Allora fu che cominciarono a piovere le ricompense pattuite da' Grandi. Fra questi ottenne il marchese Tedaldo vari diritti ed allodi in più contrade del regno, ed una parte della Marca di Toscana (1): ancora fu questo marchese premiato nella persona del suo legato Tadone, testè ricordato, al quale donò Arrigo il grado di suo cancelliere, e in beneficio la signoria del Lago di Garda: inoltre ad un suo figlio detto, come il padre, Tadone, commetteva in parte il governo della città, priva in quel tempo del suo conte (2), ed a Giovanni altro suo figlio donava un vescovato il quale secondo taluni fu quello di Verona (3).

Poco durò il soggiorno del re germanico nella città occupata. Ardeva egli di sentirsi oggimai sul capo quella corona d'Italia, la quale sebbene pretendesse avere per diritto conseguita quando venne eletto a re di Germania (4), pure ben sapeva non esser sua finchè non gli fosse dalla Dieta di Pavia solennemente concessa.

Partiva pertanto Arrigo, stipato da' suoi Grandi italiani e tedeschi per Brescia, dove accoglievano Adaltherone vescovo di quella città e Federigo arcivescovo di Ravenna, solo forse fra i vescovi del regno, che mai non avesse riconosciuto Ardoino come re d'Italia. A Bergamo riceveva la fede di Arnolfo arcivescovo di Milano: finalmente giungeva a Pavia. Colà altra caterva di magnati aspettavalo, e fra le grida e gli applausi guidavalo alla chiesa di S. Michele, ove acclamato re d'Italia da quegli elettori medesimi che poco fa avevano acclamato Ardoino, fu il giorno seguente 13 di maggio con grandissima pompa coronato da

(1) CARLI, *Storia di Verona*, T. II. p. 421.

(2) Conte di Verona, anzi marchese, era quell'Ottone duca della Carinzia, padre che fu di Gregorio V, il quale dopo la battaglia perduta l'anno precedente, riparò, come abbiamo veduto, in Germania, e vi morì circa questo tempo. La Marca di Verona fu quindi data col ducato della Carinzia a Corrado fratello del medesimo Ottone. (Vedi CARLI, *Storia di Verona*, l. c.).

(3) « De Tadone vero qui fuit propter meliorem Ardoini pedestre legatus Marchionis Teodaldi alioque Episcopi Leonis, quid fecit venerabilis clementia magni Henrici Imperatoris? Certe uni filio eius dedit Veronae Episcopatum: alteri Comitatum: patri vero Gardam et totum Benacum. » (BENZONI, *Albens. Pseudo-Episcop. Paneg. Henrici IV. Imper. fragm. Lib. I. (bis) c. XVI. ap. LUDWIG., Rel. ms. T. IX. p. 249*). — Si crede che questo Giovanni figlio di Tadone, fatto vescovo da Arrigo, divenisse poi vescovo di Verona, e sia quello di tal nome, che l'UGHELLI mette per successore del vescovo Hildebrando, il quale egli stesso era succeduto ad Oberlo soprannominato, nota (4), pag. 243. — (Cfr. CARLI, *St. di Verona* l. c. p. 422. — BIANCOLINI, *De' Vescovi di Verona*, Dissert. I. T. I. p. 181).

(4) GIULINI, *Mem. di Milano*, P. III. p. 30

Arnolfo arcivescovo sopradetto, fra una folla immensa di popolo accorso da tutte le parti del regno (1).

Questa solennità terminò coll' eccidio di molte migliaia d' Italiani, e coll' incendio di una gran parte della città di Pavia. I due storici tedeschi Ditmaro e Adalboldo, ch'io vo' seguendo in queste narrazioni, chiamano cagione di questa sventura l'ebbrezza di alcuni cittadini, che facendoli trascorrere in rissa colle genti di Arrigo, scoppiò quindi fra le tenebre della notte in miserabile incendio. Se fu l'ebbrezza, certamente (dice il Muratori) si crederà da noi fosse piuttosto ebbrezza tedesca, solito eccesso delle soldatesche dopo il trionfo. Ma da Arnolfo storico italiano di quel medesimo secolo, non si fa menzione d'ebbrezza. Scrive egli in poche parole e stando su' generali, che: « venuto re Arrigo » in Pavia, non essendoglisi questa città quanto e' voleva assoggettata, » tutta la sterminò col fuoco » (2). Un altro scrittore tedesco, pubblicato dal Leibnizio, conferma le parole d'Arnolfo, e le accresce con una notevole circostanza, la quale molto s'accorda colla barbarie di que' tempi: « Arrigo, dic'egli, venuto in Italia comandò che molte migliaia » di ribelli fossero sterminati col ferro, per vendicare l'ingiuria da que' » medesimi Romani (così chiama gl' Italiani) recata a' Teutonici qualche » tempo prima, » cioè per vendetta della battaglia vinta dagli Italiani nell'anno 1002, che Arrigo teneva per atto di ribellione. Quindi aggiunge: « arsi ancora tutti gli edifizii di Pavia, che l'illustre maestria degli antichi » aveva colà innalzati » (3).

Ora paragonando, siccome è uffizio di questi Studi, le parole di questi due scrittori con quanto scrive più a lungo di un tal fatto il biografo del re Arrigo, forse ne trarremo qualche maggior lume. Ecco come comincia letteralmente Adalboldo la sua narrazione.

(1) ADALBOLDUS § 36. l. c. — THIETM. § 5. p. 806. — *Chron. Regum Italiae* ap. MURATORI *Anecd.* T. II. p. 201-205. — Eiusdem, *Ann. d'Ital. ad ann. 1004.*

(2) « Veniens vero Papiam, quum non ad votum sibi obtemperasset, uno totam concremavit incendio. » (ARNULPHI, *Hist. Med.* Lib. I. c. 16. l. c.).

(3) « Post haec per Franciam in Italiam veniens, sanctum Pascha ibi acturus, sed adempto gaudio, multa milia rebellium iussit interire gladio, ob ulciscendam iniuriam ab eisdem Romanis Theutonicis illatam, omnibus simul aedificiis Papiæ exustis, quae veterum construxerat industria illustris. » (*Chronogr. Saxo ad ann. 1004.* ap. LEIBNITZ in *Accessionibus Hist.* T. I. p. 218. — Cfr. *Ann. Quedlinburg. ad ann. 1004.* ab auctore coevo conscripta. ap. PERTZ op. cit. T. V. p. 79).

» Sul cadere del giorno stesso (della coronazione d'Arrigo), il diavolo
 » invido della pace, nemico della concordia, ed anzi fervido seminatore
 » di discordia, ecc. col veleno dell'ebbrezza indusse i cittadini, dopo date
 » le mani, promessa la fede, fatti i giuramenti, e senza aver sofferto
 » offesa veruna, ad insorgere contro la maestà regia. Per questo con-
 » sigliero danno di piglio all'armi, per questo sommovitore s'aizzano,
 » per questo capitano corrono al palazzo ed occupano le mura della città.
 » Ancora frammischiavansi certi istigatori, i quali turbolenti per istinto,
 » avrebbero preferito a loro talento sotto Ardoino andar vagando fra le
 » rapine, che non sotto Arrigo esser posti al freno delle leggi e della
 » giustizia. Scoppia uno strepito, s'innalza un frastuono, tosto udito nel
 » palazzo; ma perchè nissuno non poteva immaginare cotesto dopo la
 » feide data in quello stesso giorno, non così presto se ne comprese la
 » causa. Comanda il re si esplori. Gli si reca, che la città è in furore,
 » che la plebe smaniosa va impazzando. Per la speranza di tornarla in
 » calma, l'arcivescovo di Colonia, che stava presso il re, si fece alla
 » finestra cominciando a domandare della cagione di tanto infuriare:
 » ma una pioggia di sassi e di saette appena gli lasciò terminare le sue
 » parole. Troppo bolliva l'animosità de' Longobardi, e questa pigliava
 » un ardir contumace dalla ricordanza della battaglia vinta contro il
 » duca Ottone » (1).

Così Adalboldo, e così pure Ditmaro, del quale il primo per lo più non fa che amplificare la narrazione (2). Tuttavia questo aggiunge Ditmaro: che avendo il re domandato quale fosse la cagione di tanto strepito, gli era stato risposto: « i popolani infiammati da subito furore, ed animati da servil presunzione aver dato principio a questo movimento, gli altri tutti essersi uniti a costoro, a danno e disdoro di lui » (3): il che vale: che il movimento era cominciato per opera del popolo, il quale spinto da *servile baldanza* aveva posto mano alle armi: e che tutti gli altri Italiani accorsi in Pavia s'erano uniti al popolo, a danno e a disdoro d'Arrigo, per favorire Ardoino (4).

(1) ADALBOLDI, § 37. *ibid.* p. 692-693.

(2) THIETM., VI. § 6. p. 806.

(3) « Plebeius furore subitaneo inflammatus, et servili praesumptione animatus, hanc commotionem »
 » primitus incepisso; caeteros quoque omnes in detrimentum sui vel dedecus convenisse. »
 (THIETM. *ibid.*.)

(4) Questa parzialità del popolo per Ardoino affievolisce, e pone nel vero loro aspetto le ac-

Tutto questo ci chiarisce il passo osenro dello storico Arnolfo, e l'altro del cronografo Sassone da me riferiti (1); perciocchè evidentemente la cosa fu a questo modo: re Arrigo venuto in Pavia, vedendo che la popolazione italiana ancora teneva con Ardoino suo emulo, e che in virtù della passata vittoria aveva posto mano all'armi, sdegnato, la sterminò col ferro e col fuoco.

Non fu per avventura alieno da questo movimento il re Ardoino, il quale mettendo a profitto il tempo che corse tra il tradimento di Verona, e l'ingresso di Arrigo in Pavia, da circa il 20 di aprile al 15 di maggio, tuttochè assediato dagli Enriciani nella fortezza di Sparrone, s'adoperò a preparare segretamente questa sommossa per mezzo de' suoi fedeli. Costoro vo ravvisando in quegli *stigatori*, accennati dallo storico Adalboldo (2), i quali ricordando agl' Italiani la rotta data nel 1002 alle genti d'Arrigo, e persuadendoli poterne riportare nuova vittoria, gli aizzarono a levarsi ad arme. E sebbene da nessuno degli storici non venga nominato Ardoino come partecipe di questo moto, tuttavia parmi doversi tenere per tale, considerando siccome non senz' arte, nè senza presumibile riuscita fu la cosa ordinata e condotta dagli emissari di Ardoino. Perciocchè corrispondendo questo re al tradimento a lui fatto da' soli Grandi del regno, una vendetta condotta dal solo popolo, volle che lo scoppio dell' insorgimento non avesse luogo se non se dopochè il re Arrigo accolto, festeggiato e coronato da' principi in Pavia, e di nulla non dubitando, avrebbe acquartierate le sue legioni, secondo l'uso, fuori delle mura (3), e sarebbe rimasto nella città con poche guardie teutoniche quasi indifeso, e perciò più probabilmente oppresso dalla popolazione levata a stormo. Certamente se non era l'infuriare dell' incendio che rallentò la celerità del movimento, e che, lasciando il tempo alle legioni teutoniche accampate ne' dintorni, di radunarsi, e d'entrare nella città, diede alla fine ad Arrigo vinta la battaglia, questi e

cuse delle rapine e d'altri disordini, che, al dir degli scrittori tedeschi, commetteva o lasciava commettere il re Ardoino in Italia, quasi che simili fatti non accadessero anche altrove.

(1) Vedi le note (2) e (3) alla pag. 246.

(2) « Quidam etiam intererant *instigatores*, qui per propriam conscientiam turbidi, sub Harduino » malebant etc. » (ADALB. l. c.).

(3) « Erant enim Teutonici partim cum equis, partim per hospitia, partim per castella illi » comitatus finitima. » (ADALB. § 38. p. 693).

tutti i Grandi che avevano tradito la causa d'Ardoino sarebbero rimasti senza verun dubbio oppressi o prigionieri.

Del resto, sia che questa sommossa fosse opera d'Ardoino, od uno spontaneo movimento della popolazione italiana, se ne dovrà pur sempre argomentare del progresso già fatto dal popolo d'Italia verso l'amore della indipendenza, che nutrito, come si è detto, sotto il regno degli Ottoni dalle istituzioni che favorivano il clero, ed irritato dalle vessazioni de' Tedeschi, era venuto sempre crescendo, per riportare nel secolo seguente luminoso trionfo.

Come già si è detto, narra Adalboldo che i congiurati si divisero in due colonne, una delle quali si portò sulle mura di cinta per difenderle dall'assalto, che i nemici disseminati al di fuori non avrebbero pensato a intraprenderne, mentre l'altra trasse furiosamente contro il regio palazzo. Fu qui vigoroso l'assalto e non dissimile la resistenza che vi opposero le guardie, sebben queste, per la ragione detta di sopra, fossero poche. Infuriato il re, chiedeva le armi, e già preparavasi ad uscire contro gli aggressori. Ma Eriberto arcivescovo di Colonia, e quelli tutti *che saviamente pensavano* (così buonamente Adalboldo) s'opposero a ogni modo a questa deliberazione, ben sapendo, siccome perduto il re, ogni salvezza degli altri era spacciata (1).

Lo strepito sempre crescente chiamò verso il palazzo i pochi Tedeschi sparsi per la città, i quali sebben giunti alla rinfusa, pur fecero qualche resistenza a' sollevati. Ma la notte già densa, era agli Enriciani funestissima: perciocchè essendo eglino accorsi disordinati e inaspettatamente, mancavano d'armi per difendersi, e per opporre a quelle che balestravano gl' Italiani, e che facevano loro un danno inestimabile. L'urgenza, dice Adalboldo, diede improvviso consiglio: per diradere le te-

(1) « At Coloniensis Archiepiscopus toto quo poterat nisu, cum his, qui sanæ mentis erant, » regem retinebat, sciens quia capito perditio, nulla spes evasionis superesset in membris. » (ADALB. l. c. § 38). — L'editore di questo biografo (il signor G. WAITZ) pretende che questa uscita deliberata dal re, fu un sogno di ADALBOLDO. « Haec sibi ADALBOLDES excogitavit; » e questo perchè DITMARO non ne parla. Sembra, che sebbene ADALBOLDO per lo più non faccia che seguire l'altro scrittore, non è cosa impossibile che alcuna cosa di più potesse inserire nella sua narrazione, nota a lui e non a DITMARO. Del resto la cosa è più che credibile, e si può tener fede in questo ad uno scrittore come ADALBOLDO, detto dal medesimo Editore: « vir sui temporis » summus, qui ab Henrico in rebus publicis non raro est adhibitus. » (Vedi G. WAITZ *Præf. ad Vitam Henrici II. Imperat.* ap. PERTZ l. c. p. 680, ed ivi la nota (34) p. 693).

nebre onde provvedere a tale mancanza, s'appicca da' Tedeschi il fuoco ad alcune case vicine. Questo fece rallentare l'assalto del palazzo (1).

Intanto quelle fra le legioni germaniche, che erano acquantierate di fuori ne' luoghi più vicini alla città, udito il fragore, affrettavansi contro le mura, dove, come si è detto, una parte della popolazione era pronta a far resistenza. Assalitori ed assaliti combatterono virilmente. E già era stato ributtato un primo assalto. Ma la morte incontrata da Giselberto fratello della regina Cunegonda, giovane valoroso e molto caro a' Teutonici, spinto avendo gli amici di quello a farne vendetta, fu con nuovo maggior impeto rinnovata la prova; alla fine dal maggior numero di nemici che non cessavano di sopraggiungere, sono superate le mura. Così fu aperto l'adito nella città ad una parte delle schiere germaniche (2), le quali con grandissima furia mossero in soccorso del re assediato. Quivi durò intera la notte la battaglia, in pari modo accesa, in pari modo dubbiosa, sì che ora l'una, ora l'altra parte de' combattenti, gareggiando d'audacia e di furore, più volte credette afferrar la vittoria (3). Era una casa o palazzo di cui i Tedeschi avevano fatto un modo di quartiere o di rifugio, solo luogo nel quale, spossati dalla fatica talvolta ricoveravansi in salvo: l'assalgono a loro posta col fuoco gl' Italiani: questa in breve s'accende, minaccia e cade, e vien tolta così a' nemici ogni speranza di scampo. Non si smarriscono tuttavia costoro, che anzi il disperato caso rende i Teutonici più animosi a resistere (4), come più incita gl' Italiani a proseguir la vittoria.

Ma fattasi l'alba, le cose cambiavano d'aspetto. Gli Alemanni, i quali per essere a quartiere assai lungi dalla città, più tardi degli altri, avevano inteso della sommossa, giungevano ora infuriando a piè delle mura, e queste, unitisi a' Lotaringi ed a' Franchi, rotte e superate, in parte della città lontana dal luogo della battaglia, epperò meno folta di difensori, trassero impetnosi al reale palazzo (5). Quivi ricominciò più feroce la mischia cogl' Italiani: ma alla fine questi sopraffatti dal numero de' ne-

(1) « Tandem noctis densatur tenebrae, et lapidum ac sagittarum iacula Teutonicis sunt infestissima. Necessitas rapit consilium, et ad providenda iacula citissime facit incendium » (ADALB. l. c. § 38 — Cfr. THIETM. Chron. § 6. l. c. p. 806. T. V.).

(2) THIETM. Chron. l. c. — ADALB. l. c.

(3) ADALB. l. c. § 39.

(4) THIETM. et ADALB. l. c. § 40.

(5) THIETM. et ADALB. l. c.

nici, gente sempre crescente, fresca e riposata, furono costretti di cedere, riparando nelle case all'intorno. Nè perciò cessarono di combattere. Dalle finestre, da' tetti, dalle torri piovevano sovra i nemici nubi di saette e di sassi che a molti recavan la morte. Allora fu che per comando di Arrigo (come abbiamo da' citati scrittori, Arnolfo ed il cronista Sassone) fu rinnovato l'incendio che distrusse in gran parte l'infelice Pavia (1). Era questa città ricca di molti sontuosi edifici, eretti quivi, come dice il cronista, dalla industria degli antichi, ma le case popolari e quelle de' meno agiati cittadini erano coperte di paglia. Non è a dire adunque con quanta facilità, e come rapido s'appiccasse e si propagasse l'incendio (2). Indicibile, scrive Dittmaro, fu la strage fatta degli Italiani (3). Perirono a migliaia donne, vecchi, fanciulli, armati e disarmati. Molti arsi nelle case, molti trucidati nel sottrarsi che tentavano dal fumo, dal fuoco, dalle cadenti rovine. Durò lungamente il macello: la rabbia de' Teutonici difficilmente sazia, cessò solo quando cessò la resistenza (il che è argomento maggiore della quantità numerosa de' morti), e per passare dal sangue al bottino.

Signoreggiavano intanto le fiamme che sempre attizzate dalla vendetta de' vincitori, oramai minacciavano d'annientare gli avanzi di quella città un dì famosa. Allora (dice Adalboldo) il re cominciò a piegar l'animo dal rigore, e comandò si cessasse, ma non potendo sopportare il fetore che esalava dall'incendio, uscì dalla città riparando in una bastita del vicino monastero di S. Pietro in Cielo d'oro. Ma nel trafugarsi dal regio palazzo, scrivono taluni, che precipitandosi da un muro si disanciasse una coscia, e quindi poi rancando nel camminare, gli si ponesse il soprannome di *zoppo* (4). Seguirono il re i cittadini scampati dall'ecicidio, e fu loro concesso il perdono: « ma, dice espressamente il cro-

(1) « Interim Alemanni cum Francis et Liuthariensibus tandem haec mala resercentibus fractis intrantes muris, in tantum concives persecuti sunt, ut e munitione domuum suarum nec unus egredi presumeret. Harum sumitate hii nostros iaculis gravantes immissis, incendio perierunt illato. » (THIETM. § 6. p. 807).

(2) MURATORI, *Ant. M. Ae. T. II.* Diss. XXI. p. 167.

(3) « Difficile est cuiquam ad enarrandum, quanta ibidem strages diversis efficitur modis » (THIETM. l. c. — V. etiam *Chronogr. Sax.* ap. LEIBNITZ l. c. ad an. 1004).

(4) « Sunt qui scribunt Henricum regem ante acceptam benedictionem (Papae) in Italica expeditione captum ab hostibus, sed illusisse capientibus, ut ex arce qua teneretur desiliens, coram laeserit, unde per reliquum tempus claudicavit. (KRANTZII, *Saxonia*, Lib. IV. c. 32).

» nista, facil cosa è il perdonare dopo che il castigo vantaggiò la
» colpa » (1).

Inorridì tutta l'Italia all'atroce punizione di Pavia, e da tutte le parti del regno le genti impannite s'affollarono ne' prati di Pontelungo al placito ivi adunato da Arrigo (2). Ma il re, che ben sapeva quale potesse essere la sua sicurezza in mezzo ad una popolazione, barbaramente manomessa, fatte le sue preghiere in Sant'Ambrogio di Milano, prese dopo il 23 di maggio la via della Germania, lasciando poco contenti della sua dipartenza i principi del regno che avevano rotto la fede al re Ardoino.

(1) « Sed iam incendio nimium invalescento, rex a rigiditate mentis suae flectitue, quisque ut
» a cepto desistant pietate motus imperat. Quos vix compescens, diutiusque concremationis foe-
» torem ferro non valens, ad munitiunculam quandam quao Sancti Petri Cella aurea vocatur, se
» contulit. Cives autem vix respirantes regem sequuntur. «... Fit eis remissio, fit eis indulgentia.
» Sed facilis est indulgentia postquam culpam excedit poena! » (ADALB. § 40. p. 693. — Cfr.
THIETM. § 6). — *In Coelo aureo non in Cella aurea*, come nota l'A. della *Papia Sacra*. — Questo
monastero stava allora fuori delle mura nel luogo dove poi fu costrutta la cittadella. (*Papia Sacra*,
P. I. p. 77).

(2) « Pontelungo luogo posto tra Pavia e Milano. » (GIULINI, *Mem. di Mil.* P. III, p. 31).
» Forte oppidum Sponte, in agro Novaresiae Papiaeque vicino. » (VRST. in nota (93) ap. PERTZ,
I. V. in *Chron.* THIETM. p. 807).

CAPITOLO IX.

RICERCHE SOVRA I FATTI DEL RE ARDOINO DOPO L'INCENDIO DI PAVIA.

OBERTO II MARCHESE DELLA LIGURIA.

(1004-1010).

La vendetta del re di Germania non aveva mirato soltanto a punire Pavia della sua devozione pel re Ardoino, o a lavar l'onta della disfatta toccata nel 1002 dalle squadre tedesche alle Chinse dell'Adige. Essa era volta a maggiore disegno.

Imperciochè non i soli Pavesi agli occhi d'Arrigo erano stati colpevoli della sommossa, ma con essi tutti gli altri Italiani, che la solennità della coronazione frequenti aveva raccolto in quella città, i quali secondando il rumore sorto nella popolazione, avevano rabbiosamente combattuto siccome vedemmo contro le genti d'Arrigo, e condotto questo re con tutta parte tedesca a quasi estrema rovina (1).

Coll'enormità del castigo (2) aveva egli adunque avuto in animo di atterrire l'Italia intera ad un punto, e d'ammonirla della qualità delle sue vendette, ove si consigliasse di rompere in novelle sommosse. Ma se fu grande lo spavento che invase gl'Italiani, non fu meno grande l'orrore che suscitò ne' Tedeschi la barbarie di quell'eccesso, che senza verun vantaggio di lui che lo comandava, aveva in poche ore disfatto un'illustre città, arsi tutti i suoi monumenti, sparse le sue vie di migliaia di cadaveri. Tutti gli scrittori di Germania lamentano in quel tempo la sorte dell'infelice Pavia (3).

(1) « Plebeios furore subitaneo inflammatos hanc commotionem primitus inceperisse, caeteros quoque omnes in detrimentum sui nel dedecus conuenisse. » (THIEM. l. c. VI et 6). — Sed spe sublata refugii, magis animus eorum accenditur, et ad congregandum iterum » ITALIS feruentius incitatur. » (ADALB. *Vita Heinrichi*, l. c. § 40).

(2) « CULPAM EXCEDIT POENA. » (ADALB. l. c.).

(3) « Difficile est cuiquam ad enarrandum, quanta ibidem strages diuersis effeitur modis. » (THIEM. *ibid.*). — « Ferro et flamma stragem civium miserabilem faciunt. » (ADALB. *ibid.*). — « Rebellium multa milia iussit interiuere gladio, omnibus simul aedificiis Papiæ exu-

In tali eccessi, abbiain detto, era caduto il re Arrigo senza verun suo vantaggio: anzi, dir dovevamo, con grave suo danno. Arvegnachè questa, come sempre ogni vendetta politica raffreddando lo zelo de' suoi aderenti, ed irritando quello degli avversari, aperse ad Ardoino una via di risorgimento, e dilungò dal re tedesco per altri dieci anni quella corona imperiale alla quale anelava, e che una novella sommossa de' Romani indusse poi Benedetto VIII a porre sul di lui capo nel 1014. E comechè lo storico Arnolfo lasciasse scritto, che la confidenza degl' Italiani in Arrigo periva bensì nelle fiamme di Pavia, ma che la potenza di lui ne era sorta sovra il terrore più grande, i fatti che colla scorta di questo scrittore noi verremo raccontando, contraddicono all'ultima parte della di lui sentenza (1).

Frattanto se la temenza dell'ira d'Arrigo frenava per un lato il natural desiderio degl'Italiani d'affrancarsi da una dominazione che da tanti anni avversava, e che trascorreva in cotali esferatezze, l'esempio della fede rotta al re Ardoino in Verona li spingeva dall'altro a meditar tacitamente le loro vendette. Epperò sebbene dopo l'eccidio di Pavia le città italiane avessero mandato i loro legati a giurar fede ed omaggio al re vincitore, mentre con promesse e con istatichi le atterrite popolazioni vicine s'industriavano di placarne lo sdegno (2), non così tosto ebbe Arrigo rivalicato colle sue genti le Alpi, che una ricca parte delle provincie del regno, ricordando i primi giuramenti, tornava sotto la signoria del re Ardoino.

Ora giunte a questo segno le nostre narrazioni trovano più fitte le tenebre che ingombrano gli esordi del secolo XI. Imperciocchè dopo la partenza del re Arrigo e per insino al tempo del di lui ritorno in Italia

» stis, quae veterum instruxerat industria illustris. » (*Annal. Quedlinburg.* ap. PERTZ T. V. an. 1004). « Incendium miserabile ciuitatis Papiae. » (*Ann. Hildesheim.* ibid. 1004). — « Miserandum Papiae incendium. » (LAMBERTI *Ann.* ibid. eod. an.) — Vide etiam *Chronogr. Sax.* et *Annalist. Sax.* ap. LEIBNITZ in *Access.* l. c. et ap. ECCARD. op. cit. T. I. etc.

(1) « Omnis inhorruit Italia simile pertimescens. Ab hinc illius exinanita confidentia, huius » (Henrici) prevaluit ubique potentia. » (ARNULPH. *Hist. Med. Lib.* I. 16.).

(2) « Domita ergo Papia, tota concutitur Italia, ac indigenae omnes ad regem non inuitati con- » suunt, et per omnia praeceptis eius obbediunt. Ciuitates etiam ad quas rex nondum uenerat, » obsides ultro transmittunt, fidemque debitam per sacramenta promittunt. His expletis, rex in » quendam locum, qui Pons longus vocatur, uenit; ibique Langobardorum innumerabilis multitudo » accessit, seseque ad obsequendum per omnia regiae maiestati subiecit. » (ADALB. ibid. § 41.

— Cfr THIETM. I. cit. VI. 7.

nel 1014, l'importantissimo aiuto degli scrittori tedeschi ci vien meno: ed avvengachè (come ben si può credere) l'universale spavento abbia pure imposto silenzio a' nostri cronisti italiani, noi ci vediamo condotti in questi Studi a riferire quelle rare notizie che sono sparse qua e là negli altri monumenti contemporanei, le quali più per analogia che in altro modo, a intendimento del vero, saremo costretti d'interpretare. Tuttavia poche parole dello storico Arnolfo, solo fra gl' Italiani di quell'età, che ancora ardisca nominare Ardoino, bastano a porci sulla via per indagare a qual partito s'appigliasse questo re dopo il ritorno del suo rivale oltremonti.

« Ardoino, dice egli, restaurate alquanto le proprie forze, prese a » quel modo ch'è potè a vendicarsi de' principi traditori » (1). Qual modo di vendetta poi egli usasse, non ce lo dice Arnolfo, e noi lo verremo cercando.

Intanto non dubito d'assequerare, che appena libere le fumanti rovine di Pavia dalla presenza degl' invasori, questa città s'affrettò di accogliere Ardoino, dal quale poteva attendere qualche risarcimento alla tempesta sofferta. Che anzi uno scrittore del secolo XV, il quale per la prossimità della sua Vigevano con Pavia, potè raccogliere sopra di ciò nascoste notizie, e tradizioni sebbene antichate degne di qualche fede, attribuisce appunto a questo re il restauro fatto di quella città incendiata, la quale ben si sa come fra breve risorse splendida e bella (2).

Dalle note cronologiche di certo documento dato in Pavia nell'anno 1008, pel quale il conte Ottone, figlio del re Ardoino, fa una donazione alla chiesa di S. Siro, risulta che in quell'anno Pavia obbediva come per lo avanti al re italiano (3); e siccome non v'ha indizio che

(1) « Verumtamen reassumtis interim viribus, Ardoinus iuxta posse ultionem exercet in perfidos. » (ARNULPHI *Hist. Lib. I. c. XVI*).

(2) INGRAMO DE' CURTI viveva verso la metà del secolo XV: raccolse le memorie e i documenti più rari de' tempi andati, sopra Vigevano sua patria, e lasciò un ms. assai pregievole, intitolato: *Ne Memoria pereat*, del quale non rimangono che alcuni frammenti in gran parte corrosi, conservati nell'archivio della città di Vigevano. (V. in *Mém. Stor. della Città e Contado di Vigevano*, opera di P. G. BIFFIGNANDI, p. 12 e 37).

(3) Le note cronol. di questo documento sono: « In nomine Dei et Saluat. nri I. C. Ardoinus divina tribuente gr. piissimus rex, an. regni eius propitio septimo Id. VII. — Actum apud Papiam in palatio iuxta ecclesiam sancti Michaelis fel. » (GUICHENON, *Bibl. Sebuse. c. XXV. cent. I* Vedi nell'Append. al n. 35). — È dubbio se ciò fosse negli ultimi quattro mesi dell'anno 1008, o ne' due primi del 1009 (MURAT. *ann. 1008*).

ciò non avesse avuto luogo anche prima di quell'anno, così potremo avvisare, che que' manomessi cittadini tornassero alla devozione d'Ardoino fin dal maggio o dal giugno del 1004, e tosto ch'è la loro città fu sgombra dagli oppressori. In tal guisa la pensarono pure il Muratori ed il Giulini, due valorosi critici, le cui storiche opinioni equivalgono quasi sempre alle testimonianze de' più sinceri documenti (1).

Tuttavia io vo sospettando che il ritorno del re Ardoino nella sua fedele Pavia, non avesse luogo prima dell'aprile dell'anno 1005, avvegnachè l'assedio del castello di Sparrone, nel quale ragion vuole che questo re avesse riparato dopo il fatto di Verona, essendo stato levato dagli Enriciani soltanto dopo un anno d'inutili prove per costringere quella fortezza (2), egli non fu libero d'uscirne prima del tempo sovra indicato. Difatti vedremo, che le prime mosse di lui per punire i principi ribelli, furono nell'aprile dell'anno 1005.

Allora si fu, siccome io vo argomentando, che Ardoino fece coniare in Pavia la seconda di quelle monete di cui si è parlato, colla quale il re italiano volle dare pubblica dimostrazione della sua restaurata signoria (3).

Ma oltre Pavia, credette il Giulini, che anche Milano nell'anno 1008 coll'arcivescovo Arnolfo riconoscesse celatamente Ardoino per suo re, quantunque le pubbliche carte vi fossero intitolate al re Arrigo. Se tal cosa si ammette per quell'anno, non so vedere come non si potrebbe opinare che anche prima Milano fosse tornata alla devozione d'Ardoino, e tosto ch'è essa fu libera dalla presenza de' Tedeschi.

Così pure avviseremo che molte altre città italiane, contro le quali non apparisce che il re Ardoino si movesse coll'armi, praticassero lo stesso, favoreggiando segretamente ad onta de' propri Conti, la parte d'Ardoino, mentre palesemente segnavano gli atti pubblici cogli anni e col nome del re germanico. Nè l'asserzione del Giulini verso Milano manca di probabile fondamento; abbiamo infatti dallo storico Arnolfo, siccome fra i fedeli del re Ardoino, che dopo il fatto di Pavia erano stati dagli Enriciani perseguitati, vi fosse pure Pietro vescovo d'Asti, il quale rifuggitosi in Milano presso l'arcivescovo, vi aveva trovato

(1) MURAT. I. c., GIULINI, *Mem. di Milano*, P. III. pag. 57.

(2) *Chron. Novat.* Lib. V. c. 37. *M. H. P. T. V.*

(3) Vedi nel Proemio le pag. 71 e seg.

protezione ed asilo riposato e sicuro, che più non abbandonò finchè visse. Che inoltre sdegnato quel bollente arcivescovo, perciocchè il re Arrigo senza il di lui consenso aveva dato il vescovato d'Asti, suffraganeo di quel di Milano e vacante per la cacciata del vescovo Pietro, ad Alrico fratello di Manfredi II. conte di Torino, poco si curò di disgustare il re di Germania coll'adunare un concilio in Milano, nel quale fulminò di scomunica il vescovo intruso dal re Arrigo, e non contento a questo, portò le sue schiere contro Asti, mettendo, secondo l'uso barbarico di quell'età, a fuoco e a sangue la provincia, e stringendo la città di assedio, finchè l'uno e l'altro di que' fratelli, cioè Alrico e Manfredi, non furono ridotti ad unirsi a lui, ed a soddisfare con pubblica penitenza in Milano all'offesa di lui giurisdizione. Allora solo concesse ad Alrico l'investitura della chiesa d'Asti, che il vescovo Pietro probabilmente poco si curava di ripigliare (1).

Basterà questo fatto a chiarire di falsità l'asserzione di vari storici moderni, e tra gli altri del Sigonio (2), i quali appoggiandosi a Gualvano Fiamma, scrittore del secolo decimo quarto, e per le cose più antiche narratore di favole (3), raccontano che la città di Milano col suo territorio fu in quegli anni messa a fuoco e sangue da Ardoino: asserzione smentita altresì dal silenzio dello storico Arnolfo, il quale viveva in quel secolo, e che scrivendo appositamente delle vicende di Milano, certo non avrebbe tralasciato di farne parola. Nè recar deve meraviglia il vedere che l'arcivescovo Arnolfo, il quale pochi anni prima era stato principal fondamento della venuta del re Arrigo in Italia, macchinando e parteggiando per esso in segreto, mentre in apparenza lasciava che Milano obbedisse al re Ardoino, ora, mutando sistema, favorisse e parteggiasse per questo re, in segreto, ma consentendo che in Milano le pubbliche carte fossero intitolate al re Arrigo. Generalmente solo sistema politico de' Grandi di quell'età, era il non averne nessuno oltre quello del proprio utile: epperò sia che l'offeso suo diritto giurisdizionale per l'elezione di Alrico paresse all'arcivescovo bastante motivo del suo cambiamento di parte, o che la dolcezza dell'occupazione germanica poco gli avesse gradito, possiamo argomentare che rettamente si sia apposto

(1) ARNOLPHI, *Mediol. Hist.* Lib. I. c. 18 et 19. — Cfr. TERRANEO, *Adelinde Illustrata*, P. II. p. 52 e seg.

(2) SIGONIUS, *De Regno Italiae*, Lib. VIII. col. 478 et passim in praeced.

(3) Vedi la prefazione del MURATORI al *Manip. Florum* Gualvani DE LA FLAMMA p. 533. R. I T XI.

il Giulini dicendo, che in quel punto, e mentre Arrigo lontano andava di giorno in giorno riperdendo quell'autorità che di nuovo acquistava Ardoino, l'astuto arcivescovo si volgesse alla parte di questo re, ch'egli aveva dapprima tradito. Maggiori prove di questo suo procedere noi addurremo andando innanzi. Del resto questo facil sistema, in armonia colla corruzione di que' tempi, si vedrà adoperato da altri di que' principi: nè forse andremo lungi dal vero, credendo che in parte almeno fosse ancora seguito dal conte di Torino. Certo fa specie il vedere che questo principe, vassallo di Ardoino, eugino o in altro modo suo congiunto, non mai sia ricordato nè fra' fedeli, nè fra' ribelli di lui, nè fra coloro che l'abbandonarono perfidamente a Verona, o che apertamente tenevano pel re Arrigo. Altronde per la legge militare del regno, essendo questo conte tenuto di condurre in campo cogli altri principi le sue masnade alla chiamata di Ardoino suo re, l'essere rimasto in quella lotta neutrale, non poteva essere stato effetto che o di ribellione, o di speciale comando avuto dallo stesso Ardoino, il quale forse aveva in tal guisa voluto che il passo delle Alpi fosse dalla parte di Susa da Manfredi custodito, per mantenersi in ogni evento con ciò libero sempre l'adito dalle sue fortezze d'Ivrea nelle terre governate dal conte, dove, siccome dicemmo, egli possedeva di molte tenute. Siane di ciò come si vuole, il maneggiarsi del conte di Torino fu tale, che mentre Arrigo dopo il suo ritorno in Germania lo chiamava suo fedele, ed eleggeva suo fratello a vescovo d'Asti, Ardoino non perciò lo faceva segno delle vendette che usava contro gli altri principi traditori.

Queste vendette cominciarono appena ebbe egli potuto ammassare armi ed armati. E qui convien badare che possessore della Marca d'Ivrea, dalla quale mai nè le sentenze di Ottone III, nè le armi di Arrigo non lo poterono svellere, aveva il re italiano un nerbo assai possente di guerrieri fedeli, co' quali a tutta prova poteva accingersi ad imprese novelle. Chè s'io non temessi di accrescer noia a chi sarà per leggere in questi Studi, potrei facilmente formar la rassegna de' capitani d'Ardoino in quella provincia (cioè de' conti della Marca d'Ivrea) e di alcune altre vicine, che si mantennero fedeli alla causa italiana, guidato da un diploma dell'anno 1014, fulminato da Arrigo già coronato imperatore contro gli aderenti del re Ardoino (1). Cosa non priva di qualche

(1) Vedi nell'Append. questo diploma al n. 37.

curiosità sarebbe il ravvisarvi fra' condannati come ribelli al re tedesco, i principali autori d' illustri famiglie di Vercelli, d' Ivrea, di Lomello, del Monferrato, del Canavese, e d'altre terre subalpine, e lo seorgervi ancora fra' puniti da Arrigo, varii di que' medesimi conti, o i figli loro, (tanta è la virtù delle condannazioni nel bollir delle parti!) già stati condannati da Ottone III per la fazione di Vercelli da noi raccontata (1). Argomento mi è avviso di qualche peso contro quegli scrittori che dipinsero Ardoïno come un mostro di vizi e di scelleraggini, e in odio perciò a tutti (quantunque, siccome abbiamo veduto negli scrittori germanici istessi, gl' Italiani adunati in Pavia nel 1004 preferissero la *servitù sotto il giusto Ardoïno*, a quella che i Tedeschi chiamano *libertà sotto un re germanico* (2)), e contro quegli altri i quali calunniarono i popoli subalpini, dicendo non aver essi mai nulla operato in pro della patria comune per salvarne la nazionalità e difenderla dal dominio barbarico (3). Ad ogni modo da questo e da altri somiglianti diplomi dati da Arrigo in quell'anno per punire i fedeli del re italiano, risulta pur sempre che grande si rifece il seguito d'Ardoïno nel novennio di regno che corse dopo l'incendio di Pavia (4).

Colle schiere adunque raccolte ne' suoi comitati d'Ivrea, e con quelle fornite da Pavia e dalle altre città tornate alla devozione sua, prese Ardoïno a riconquistare il suo regno ne' primi mesi dell'anno 1003, e soprattutto, secondo l'andazzo de' tempi, a vendicarsi de' principi traditori. Ma ben antiveggendo siccome il re Arrigo o richiesto da' principi, o per desiderio di ripigliare l'Italia, sarebbe per ricondurvisi con un più poderoso esercito, contro il quale l'infedeltà de' grandi vassalli del regno l'impediva di raccorre uno sufficiente per combatterlo in campale giornata, non volse Ardoïno come nel 1002 il pensiero ad avventurare di nuovo la sorte sua, ritentando un'altra volta Verona e le Chiuse dell'Adige, inutile prova avendo i traditori da tergo. Ma cambiando ad un tratto sistema, deliberò di far centro di dipartenza delle

(1) Vedi Capitolo II.

(2) « Proximum libertati esse Germano Principi parero! » (MASCOVII, *Comment. de Henr II* § VI).

(3) HALLAM, *L'Europe au moyen âge*, T. III. Ch. V.

(4) « Egli è facile ed insieme giusto, dice il MURATORI, l'immaginare che durasse molto la guerra tra Ardoïno e que' della sua fazione da una parte, e le città aderenti al re Arrigo dall'altra. » (*Annali 1013*).

sue guerresche spedizioni, le castella d'Ivrea e le provincie all'intorno, dove sempre riteneva un nodo d'armati, e sapeva poter riparare in caso d'avversa fortuna, e da quelle portarsi colle sue squadre ad infestare l'oste nemica, ove di nuovo Arrigo scendesse dall'Alpi, ed intanto a manomettere le terre de' principi ribelli, queste ripigliando, guastando, saccomanando, secondo l'uso di quell'età, portando insomma a costoro quel modo di guerra, che più tardi fu detto in Italia guerra guerriata, e che ora si chiama guerra di partigiani: singolar modo invero di riconquistare il suo regno, e di rifarsi benevoli le popolazioni!

La mancanza di positive notizie sovra quegli avvenimenti rende cosa impossibile il seguire con qualche precisione le mosse d'Ardoino in questa maniera di guerreggiare mutabile ed avventurosa, per cui un giorno riusciva vincitore e alla domane perdente: ora una città occupava sopra i nemici, che poco dopo abbandonava: e talvolta in un luogo perdeva e guadagnava in un altro. Quindi fra l'altre molte, la cagione per cui mentre sappiamo che il regno suo durò per insino al settembre del 1014, non si può, come osserva il Muratori (1), determinare quali città tornassero alla di lui obbedienza, oltre quelle, come Pavia e Milano più vicine alla Marca d'Ivrea. Tuttavia colla scorta di alcune carte pagensi noi verremo forse trovando qualche indizio delle principali di lui incursioni.

Conciossiachè la maggior parte de' principi italiani che avevano abbracciata la causa d'Arrigo, trovandosi per la lontanauza di questo re esposti alle vendette di Ardoino, allorchè le apparizioni di lui si facevano più minacciose, s'affrettavano, forse costretti da' fantori d'Ardoino, di fare che s'intralasciassero gli anni del re germanico, soliti a porsi nelle pubbliche carte, dopo l'anno 1004, e che queste si segnassero cogli anni solo dell'era eristiana, pensando in tal guisa non disgustare il re lontano, e non offendere il re vicino e minaccioso (2). Di questa qualità sono alcune carte riferite dal Lupi nel suo Codice Diplomatico; una

1) MURATORI, *Ann. d'Italia*.

(2) « Cum consequentes membranae consignatae fuerint fere omnes annis Henrici regis, haec vero (vedi la nota seguente (1)) anno incarnationis, vulgari scil. seu a die Natalis, aut kal. » lauarii derivato, et cum Bergomi procul dubio, acceptus fuerit superiori anno rex Henricus, » hinc significari posset, quod illo absente Ardoinus vires resumeret. Ideoque Bergomates ne illum offenderent omisissent Chartas Henrici nomine et annois inscribere. » (LUPI *Cod. Diplom. Bergom. it.* T. II. p. 442.).

di esse del mese di aprile dell'anno 1005 tiene gli anni soltanto dell'incarnazione, ed un'altra dell'anno medesimo, ma del mese di dicembre, porta gli anni del re Arrigo (1). Similmente altre carte degli anni 1006 e 1007 tengono gli anni d'Arrigo: altra dell'anno 1008 nel mese di marzo, porta gli anni solo di G. C.: ed una quarta del mese di giugno, gli anni di nuovo di Arrigo.

Quest'alternativa, che si rinnova nelle carte parimenti private dell'anno 1010, più non si osserva negli anni seguenti (2).

Per queste considerazioni vo io sospettando, siccome sembra accennare il dotto Lupi, che le prime scorrerie d'Ardoino, poco dopo il suo ritorno in Pavia, si portassero contro Brescia: e così verremo argomentando che questa forse occupasse o taglieggiasse nel rimanente dell'anno 1005 sino al dicembre, in cui o cacciato dagli Enriciani, o voltosi ad altra impresa, Brescia era da lui abbandonata; che quindi nuovamente vi si conducesse colle sue masnade nel marzo del 1008, e la tenesse finò al giugno dell'anno medesimo, e finalmente per l'ultima volta corresse le terre bresciane verso il mese di maggio dell'anno 1010, e già nel marzo susseguente le avesse sgomberate. Tale mossa d'Ardoino contro le terre bresciane serve altresì di novello argomento per credere che Milano e segretamente il suo arcivescovo Arnolfo seguissero la parte del re Ardoino, il quale difficilmente avrebbe potuto portare le sue masnade insino a Brescia, ove non fosse stato certo di non aver nemici alle spalle.

Capo de' principi italiani avversi al re Ardoino, ed anima de' congiurati era stato, come più volte abbiain detto, il marchese Tedaldo conte di Modena e Reggio: contr'esso ardeva di certo Ardoino di vendetta, onde se vale la conghiettura da noi sulle tracce del Lupi stabilita per Brescia, avviseremo pur anche in simil modo che Ardoino in quell'anno 1005 s'affrettasse contro Modena, scorgendo noi da una conferma di certi beni fatta da Guarino vescovo di quella città, che tiene soltanto gli anni di G. C., siccome nelle pubbliche carte si tralasciavano in quel

(1) « Conventio inter privatos (an. 1005). In nomine Domini, anno ab Incarnatione D. N. I. C. milleno quinto, mense aprilis Ind. tertia. » — « Donatio quorundam de Caseinate (an. 1005). In nomine Domini Dei Eterni. Henricus gr. Dei rex, anno regni eius hic in Italia secundo mense decembris Ind. IV ».

(2) Vedi in LUPÍ I. c. le carte dalla pagina 443 a 451 e seg.

punto gli anni del re Arrigo, per certo soliti a segnarsi nelle città tenute da quel marchese (1).

Anche Novara crederemo fosse parimenti dalle genti italiane investita nell'anno 1007: e lo accennano due carte di Pietro III vescovo, una del 1006 colla data dell'anno terzo di Arrigo, l'altra del 1007 senza la regia invocazione (2). Nell'anno 1010 le pubbliche carte invocavano di nuovo il nome del re Arrigo: onde crederemo che Novara, dove il vescovo Pietro, tenerissimo de' principi germanici, godeva d'una ampia esenzione (3), avesse allora abbandonato la parte d'Ardoino, e per questo fosse poi da lui più tardi assediata e manomessa.

Ma i documenti d'Asti dopo l'elezione del vescovo Alrico fratello di Manfredi II, e quelli del comitato di Torino portavano sempre il nome di Arrigo, eppure non vi è traccia che dalla prossima Ivrea Ardoino vi portasse l'armi sue: per certo che il destreggiarsi del conte di Torino andava d'accordo con Ardoino.

Ma curiose sopra l'altre sono alcune carte Ravennati dell'anno 1009, riferite in un antico catalogo ms. della badia di Pomposa (4), dalle quali si può sospettare che anche le terre di Ravenna, e forse la città stessa fossero corse dal re italiano. Era Ravenna al tempo dell'elezione d'Ardoino a re d'Italia (1002), tenuta con diritto d'esenzione da Federico suo arcivescovo, uomo affezionatissimo a parte tedesca. Entrato uno de' primi nella congiura maneggiata nel 1002 dal marchese Tedaldo con Leone vescovo di Vercelli, ed Arnolfo arcivescovo di Milano, vantavasi Federico di non aver mai riconosciuto per suo re Ardoino. Epperò scrive di lui Adalboldo, che nel farsi incontro ad Arrigo quando nel 1004 se ne veniva trionfante da Verona, « esso aveva dato al suo

(1) « Guarinus Epus Mutinensis monio S. Petri confirmat oblata etc. Actum anno Dominicae incarnationis MV. Ind. 3. (*Ant. M. Ae. T. V.* col. 661).

(2) 1.^a *Investitura livellaria fatta da Pietro III vescovo di Novara ecc.* « Anno regni Domini Arrici regis ic in Italia, Deo propicio tercio, duodecimo die mensis iulii, ind. IV. Actum infra Castro Insulae quae dicitur Sancti Iulii. » 2.^a *Pietro III vescovo di Novara accresce la dotazione dei canonici di San Gaudenzio.* « Actum est anno Dominicae Incarnationis MVII. Ind. IV. in die sancto Epiphaniae. » (*Mon. II. P. T. I.* Doc. CCX e CCXII).

(3) Era stata concessa da Ottone I con tre miglia di territorio. (*VESME, I vicende delle proprietà in Italia*, p. 274).

(4) Copia di questo catalogo fu a me favorita dalla gentilezza del duto conte MORBIO, autore della pregiata *Storia de' Municipi Italiani*.

« *signore le mani non contaminate dal dominio adulterino* » (1). Che questo significhi che Ravenna non avesse riconosciuto Ardoino come re d'Italia dal 1002 al 1004, non lo consente lo storico Arnolfo, il quale narra che tutte le città del reame lo avevano accettato come re: certo che dal 1004, cioè dopo il tradimento di Verona, fino al 1009, le pubbliche carte erano in Ravenna segnate col nome d'Arrigo, sebbene già fosse morto l'arcivescovo Federigo, ed a lui succeduto Adalberto usurpatore di quella sede (2).

Dal novembre del 1009 al dicembre dell'anno 1010 più non vi si segnavano che gli anni del pontefice, come si vede nelle addotte carte Pomposiane, ma con questa special nota: « ancora non abbiamo imperatore in Italia; » con questa formola non venivano offese le pretese di Ardoino, nè dell'uno, nè dell'altro de' competitori al trono d'Italia, ed a quello dell'impero. Un'altra carta del medesimo archivio di Pomposa del 13 dicembre 1010 mostra di nuovo il nome d'Arrigo segnato nelle pubbliche transazioni: e qui più non si legge la nota surriferita sulla mancanza dell'imperatore; sebbene tuttavia fosse vacante l'impero.

Per le quali cose, anche qui avremo un indizio che le scorrerie di Ardoino toccassero le terre Ravennati nel corso dell'anno 1010 (3).

Contro Vercelli, cioè contro Leone suo vescovo, l'avversario il più antico ed il più ardente d'Ardoino, fu più tarda, ma più feroce la di lui vendetta. Di questa si parlerà a suo luogo. Aggiungeremo intanto che se si ammette per legittimo il diploma del re Ardoino pel monastero di Fruttuaria, del quale si è fatto parola al Capitolo VIII (4),

(1) Il vassallo nel promettere la fede a quegli che gli concedeva una tenuta qualsiasi in beneficio, poneva le mani sue in quelle del suo signore, e così pure facevano i conti verso il re: « *post manus nobis datas* ».

(2) *Annali 1004-1014*.

(3) Vedi nota (1) alla pag. 262. — Carte del monastero di Pomposa:

1.^a *Concessio in emphyt. fundi Asturæ etc. facta a D. Gerhardo D. et Abb. S. Mariæ in Xenod etc. — Actum Ravennæ rog. Andreae Not. Anno Domini Ioannis (XVIII) Papæ, VII (1009), Imperatorem in Italiam eundem habemus, die 29 octob. Ind. VII. (II. 1. 2).*

2.^a Parè concessione colla stessa data, ma del 2 novembre ecc. — Da questa apparisce che papa Giovanni XVIII visse fin verso il fine dell'anno 1009, e che l'*Art de vérifier les dates* sbagliò nel mettere l'elezione di Sergio IV successore di Giovanni XVIII tra il 17 giugno, ed il 24 agosto.

3.^a *Donatio unius Longarii Salinarum in territorio Comiaci etc. in fondamento vocato Papatiano, ab utroque latere Pomposiæ etc. Actum Comiaci, rog. Lopicino Not. Anno Domini Sergii P. II, Henrici regis IX, die 13 decembris Ind. IX (A. 4. II. 6).* Anche il MARGARINO (*Bull. Cass. Marit. T. II, p. 68*) reca una carta di Ravenna del 1009, colla nota: « *imperante nemine* ».

4.^a Vedi Append. n. 31, e Capit. VIII pag. 236 nota (1).

la data di Vercelli dell'anno 1003, che esso porta, potrebbe far credere che Ardoino avesse ottenuto in quell'anno finta obbedienza da Leone vescovo di quella città, della quale aveva questi ottenuto il comitato da Ottone III: e dico finta obbedienza, poichè Leone non cessò d'essere a lui nemico. Ad ogni modo qualunque ne fosse la cagione, vedremo a suo tempo quale fosse la punizione data al vescovo dal tradito Ardoino.

Procedendo nello stesso modo, si potrebbero prolungare queste indicazioni sulle scorrerie d'Ardoino, ma con poco frutto.

Certamente tenui sono tali conietture: ma trattandosi di tempi oscurissimi per la mancanza di scrittori coevi, tempi falsati ancora da favolosi racconti de' moderni, non mi è paruto doverle del tutto intralasciare, avvegnachè stabilite sopra l'autorità dello storico Arnolfo, e perchè conformi alle condizioni nelle quali era posto Ardoino.

Resta a chiarire quello che si facessero in questo tempo Genova, e le città della Toscana aggregate al regno d'Italia. Generalmente le città poste lungo la marina sul lido italico, fatte, come già si è detto, ardentose per la vita più arrisicata e più generosa delle genti di mare, volgevano sopra le altre del regno le voglie loro a' pensieri di libertà e d'indipendenza. Poco quindi si curavano che Ardoino od Arrigo fosse il vincitore in una lotta dalla quale le si trovavano lontane per positura geografica, ed indifferenti come quelle che gl'interessi loro volti alle cose di mare, da ogni altra cosa sviavante che riguardasse l'interno stato del reame. Ond'è che in molte, nè l'uno nè l'altro non riconoscevano per re d'Italia (1). Avvezze ad una ereditaria reverenza verso l'impero romano, onoravano il nome d'imperatore come centro d'una potenza d'onde le minori partivano, sempre nondimeno cercando di sottrarsi dall'obbedienza ogni volta che ne restassero inceppati i rinascanti diritti che andavano di giorno in giorno riconquistando. E sì l'autorità de' marchesi e de' conti vi si era fatta di gran lunga minore che non negli altri comitati del regno, non solo per le esenzioni concedute negli anni addietro dagli Ottoni alle chiese, quanto perchè quella total forma di vivere a comune che andava sorgendo in molte città italiane, quivi molto più presto ordinavasi mercè le società di liberi uomini, delle quali Genova fra le altre ci dimostra l'antica esistenza,

(1) « Alors Ardouin et Henri se disputaient l'Empire, et en plusieurs endroits on ne reconnoissait ni l'un ni l'autre » (*Art de vérifier les dates*, T. VII. p. 310, édit. in-8.^o).

per una conferma di privilegi ottenuta da una di esse a' tempi di Berengario II e d'Adalberto (1). Perlaqualecosa parte delle pubbliche faccende essendo quivi dibattuta nelle popolari riunioni, l'autorità de' conti vi era o poco curata, od era costretta uniformarsi e cedere a quella del maggior numero.

Tuttavia, sebben prodotta da cause diverse, una comunanza esisteva tra queste città marittime o vicine alla marina, e le altre delle parti più interne del regno; era questa la rivalità manifestatasi in questi tempi, delle varie città italiane fra di loro, prodotta nelle prime da gare commerciali, o dalle contestazioni pe' limiti colle città finitime, e nelle altre, sorta o confortata dal gareggiare de' due pretendenti il trono italiano, e da quel modo di guerra che abbiamo accennato; guerre d'odi e di vendette, fomento d'ire sempre mai rinascenti, per le quali gl'Italiani costretti o per offesa o in difesa a star di continuo in sull'armi, si resero in queste prodi e valenti, ma si volsero a bruttarsi fra loro di fraterno sangue, prima ancora che la nazionalità italiana avesse una ferma esistenza. Nel Capitolo seguente noi torneremo più particolarmente sovra questo argomento.

Ma Genova durante il novennio del secondo regno d'Ardoino, segnava sempre gli anni del re Arrigo, mentre Pisa più lontana dal centro del regno non segnava che gli anni del Redentore (2). Se da ciò se ne debba dedurre, che Genova parteggiasse pe' forestieri, io non lo saprei dire. Avviserei piuttosto che non ravvisando essa un utile a seguire più l'uno che l'altro de' competitori del trono, lasciasse che il suo marchese

(1) « Confirmatio privilegiorum habitatoribus in civitate Iannensi a Berengario et Adalberto » Italiae regibus concessa anno DCCCCLVIII. XV kal. aug. Ind. 1. » (*Notices et Extraits des MS. de la Bibliothèque du Roi de France etc.* T. XI. p. 2 et 3. Vedi *Cod. Iurium*, Lib. I. duplie.).

« Berengarius et Adalbertus, divina fauente clementia, reges. Decet regalem excellentiam, ut votis » suorum etc. Idcirco omnium scilicet Dei ecclesie nostrorumque etc. noverit universitas, qualiter in- » teruentu ac petitione Hebonis nri dilecti fidelis, per huius precepti paginam, secundum consue- » tudinem illorum, confirmamus et corroboramus omnibus nostris fidelibus et habitatoribus in ci- » vitate Iannensi, conctas res et proprietates illorum, seu libellarias et precarias, et omnia quae » secundum consuetudinem illorum tenent, aliquo titulo vel modo scriptionis adquisierunt, vel » que illis ex parte patris et matris advennerunt; omnia et ex omnibus, et intra et extra civitatem, » in integrum eis confirmamus pleniusque corroboramus, una cum terris, vineis, pratis etc. Pre- » cipientes itaque iubemus ut nullus Dux, Marchio, Comes etc. sed liceat eis pacifice et quiete » vivere, ac nostra sulti preceptali confirmatione, omnium hominum remota contradictione vel » diminoratione. Si quis igitur huius nostrae etc. Actum Papiae in Dei nomine feliciter. »

(2) *Hist. P. Monum.* T. I. — MURATORI, *Ant. Ital. M. Ae.* T. III. col. 1071.

facesse intitolare gli atti pubblici col nome di un re, ch'essa non voleva inimicarsi, come più vicino che l'altro a conseguire la corona dell'imperio. Ma il non ravvisare nessun indizio, che Ardoino nello scorrere le provincie del regno si facesse contro Genova per costringerla a riconoscere l'autorità sua, come verso di molte altre città del regno italico era ito facendo, mi dà sospetto che come l'arcivescovo Arnolfo in Milano, e come fece in Torino il marchese Manfredi, così in Genova il suo marchese si adoperasse di non fare insospettire Arrigo, mentre di segreto teneva pel re italiano.

Era conte della Marca di Genova, ed in parte ancora di quella di Milano, Oberto II, detto dal Muratori il progenitore degli Estensi, il più potente, il più acceso ed il più costante fra gli aderenti del re Ardoino. Scendeva egli in retta linea dagli antichi marchesi della Toscana (1), ed era figliuolo di Oberto I principe potentissimo del secolo X, marchese com'esso della Liguria, quegli che nella congiura ordita da papa Giovanni XII con Gualberto arcivescovo di Milano e con Gualdo vescovo di Como, era stato principal cagione della caduta de' re Berengario II ed Adalberto, e che il dominio dell'Italia passasse nelle mani de' principi tedeschi (2).

Ben diverso dal padre, infiammatosi Oberto II nell'opposto desiderio di riconquistare all'Italia l'indipendenza perduta, adoperava ogni sua potenza per escludere dall'Italia i principi germanici: epperò accostatosi alla parte del re Ardoino, questa aiutò, questa promosse, e questa fino all'ultimo, in ogni modo sostenne e difese. A questo scopo volgeva le immense ricchezze da lui possedute nelle provincie di Toscana, di Lunigiana e di Lombardia: a questo l'opera indirizzava della numerosa sua famiglia, ed il seguito infinito, che a lui procacciavano il grado di marchese della Liguria, e la carica di Conte del sacro palazzo in Pavia, la quale assoggettava alla di lui giurisdizione non solo quella capitale del regno, ma varie altre fra le città longobarde (3).

(1) MURAT. *Ann.* 972, ed *Ant. Est.* P. I. C. XV.

(2) « Legati ab Apostolica Sede veniunt, Ioaones diaconus et Azo scriniarius vocantes regem » ad defendendam Italiam et Romanam Rempublicam a tyrannide Berengarii etc. » (*Chron. REGINON.* Lib. II. *ad an.* 960, ap. PISTORIUM R. G. S. T. I. p. 108).

(3) MURAT. *Ant. Est.* P. I. Cap. XIII, ed *Annali* 1014. — Cfr. SCHEIDT, *Orig. Guelficae*, Lib. II. cap. VIII. § 2, et cap. IX passim: vide etiam ibid. *Tab. Geneal.* p. 212.

Ma poco ci tramandarono le storie di que' tempi, sovra le cose operate da Oberto II e da' suoi, a favore d'Ardoino: sia che di tal mancanza s'abbia a cagionare l'edacità del tempo, o sia che, siccome a più buon diritto avviseremo, manchino sempre gli scrittori agli oppressi. Ad ogni modo, di lui e della sua famiglia ci accaderà di ragionare di nuovo, e ne riferiremo gli ultimi fatti nell'addurre le sentenze di Arrigo imperatore, colle quali punì lo zelo di costoro contro il dominio forestiero, zelo del quale ciò nondimeno, morto già Oberto II, novelle prove furono date contro Corrado il Salico, da' principi suoi eredi e congiunti.

Aveva Oberto numerosi figli, fra' quali una fanciulla per nome Berta, moglie che fu del marchese Manfredi II conte di Torino. Dal qual parentado contratto nell'anno 1010 (1), cioè dopo il risorgimento del re Ardoino, fondamento maggiore ne traggio a confermarmi nella credenza che il conte di Torino favorisse in segreto quel re, mentre apertamente egli mostrava di aderire al re tedesco.

Perciocchè dalla sentenza di Arrigo dell'anno 1014, colla quale priva il marchese Oberto e vari suoi congiunti delle loro copiose sostanze, argomentar possiamo, siccome dopo il fatto di Verona del 1004, questo marchese s'era infinto accostarsi al re Arrigo, e lo aveva cogli altri elettori chiamato al trono d'Italia, mostrandosi ad esso affezionato e fedele, mentre di celato co' suoi, e d'accordo forse col re Ardoino riparato ne' suoi comitati d'Ivrea, secondava o promoveva la sommossa di Pavia: modi codesti, conformi al sistema d'inganni e di doppiezze allora in uso, degni di tempi barbari e corrotti, e di que' principi, a vicenda traditi e traditori (2).

Ora sembrerà cosa difficile che il marchese Oberto, principe di temerace proposito, ed accessissimo pel trionfo del re Ardoino, si fosse consigliato di concedere Berta sua figlia in isposa al conte di Torino, ove questi non fosse stato tacitamente inteso con esso a favore di Ardoino, e fosse invece zelatore de' principi germanici.

Del resto se l'antiveggenza di Manfredi fece ch'egli s'industriasse di

(1) TERRANEO, *Adel. Ill. P. II. p. 57.*

(2) « Postquam nos in regem et imperatorem elegerunt, et post manus nobis dadas, et sacramenta nobis facta, cum Dei nostroque inimico Arduino regnum nostrum invasisse etc. » (*Dipl. Henrici Imp. an. Dom. Inc. MXIV. Ind. XII. etc. Actum Solega. in Hist. P. Mon. T. I. doc. CCXXXVIII. col. 405, e nell'Append. n. 36*).

non insospettire Arrigo, ch'oramai scorgeva accennare alla corona imperiale, egli ben dimostrò che scopo del suo desiderio era l'escludere dal trono d'Italia i principi germanici, col collegarsi ch'ei fece alcuni anni dopo, e morto Arrigo imperatore, con quelli fra gl' Italiani che s'opposero all'elezione di Corrado il Salico (1). A imitazione di lui, ma meno prudente, il marchese Oberto volle o lasciò che Genova rimanesse in apparenza almeno, nella devozione del re germanico, mentre egli co' suoi ordiva le fila di quella congiura che scoppiò in Roma nel 1044 al tempo della coronazione imperiale di Arrigo: congiura colla quale disegnava opprimere a un colpo tutta la fazione tedesca, ma che poco mancò non recasse l'ultimo sterminio a lui ed a tutta la sua famiglia.

(1) TERRANEO, op. cit. P. II. p. 107.

CAPITOLO X.

CONDIZIONI DELLE CITTÀ DELLA TOSCANA REGALE.

GARE TRA PISA E LUCCA. COSE DI ROMA.

GIOVANNI FIGLIUOLO DEL CONSOLE CRESCENZIO VI È CREATO PATRIZIO.

STATO DELLE FAZIONI SOTTO BENEDETTO VIII S. P.

(999-1014).

Ma vediamo più particolarmente lo stato della Toscana. Già si è detto siccome mentre Ardoino, cedendo all'impetuosa natura, sfogava l'ira sua furibonda sovra le innocenti popolazioni italiane per far vendetta del tradimento de' principi, le città principali della Toscana regale lontane da questi furori, s'andavano pianamente avviando anch'esse, come Genova, ad ordini migliori. Queste città noi già indicammo essere nove: Luni, Pisa, Lucca, Volterra, Siena, Pistoia, Firenze, Arezzo e Chiusi, comprese nell'area di un triangolo, del quale i tre punti posavano: uno al confluente del fiume Cecina col mare Tirreno, l'altro alle sorgenti della Macra presso Pontremoli, ed il terzo a Biturgia sul Tevere (1).

Opinò uno scrittore moderno (2), che i vescovi o conti della Toscana non fossero convenuti a' comizi di Pavia dell'anno 1002, ne' quali fu eletto Ardoino a re d'Italia, epperò che l'autorità di lui mai non s'estendesse insino a quella Marca. Ignoro sopra quali altri titoli possa essere fondata questa sentenza, alla quale s'oppono, oltre al testo dello storico Arnolfo, in cui vien detto che Ardoino appena eletto re, « visita » l'intero reame, e vi usa dovunque la regia autorità » (3), l'esistenza

(1) Vedi il Capitolo IV. pag. 140.

(2) VESME, *Storia delle Proprietà in Italia*, p. 276, in *Mem. della R. Accademia delle Scienze di Torino*, T. XXXIX.

(3) « Regnum perambulat universum, regio iure cuncta pertrahans. » (ARNOLPHI, *Med. Hist.* Lib. I c. XIV).

ancora di un diploma concesso da questo re nell'anno primo del suo regno al monastero di S. Salvatore di Lucca, documento finora inedito, e da me dall'originale tratto alla luce (1).

Certamente non crederei, che Ardoino dopo il 1004 volgesse mai l'animo a spingere le sue scorrerie per insino alle città della Toscana per ridurle di nuovo alla sua devozione, dopo che esse avevano aderito ad Arrigo nel 1004, spaventate dall'esserato sterminio di Pavia, ed avevano mandato i loro deputati al re vincitore già avviato per alla sua Germania (2); con tutto ciò dopo quell'anno in varie delle principali città della Marca di Toscana più non segnavansi gli anni di Arrigo nelle pubbliche carte.

Ma sopra i primordi della libertà nelle città di questa Marca, tralasceremo quello che s'appartiene alle minori, le quali assai più tardi s'ordinarono al vivere a comune, e che facilmente invase, come Pistoia, dal furor delle parti, vennero quindi in preda delle città vicine. Alcuni cenni segneremo sovra le altre.

Fra queste Luni antichissima e fiorente fino da' tempi romani, miseramente illustre altresì per le molte volte che fu presa e guasta da' barbari, era in quel punto in prospera fortuna, ed avviata ad ordini migliori, secondo che si può argomentare dal fiorente traffico, che i suoi cittadini facevano pel mare Tirreno. Fu nondimeno pochi anni appresso (an. 1016) novellamente preda de' Saracini, come si ha da Ditmaro (3), ed il suo vescovo cacciato da que' barbari che vi posero stanza, ma non la disfecero. La rovina totale di Luni fu assai più tardi. Nel 1185 fu concessa da Federigo I imperatore e nominatamente col territorio suburbano, col circo, co' sobborghi, co' fossati, colla piazza, che stava tra il muro della città ed il mare, a Pietro suo

(1) *Privil. Ard. regis monialibus S. Salvatoris de Luca concessum, XI kal. sept. Ind. 12, an. 1002, primo regni. Actum Papiae.* Questo dipl. è citato dal FIORENTINI, *Mem. di Mat.* p. 9. Vedi l'Appendice al n. 26.

(2) « Inde (Henricus) Chromo perveniens, Pentecosten sanctam pia animi devotione celebravit. » Inde discedenti Tusci ei occurrunt, et manus per ordinem singuli reddunt. » (ADALBOLDI, *Vita Henrici II Imp.* § 41. l. c.). Chromo detto dall'Ann. Sassone, e dal crocista DITMARO Grommo, è un idiolismo germanico di Crema, secondo s'ha dall'Annot. di DITMARO I. M. Lappenberg, nota (94): « Grommo urbs Crema ut videtur. » (PERTZ, l. c. T. V. p. 807).

(3) « In Longobardia Saraceni navigio venientes Lunam civitatem fugato pastore invadunt, et cum potentia ac securitate fines illius regionis inhabitant, et uxoribus incolarum abutuntur » (DIETM. Chron. Lib. VII. § 31. l. c. p. 850).

vescovo (1). Prova evidente, che la totale distruzione di Luni fu di molto più recente, che non viene asserito da molti scrittori, i quali vogliono che Sarzana, città posta sulla sinistra sponda del fiume Macra a poca distanza da Luni, fosse edificata dopo che questa fu distrutta. Queste città durarono insieme per oltre a tre secoli (2), ed il castello di Sarzana viene già ricordato in una carta di Ottone I del 963 presso l'Ughelli (3).

Se si fa a fidanza con Giovanni Villani, Firenze in questi tempi già sarebbe stata munita di statuti e di consoli. Parve assai precoce la notizia al Muratori (4). Ad ogni modo quel cronista scrive che disfatta Fiesole nell'anno 1010 da' Fiorentini, gli abitatori di quella furono accolti in Firenze, dove due consoli ed un senato di cento cittadini formarono la signoria che resse i due popoli oramai fatti un popolo solo (5). Accolse tanto più per vera questa narrazione il Sigonio (6), in quanto che il Machiavelli anch'esso dice siccome « nel mille dieci, il dì di » S. Romolo, giorno solenne a' Fiesolani, i Fiorentini presero e disfe- » cero Fiesole; il che (soggiunge) fecero o con il consenso degl'im- » peratori, od in quel tempo, che dalla morte dell'anno alla creazione » dell'altro, ciascuno più libero rimaneva » (7). Parole dalle quali il Sigonio avrebbe potuto scorgere, che questo profondo scrittore non aveva voluto assegnare precisamente all'anno 1010 (che forse per reverenza soltanto degli antichi cronisti notava) l'ordinarsi de' Fiorentini al vivere libero, e la fazione loro contro Fiesole, ma a quello spazio di tempo corso tra la morte di Ottone III e l'esaltazione di Arrigo I al trono imperiale (anni 1002-1014). Epperò sebbene seguendo il Muratori, io non voglia accettare rigorosamente l'opinione del Villani circa i consoli, e gli statuti conquistati da' Fiorentini nell'anno 1010, tuttavia dalle parole del Machiavelli parmi di veder confermato verso i Fioren-

(1) « Nominatim civitatem Lunensem cum fossatis, et suburbiis etc. et plateam que est inter » murum civitatis et mare, edificium quod Circulum vocatur aut Arena, etc. » (*Dipl. Frider. I. Dat. an. 1185 apud UGHELLI It. Sac. T. I. col. 849.*)

(2) *Anon. Med. De Tabula Chorogr. M. Ae. col. CCII.*

(3) *Ital. Sacra, T. I. col. 836.*

(4) *Annali d'Italia 1010.*

(5) *Istorie di Gio. VILLANI, Lib. IV. Cap. V e VI. ap. MURAT. R. I. T. XIII. — RICORDANO MALESPINI, Dell' Ist. Fiorent. Cap. LIV. LV. ap. MURAT. R. I. T. VIII. col. 918, 919.*

(6) SIGONIO, *De Regn. Ital. ad an. 1010. Lib. VIII.*

(7) *Delle Istorie Fiorentine di Nic. MACHIAVELLI, Lib. II. ediz. in-8.º del 1813, T. I. Opere, p. 65.*

tini quello che sono venuto finora argomentando da' fatti, cioè che le popolazioni italiane, specialmente nella confusione de' tempi che vennero dopo la morte di Ottone III, cominciarono a gettar le basi di quella indipendenza, che poi compiutamente conseguirono più tardi.

Ma se la vacanza dell'impero, e se le guerre tra Ardoino ed Arrigo erano state favorevoli a' Fiorentini per ismnovere il giogo de' loro conti, ed intraprendere una vita novella, non minore vantaggio avevano esse recato a' Pisani ed a' Lucchesi.

Pisa e Lucca, illustri città per l'antica origine, che la prima da' Greci, e l'altra ripeteva da' Romani (1), erano in questi anni salite in molta potenza. I navigli pisani, che non solo, siccome già notammo (2), difendevano le costiere dalle invasioni de' Saracini, ma gareggiavano nel traffico con quelli de' Genovesi, degli Amalfitani e de' Veneti, recavano nel porto di Pisa le ricchezze adunate sul mare nelle incursioni loro avventurose. Il movimento, che un tal modo di vita aveva impresso nella popolazione, era venuto viemmaggiormente crescendo col succedersi degli anni, e le combinazioni nate da nuovi interessi, avevano suscitato novelle forme nell'ordinamento delle pubbliche cose: forme, le quali nella frequenza delle incursioni barbariche, e nello estendersi del loro traffico durante la vacanza dell'impero s'erano rese naturalmente più indipendenti, posciachè per alcuni anni nessun nuovo marchese non ero stato surrogato ad Ugo marchese di Toscana, morto pochi mesi prima di Ottone III (3). Pisa, così l'Anonimo Milanese, nel secolo XI crebbe e si fece più celebre, che non fosse ne' tempi anteriori (4), e senza dubbio di questo accrescimento e del suo lustro andò debitrice a' passi già fatti verso la libertà, e nel commercio: l'uno e l'altra possenti motori di civiltà nella vita di un popolo.

Lucca per altra via era salita in fiore fin da' precedenti secoli del medio evo. Divenuta la sede de' duchi longobardi (5), lo fu parimenti de' marchesi, dopochè da' successori di Carlo Magno la Toscana fu ridotta in Marca (6).

(1) CELLARI, *Geographia Antiqua*, Lib. II. p. 570-571.

(2) Vedi Capitolo IV. pag. 148.

(3) Vedi *ibid.* pag. 139.

(4) *An. Mediol. De Tabul. Chorogr.* col. CCIII.

(5) FIORENTINI (Mansi), *Mem. della Contessa Matilde* (passim) — *Anon. Mediol.* § 98. col. CXCVIII, et col. CCIII.

(6) *Anon. Mediol.* col. CXCIX.

L'esistenza di un regio o imperiale palazzo dentro le mura di Lucca, ed i frequenti placiti, che alla presenza de' duchi, marchesi e conti vi celebravano i nessi dell'imperatore o del re, dimostrano, che non solo questa città era tenuta come principale fra le altre di quella provincia, ma che frequente di abitatori, e ricca di sostanze; i sovrani d'Italia ne curavano particolarmente il governo, coll'impedire per mezzo di que' loro ministri, che l'avarizia de' conti non manomettesse gli averi de' cittadini, a tutela de' quali esistevano fin da' tempi longobardi nella città, gli scabini o giudici nominati dal popolo (1). Queste cose erano senza dubbio elementi di libertà, e non è a dire che dopo la morte di Ottono III, e mentre bollivano le ire tra gli Ardoinici e gli Enriciani, Lucca non abbia dovuto conquistare anch'essa una qualche maggiore indipendenza su' propri conti, e non li abbia condotti a secondare le novelle sue tendenze.

Indizio di un grado qualsiasi di libertà già conseguito da questi popoli, sono le guerre rotte in questi anni tra i Lucchesi ed i Pisani. Primo e scellerato esempio, troppo spesso seguito, di guerre fraterne tra due popoli della patria italiana, ma cui pure dobbiamo attribuire in gran parte l'incremento preso in seguito da' popoli d'Italia nell'arte della guerra, e le onorate imprese da essi operate nel secolo XII.

Non è cosa credibile, che nella mancanza accennata di un reggitore supremo della Marca Toscana, i conti che tenevano il governo di Lucca e di Pisa, di buona voglia pigliassero parte in quelle guerre. Un'antica legge del codice Carolino faceva bensì abilità ad ogni conte di mover l'armi per difendere il proprio territorio dalle incursioni de' barbari, ma non mai di chiamare all'armi il popolo per assalire i vicini (2). Il non trovarsi poi nominato veruno di questi conti come capitano in quelle fazioni, dimostra che ne anche per abuso, o per zelo di privata loro ambizione, queste guerre rompevansi, ma per cagioni del tutto estranee da essi, e nelle quali od i conti non s'impigliavano, od erano loro malgrado costretti a impigliarsi pel conto delle popolazioni. Evidentemente pertanto noi venghiamo a chiarirci, che già nelle cose di guerra quelle città avevano sopra i loro reggitori conseguito un'autorità,

(1) FIORENTINI, op. cit. Lib. III. p. 453-454. — Anon. Mediol. col. CXCIX. CCIII.

(2) FIORENTINI, l. c. Lib. III. p. 454. — Leg. Longob. Lib. II. tit. 52. § 2 et Lib. III. tit. 15.

una potenza, una materiale qualsiasi forza, per cui a loro talento i cittadini potevano adunarsi, armarsi e stanziare la guerra, irrompere ne' territori giudicati nemici, comporre tregne, paci, accordi, alleanze. Alle quali cose, che gran parte sono del vivere a comune, se aggiungasi il diritto che ab antico tenevano, di eleggere i propri giudici (1), conchiuderemo che se Lucca e Pisa non erano tuttavia legalmente costituite in forma di Repubblica, molto innanzi erano già corse nel possesso del viver libero. Prima nondimeno che Lucca giungesse all'apice de' suoi voti, provar doveva e la tirannide di Bonifacio marchese della Toscana nel 1028, padre che fu della contessa Matilde, e la lunga dominazione di questa donna famosa.

Assegna, è il vero, il Fiorentini una special causa all'armamento de' Lucchesi; aderiva di nuovo in quegli anni (1002-1003) la città di Lucca al re Arduino: trovavansi perciò i cittadini armati per farsi cogli altri Italiani contro a' Tedeschi, che accennavano di scendere in Italia: ma invece di recarsi in Lombardia al convegno dell'oste italiana, pretestando le minacce de' Saracini volgevano contro Pisa l'armi impuguate (2). Ciò pure in tal caso doveva esser vero per i Pisani. Ma chi non vede che il rifiuto di recarsi là dove la legge militare del regno appellavali, era un atto di non poca indipendenza per parte di que' popoli, al quale teneva dietro il secondo, di portar l'armi dove spingevanli gli odi che contro i vicini sentivano?

Non si sa d'onde fossero nati questi odi, che laceravano Pisani e Lucchesi, popoli per vicinanza, per cielo, per lingua e per leggi somiglianti fra loro. Ma sia che fossero effetto di una natural gelosia, la quale presto s'accende tra due città, di cui l'una come Lucca era in ispecial modo sempre stata dagl' imperatori e da' re d'Italia privilegiata e distinta, sia che per vecchi soprusi che l'un popolo contro dell' altro avesse usato nascessero, esca novella all'odio antico in questi anni arrogevansi, pel segreto accordo che dicevasi aver fatto i Pisani co' Saracini, occupatori dell'isole di Sardegna e di Corsica, d'onde di continuo infestavano le marine toscane, accordo col quale, acciò fosse lasciata in pace la parte pisana della spiaggia, erano que' barbari non

(1) FIORENTINI, l. c. ivi.

(2) FIORENTINI, ivi Lib. I. p. 9.

solo da' Pisani comportati, ma ancora segretamente soccorsi nell'estrazione di buona quantità d'olio su quel de' Lucchesi.

Rifacevansi costoro dal danno, coll'impossessarsi in quel di Pisa di altrettanta quantità della derrata medesima: « non volere, dicevano, in » verun modo comportare, che le loro sostanze venissero nelle mani, » ed in vantaggio degl' infedeli. » Ma i Pisani vendicavano questa rapina, predando sul territorio nemico altre merci a' Lucchesi, i quali per allora ristavansi, aspettando l'ora di maggiore vendetta.

Frattanto Pisa, cui non metteva conto in quel tempo di proseguire queste risse co' vicini, avvisò togliere di mezzo ogni pretesto d'inimicizia con essi, movendo l'armi contro a' Saracini (1). Alla qual cosa di tanto miglior animo si confortava quel popolo, che se diam fede al Sigonio ed alla cronaca sarda (2), le frequenti calate che que' barbari, signori di Cagliari (3), facevano lungo il lido italico, e le calamità (delle quali Pisa aveva toccato gran parte) che da quelli erano portate sino alla spiaggia romana, avendo mosso il pontefice Giovanni XVIII a bandire che fosse lecito di possedere le isole di Sardegna e di Corsica a quello fra i popoli cristiani che fosse per cacciarne quegl' infedeli, erano i Pisani tanto per ambizione, che per proprio loro utile stimolati a tentarne l'impresa (4). In tal guisa profferivasi a' Lucchesi propizio il tempo delle loro vendette. Epperò entrati improvvisi nel contado di Pisa, vi rovinarono chiostri e chiese, mettendo a sacco tutto il territorio insino a Papiuiana. Udivano l'infausta notizia i Pisani, mentre già rotti i Saracini, miravano a maggiori progressi, onde costretti affrettandosi al porto, perdevano il frutto della loro vittoria. Ma veruno neppure non ne raccoglievano dall'incursione loro i Lucchesi, perciocchè gli avversari infuriati pel guasto sofferto nel loro territorio, dando rabbiosamente a quelli addosso, li rompevano nella giornata d'Acqualunga.

Non per questo si ristavano i vinti, i quali nuovamente fattisi assalitori, e nuovamente infuriando nel guastare le terre de' Pisani, una seconda rotta toccavano a Ripafratta (5).

(1) FIORENTINI, l. c. p. 9.

(2) FARAE I. F. *De rebus Sardois ex recens. V. ANGIUS ex S. P.* (Carali 1838).

(3) *Breviar. Pisanac Hist.* ad an. 1002 ap. MURATORI R. I. T. VI. col. 167.

(4) SIGONIUS, *De Regno Ital.* Lib. VIII. col. 475. — FARAE, *De rebus Sardois*, p. 86.

(5) Cfr. FIORENT. l. c. — *Breviar. Pisan. Hist.* l. c. ad an. 1001.

Così per vile pretesto di ladroncelli, le antiche ire con empia guerra sfogavano due popoli fratelli, senza vantaggio nè dell'uno nè dell'altro, anzi con reciproco danno, e ad utile soltanto del comune nemico. Conciossiachè mentre le schiere pisane lungi dalla città trascorrevano contro le genti lucchesi, i Saracini colto il punto opportuno, scendevano a Pisa, e questa miseramente depredavano, ed occupavano.

La perdita de' Lucchesi a Ripafratta, che per allora poneva fine alla guerra tra i due popoli, viene dal Sigonio e dal cronista di Sardegna assegnata all'anno 1003: nelle antiche cronache di Pisa, all'anno 1004, e la caduta di Pisa in mano de' Maomettani, all'anno seguente 1005. Così pure G. M. Fiorentini, il quale da antiche inelitte scritture tolse codeste memorie, seguito di mala voglia dal Muratori, poco disposto a tener fede a chi narra tali prodezze de' Pisani in quel tempo, in cui non gli pareva potesse quel popolo esser salito in tanto grado d'indipendenza da poterle operare. Ma troppe sono le testimonianze che le comprovano. Chè oltre alle due cronache antichissime di Pisa, dal Muratori stesso pubblicate (1), le antiche memorie dell'archivio capitolare di Lucca, ed altra cronaca ms. già posseduta dal Fiorentini, in egual modo le attestano.

Questi fatti accadevano mentre, siccome narrammo, altri barbari guidati da Arrigo re di Germania, dall'Alpi Noriche erano pur scesi in Italia (1004-1005), ed arsa Pavia ne ripartivano. Così nelle due estremità del suo regno provava l'Italia il tristo effetto delle già cominciate intestine discordie. Perlaqualecosa, soggiunge il Fiorentini (2), indebolito il re Ardoino, non potendo « somministrare aiuti bastevoli per opporsi » all'impeto de' Saracini, furono i Pisani ridotti a sostener da se soli il « peso della guerra rotta cogl'infedeli. » Tuttavia non si smarrirono, giacchè come dalle ripetute testimonianze risulta, i Pisani nell'anno seguente (1006) cacciarono i barbari dalla città loro, ed inseguendoli colle loro navi, insigne vittoria ne riportarono presso Reggio di Calabria (3).

Ma gli odi tra i Pisani ed i Lucchesi attutati dopo la perdita fatta da costoro (nel 1004), prorompevano quindi in guerre più feroci che

(1) T. VI. R. I. col. 107 et 167.

(2) *Mem. di Mat.* p. 30.

(3) « Anno 1006. Pisani devicerunt Saracenos ad Rhegium, die SS. Xyeti. » (Vedi Fiorentini, *Mem. di Matilde*, Lib. I. p. 11).

mai, delle quali sarebbe estranea dal mio istituto la narrazione. Questo solo a me premeva di far osservare, che tali guerre condotte da' Pisani a un tempo coll'altre ch'essi ebbero a commettere contro Musetto re de' Saracini ne' mari della Sardegna per la conquista di quest'isola, e con quelle che ruppero co' Genovesi prima alleati loro, quindi rivali, per la possessione di quella, dimostrano a qual grado di potenza e di libertà già fossero saliti questi popoli sul principiare di questo medesimo secolo XI. Ma di ciò più ampiamente tratteremo, piacendo a Dio, in altro lavoro.

Rivolgeremo ora le nostre investigazioni alle cose di Roma, dove le solite turbolenze preparavano coll'esaltamento d'Arrigo al trono imperiale, l'ultimo colpo alla già crollante dominazione del re Ardoino. Già noi vedemmo siccome dopo il supplizio di Crescenzio la fazione avversa a' Tedeschi, della quale egli era stato capo, continuò ad essere possente non solo in Roma, ma nelle provincie romane, e che costretto da questa potenza, Ottone III aveva dovuto sopportare che Giovanni figliuolo del tradito e morto suo nemico, conservasse il grado di prefetto della città, ch'egli già teneva, vivente il padre (1). Passato appena di vita quell'imperatore, e libera la città dalle legioni germaniche, lo stesso Giovanni vi fu subito innalzato al grado di patrizio (2), eccelsa dignità che vantaggiava quella di console, ed alla quale soltanto mentre vacante era l'impero, veniva talvolta innalzato il Capo della Repubblica (3). Questi diede la sua carica di prefetto ad un suo congiunto figlio di Benedetto conte della Sabina, e di Teodoranda di lui sorella, al quale ad onoranza dell'avolo era stato posto il nome di Crescenzio. Giovanni altro figliuolo di Teodoranda vien nominato duca e marchese, titoli soliti a darsi a chi reggeva il ducato di Spoleto, e la Marca di Camerino (4).

Oltre queste elezioni, attestano pure la rinvigorita potenza di quella fazione, le nomine de' due pontefici che seguirono, dopo la morte di Silvestro II, dall'anno 1003 al 1009, i quali, al dire del Baronio (5), ebbero preso il nome di Giovanni, perchè portato da altri pontefici

(1) Vedi il Capitolo VI di questi Studi.

(2) « Mortuo vero Imperatore, Iohannes Crescentii filius, ordinatus est Patricius. (*Chron. Farf.* R. I. T. II. P. II. col. 552. D.

(3) CARLI, *Antich. Ital.* P. IV. p. 68 e seguenti.

(4) *Chron. Farf.* col. 509. 510. — MURAT. *Ann.* 1012.

(5) BARONIO, *Ann. Eccl.* 1003, n. X.

eletti dalla stessa fazione, e tra gli altri da quell'infelice Giovanni Filagato, che a' tempi del console Crescenzio aveva occupato la sede apostolica. Ma nell'anno 1009 la fazione tedesca ripigliava il sopravvento: i papi Sergio IV e Benedetto VIII vengono da Ditmaro appellati *consolidatori della potenza germanica* (1). Roma era dunque più che mai divisa dalle parti: infinite le gare, le gelosie, gli odi, che prorompevano ne'soliti conflitti, e spargevano di nuovo sangue cittadino le vie di quella città, afflitta inoltre in quel punto da micidiale pestilenza (2); delle quali cose rende fra gli altri testimonianza Sergio IV, che fu terzo successore di Silvestro II, nell'epigrafe da esso posta sulla tomba di questo pontefice che leggesi tuttora in S. Giovanni Laterano (3). Ma il cozzare delle due fazioni fu favorevole alla potenza di questi pontefici. Benedetto VIII l'ultimo di essi (così scrive Ditmaro) teneva in Roma molta maggiore autorità, che mai nessuno de' suoi antecessori non vi avesse per lo passato tenuta (4). E questo si comprende facilmente, perciocchè fra quel subbuglio delle fazioni che agitavano Roma, il papa da qualsivoglia di esse venisse eletto, doveva necessariamente, anche pel proprio suo bene, far la parte di conciliatore: l'autorità sua pertanto era neutrale fra l'agitarsi delle passioni, e ad essa ricorrere doveva il popolo di Roma; la certezza poi dell'aiuto del re di Germania, che que' pontefici non cessavano d'invitare alla corona imperiale (5), confortando la loro opposizione contro i Crescenzi, teneva in freno questi capi di parte, e li rendeva più arrendevoli e più cauti nell'esercizio di quell'autorità che tuttora serbavano.

Ma il patrizio Giovanni, per quanto si può argomentare dalle scarse parole, che di lui lasciarono gli scrittori del tempo, era ben lungi dal possedere nessuna delle doti che osservammo in Alberico patrizio, e nel console Crescenzio: non la prudenza del primo, non la vigoria del

(1) « Succedebant, Sergius. qui vocabatur Bucca-porci, atque Benedictus, ambo praeclari, et » consolidatores nostri. » (THIETM. Chron. Liv. VI. n. 61).

(2) BARONII Ann. 1004.

(3) « Morte sui (Sylvestri II)
» Obrigit mundus ; discussa pace triumphus
» Ecclesiae nutaus, deditit requiem. »

(Sergii IV. S. P. Epigraph. in Sylvestr. II. Ext. Romae in Basil. Lateranensi).

(4) « Qui (Bened. VIII) tunc prae caeteris antecessoribus suis maxime dominabatur. » (THIETM. Chron. Lib. VI. l. c. § 61).

(5) BARONIO, Ann. 1009. n. III.

secondo erano in lui discese. Contento a macchinare in segreto co' suoi, per impedire o dilungare almeno la venuta del re Arrigo in Roma, non solo non ardiva, a imitazione di Crescenzo suo padre, mostrarsi aperto nemico di questo re, ma con doni e con promesse ne andava invocando il patrocinio, e gli tributava pubblica onoranza (1).

Amava egli con singolar predilezione que' due suoi congiunti (2), de' quali uno aveva fatto prefetto, l'altro duca: e costoro all'ombra della protezione del patrizio, e secondo l'uso de' magnati romani, facevano d'ogni maniera prepotenze, come si può giudicare dalle usurpazioni da essi fatte di alcuni beni del monastero di Farfa (3). Sia dunque che il patrizio Giovanni aiutasse o tollerasse cotali usurpazioni e cotali violenze, uomo mostravasi da nessun generoso spirito animato, nella resistenza ch'egli cautamente andava movendo contro la coronazione imperiale del re Arrigo.

Tuttavia col favore della fazione Spoletina egli si mantenne capo della Repubblica Romana sino alla morte sua, seguita circa il 1012 poco prima dell'elezione di Benedetto VIII a sommo pontefice (4).

Non senza contrasti ottenne Benedetto ne' comizi romani la dignità sua, ne' quali ebbe a concorrente un certo Gregorio: alla fine Benedetto prevalse (5).

(1) « Is, (Iohan. Cresc. f.) muneribus suis et promissionibus phaleratis regem a Deo consti-
tutum in palam saepe honorificavit, sed imperatoriae dignitatis fastigium hunc ascendere multum
timuit, omnimodisque id prohibere clam temptavit. » (THIETM. Chron. l. c. Lib. VII. § 51).
Fra i donativi, mandati dal patrizio Giovanni Crescenzo al re Arrigo, ricorda DITMARO (ivi),
un'ampolletta di certo olio che piamente credevano scaturito dal pavimento della chiesa: « in arce
Romulae. » Ma, dice DITMARO: « quia oleum nunc pro misericordia ponitur, ut est illud:
« Oleum de capite tuo non deficiet, nunc pro adulacione, ut hoc est: Oleum peccatoris non im-
pinguet caput meum; in hoc signo clementiam rectoris nostri habundantem et illius Patricii la-
sciviam latentem perpendo. »

(2) « Iohannes Crescentii filius ordinatus est Patricius, qui Iohannem et Crescentium filios prae-
dicti Comitiss (Beodicti) uti dilectos consanguineos amare cepit. » (Chron. Farf. Lib. II.
l. c. col. 552 D).

(3) Chron. Farf. ibid.

(4) « Patricio quoque mortuo, ordinatus est Benedictus b. m. Papa. » (Chron. Farf. l. c.
col. 553 B).

(5) « Papa Benedictus Gregorio quodam in electione praevaluit. » (THIETM. Chron. Lib. VI. § 61.
l. c.). Papa Benedetto era figlio di Gregorio conte Tuscolano (PAGI Fr. in Breve Gest. P. R. T. II.
p. 231), il quale per avventura fu quel medesimo, che suscitò tumulti in Roma a' tempi di papa
Silvestro II e di Ottone III: di lui così scrive DITMARO (Lib. IV. § 30. T. V. l. c. anno 1001).
« Posthaec Gregorius qui Caesari valde charus erat, dolo eum capere nixus, occultas teodebat
insidias. » Forse il padre di Benedetto VIII è quello stesso Gregorio conte Tuscolano, di cui si
parla in una lettera di papa Silvestro II all'imperatore Ottone III. (Vedi nota (4) alla pag. 204).

Nessun cronista del tempo, oltre Ditmaro, parla dello scisma che ne nacque, ma presto attutito; un altro scrittore assai più recente ne scrive queste poche parole: « sorse (in quel punto) uno scisma nella Chiesa, » tra papa Benedetto VIII ed un altro intruso: ma quindi Benedetto » lo superò cacciando *di nuovo* l'intruso » (1).

Narra pertanto il Baronio questo fatto nel modo seguente, citando la relazione di Ditmaro: « papa Benedetto prevalse nell'elezione ad un » certo Gregorio: perciò *questi* nel dì del Natale giunse al re (Arrigo) in Palithi con tutto l'apparato apostolico, manifestando a tutti » con lamenti la sua espulsione. Il re tolse sopra di se la costui croce, » e dicendogli d'astenersi da ogni altra cura sopra di ciò, gli promise » che venendo a Roma, egli finirebbe con ogni diligenza questa cosa » secondo l'uso romano » (2).

Così Ditmaro e da esso il Baronio. Dalle quali parole pare piuttosto, che l'antipapa Gregorio, e non il pontefice Benedetto fosse quegli che si recò al re in Palithi. In tal guisa giudicò pure il commentatore Bollandista (3), cui sembrò che il pronome *questi* nella relazione di Ditmaro dovesse riferirsi all'ultimo ivi nominato, cioè a Gregorio antipapa.

Ma il Baronio forse indotto dal testo del primo cronista sopracitato (4), lasciò sottintendere, che Gregorio antipapa era bensì nell'elezione stato vinto da Benedetto VIII, ma che nuovamente insorto, costrinse il papa a fuggire in Germania (5).

Ad ogni modo la risposta di re Arrigo pare molto più conforme alla natura scaltra e posata di lui, considerandola come data all'antipapa:

(1) « Schisma XIII Ecclesiae fuit inter Benedictum VIII, et quemdam alium intrusum: sed post » Benedictus obtinuit, eiecto iterum intruso. » (WERN. ROLLEWINK in *Fascic. temporum* ap. PISTORIUM S. R. G. T. II. pag. 538).

(2) « Namque Papa Benedictus Gregorio quodam in electione praevaluit. Ob hoc *iste* ad Nativitatem Dominicam ad regem in Palithi venit cum omni paratu apostolico, expulsionem suam » omnibus lamentando innotescens. Huius crucem rex in suam suscepit custodiam, et a caeteris » abstinere precepit, promittens sibi, cum ipse illuc veniret, haec secundum morem Romanum » diligenter finire. » (THIETM. *Chron.* Lib. VI. § 61. p. 835. — BARONI *Annal.* 1012. n. VI).

(3) « Non de Bened. VIII sed de cuiusdam antipapae Gregorii adventu, agi hic a DITMARO videtur. » (I. B. SOLERIUS in *Monit. ad Vitam S. Henrici Imp.*, BOLLAND. T. III. Iulii die XIV. p. 738).

(4) Vedi la nota (1). Forse ancora ciò gli fecero credere le parole di DITMARO (ivi): « huius » crucem rex in suam suscepit custodiam, » e quelle, sopracitate (nota (1)) *eiecto iterum intruso*; ad ogni modo la dichiarazione del Baronio non è soddisfacente.

(5) « Quomodo autem ad restituendum ipsum Papam Bened. in sedem suam, idem rex Romam » se contulerit, dicemus an. sequenti. » (BARONIO, *Ann.* 1012, l. c).

perciocchè non volendo il re, che egli proseguisse a turbare la Chiesa colle sue pretensioni, gl' impose di astenersi da ogni altra prova per ottenere il suo intento, promettendogli che venendo a Roma egli agginsterrebbe le cose secondo la legge romana, il che voleva dire, secondo Arrigo, non permettendo ch'egli invadesse la sede apostolica, e secondo l'intese Gregorio, che Arrigo l'aiuterebbe a ripigliare la sede.

Ma la spiegazione data dal Baronio prevalse: l'adottò cogli altri scrittori anche il Muratori, osservando tuttavia non essere ben noto come tornasse Benedetto in Roma. Certo egli era in Roma ed al possesso della dignità pontificia, allorchè Arrigo nel 1014 vi si recò per la coronazione imperiale: la testimonianza del Glabro ce ne fa sicuri, col direi che il papa si fece incontro ad Arrigo (1).

Non comprendo l'interpretazione che dà il cardinale Baronio al testo di Ditmaro: tanto più che seguendo la rimanente relazione del cronista tedesco, tutto diviene piano e intelligibile, ove s'ammetta l'interpretazione del Bollandista. Prosegue Ditmaro in questa forma e dice: « Giunse il tempo desiderato, e re Arrigo ricevuto a somma onoranza da papa » *Benedetto nella città di Romolo, dove meglio che i suoi predecessori* » *questi dominava*, meritò d'essere fatto avvocato di S. Pietro » col rimanente che narra la coronazione ad imperatore de' Romani (2).

Tutto questo e persino la maggior potenza acquistata dal papa, prova, mi sembra, che Benedetto VIII non abbandonò Roma, e che l'antipapa vedendo d'essere stato da Arrigo ad arte lusingato, depose ogni speranza, e andò forse a nascondere in qualche monastero le sue sconsigliate pretese. Quanto al testo del cronista dal quale sembra che il Baronio deducesse la sua opinione, non parmi doversene far conto, essendo egli troppo vissuto lontano da que' tempi, per fare autorità colle sue parole (3).

Roma intanto per le cure del nuovo pontefice andava sedando le sue agitazioni. Nato in Tuscolo da Gregorio conte Tuscolano, teneva egli dal canto suo la fazione in quel punto più potente di Roma, sopra-

(1) GLABRI Rod. *Hist. Lib. I.* in fine.

(2) « Advenit optati temporis acceleratio, et rex Henricus a Papa Benedicto, qui tunc prae ceteris antecessoribus suis maxime dominabatur, mense februario in urbe Romulea cum ineffabili honore suscipitur, et advocatus S. Petri meruit fieri etc. » (THIETM. l. c.).

(3) WERNER ROLLEWINK citato nella nota (1) alla pag. 279 visse nel secolo XV. (ap PISTORIUM R. G. S. T. II).

tutto dacchè per la morte del patrizio Giovanni, parte Spoletina aveva perduto il suo capitano. Questa morte, e la potenza acquistata, diedero agio a Benedetto di far eleggere a capo della Repubblica un suo fratello, per nome *Romano*, uomo d'alto senno, che dal cronista di Farfa viene circa a questo tempo appellato console, duca e senatore di tutti i Romani (1). Quanto alla carica di patrizio, non ne poteva esser caso in quel punto, essendo imminente la coronazione dell'imperatore. Del resto l'accortezza di papa Benedetto VIII era bastante per impedirne al nuovo capo della Repubblica, tuttochè suo fratello, il conseguimento, perciocchè dopo la rinnovazione dell'impero d'Occidente per Carlo Magno, i papi od assumevano o pretendevano la dignità di patrizio, tenuta prima da quel re (2). La qual pretensione mentre spiega la civile potestà grado a grado acquistata da' pontefici, spiega altresì gran parte delle commozioni insorte per gara di signoria tra essi ed i capi della Romana Repubblica.

Era la venuta d'Arrigo sommamente desiderata dal pontefice, e dalla fazione in quel punto trionfante. Ardeva anch'egli di sentirsi un buon tratto sul capo quella corona imperiale, ambito trionfo de' re di Germania, dacchè Ottone il vecchio ne aveva il primo ottenuto l'onore. Ma le condizioni in cui fino a quel tempo s'era trovata posta la Germania per la nuova guerra mossa da Boleslao, i molti nemici di Arrigo che in Roma s'affaticavano d'impedirlgliene il conseguimento, avevano a lui fatto dilungare il tempo della sua scesa in Italia, dove si può credere fosse pure invocato da' Grandi del reame, travagliati nel modo che si è detto, dalle scorrerie del re Ardoino.

Ma sul finire dell'anno 1013, assestate colla pace ferma col duca Boleslao le cose germaniche, ed attutate dalla potenza di papa Benedetto le opposizioni che suscitavano nella città i nemici della dominazione germanica, deliberò Arrigo d'intraprendere il viaggio di Roma.

Addì 21 settembre di quell'anno moveva egli pertanto dalla Sassonia, e per la Baviera, e per la Svevia in compagnia della regina Cunegonda s'avviava verso l'Italia, seguito da numeroso esercito; nel Natale già era giunto in Pavia (3).

(1) *Chron. Farf.* l. c. col. 524 D.

(2) CARLI, *Aut. Ital.* P. III. p. 254.

(3) THIETM. *Chron.* Lib. VI. § 56. l. c. — *Annal. Hildesheim an. 1014.* ap. PERTZ, T. V. — *Annal. Quedlinburg. an. 1013*, ibid.

CAPITOLO XI.

CORONAZIONE IMPERIALE DI ARRIGO RE DI GERMANIA
 SOMMOSSA IN ROMA DESTATA DAGLI ESTENSI IN FAVORE D'ARDOINO.
 ULTIMI FATTI DI QUESTO RE, E SUA MORTE IN FRUTTUARIA
 (1014-1015).

L'ingresso del re di Germania in Pavia pacificamente eseguito, senza resistenza per parte della popolazione, e delle soldatesche d'Ardoino, ci fa credere che questo re, fedele al sistema da lui preso di schivare ogni campale battaglia coll'emulo suo troppo di lui più potente, e di restringersi a quel modo di combattere avventuroso di cui parlammo ne' precedenti Capitoli, s'affrettò di riparare colle sue genti nel centro delle sue possessioni d'Ivrea, lasciando che i Pavesi con finta gioia accogliesserò Arrigo nelle restaurate loro mura.

Fin da quando Ardoino, allora marchese, era stato sentenziato da Ottone III (999-1000), ovvero (siccome vuole monsignor Della-Chiesa) da quel tempo in cui Arrigo nuovamente eletto a re di Germania accennava a un'invasione del reame d'Italia (1002), aveva Ardoino provveduto alla difesa della sua Marca, rifacendo le antiche bastite cadute in rovina sotto la dominazione degli Ottoni, e nuove castella innalzando a tutela delle valli, che da ponente nel cuore de'suoi comitati dall'Alpi mettevano, e delle altre che da levante i fiumi Orco e Soana giù verso il Po vengono solcando.

Il paese montuoso ed alpestre favoriva cotali provvedimenti; già noi vedemmo Sparrone uno de' castelli da Ardoino costrutti verso l'imboccatura appunto di que'primi fiumi, resistere agli Enriciani, e stancare dopo un anno gli sforzi invano adoperati per superarlo (1). Così inoltre ergeva Castel-Tellaro verso la Tarantasia, e la Torre Feranda che faceva la guardia al guado del Soana: forse fu altresì opera sua il munire

(1) Vedi il Capitolo VIII di questi Studi.

l'antico e forte castello di Pertica tagliato nella rupe della valle superiore di Soana, del quale Pietro Azario ci dà nella sua cronaca curiosa descrizione, come lo fu il fondare la rocca allora fortissima d'Ivrea sulle rovine dell'antico castello, sede de' primi marchesi (1).

Ancora molte altre erano le bastite, le torri, le castella, comprese nella Marca d'Ivrea, le quali rendevano in que' tempi difficile ad un esercito nemico l'impossessarsi di quel paese, che aveva servito di rifugio ad Ardoino contro l'ira d'Ottone III, e che non minore riparo a lui prometteva contro quella di Arrigo.

Tuttavia appena ebbe egli inteso siccome re Arrigo era sceso dalle Alpi, e s'affrettava per a Roma alla coronazione imperiale, sia che pel dolore ad un tratto venissero meno in esso gli antichi spiriti, o che stanco di quella vita agitata e faticosa di venturiero, e forse persuaso che il vano esperimento fatto da' suoi nemici contro la validità delle sue fortezze fosse per indurre il re germanico ad accettare proposte di sommissione e d'accordo, deliberava Ardoino, non senza dolorosa titubanza, mandare all'emulo suo legati apportatori di larghe profferte.

Recavano costoro per parte sua, e per quella di Ottone e d'Ardicino suoi figli, l'offerta di rinunciare volontariamente alla corona d'Italia, ove piacesse al re Arrigo conceder loro un comitato, del quale il cronista Ditmaro tace il nome, ma che altro non può essere che il comitato, cioè la Marca d'Ivrea. Troppo larghe profferte erano queste, ed indegne di un re non mai stato fino a quel punto superato in battaglia da lui che le ndiva, le quali ben dimostrano come la venuta del re Arrigo in Italia per ricevervi la corona imperiale promessa dal pontefice, avesse fatto cadere d'animo il poco prima furibondo Ardoino.

Ma non gradivano questi patti a' consiglieri d'Arrigo, i quali memori delle percosse ricevute da Ardoino, dal 1005 in poi, temevano novelle tempeste tostochè il re germanico avrebbe rivalicato i monti, ove quegli conservasse la possessione della sua Marca d'Ivrea. Cedendo pertanto alle loro istanze, re Arrigo sdegnosamente rimandava i legati, e proseguiva il trionfale cammino verso Pavia.

(1) CHIESA Agostino, *Corona R. di Savoia*, P. II. p. 452. 476. — DURANDI, *Marca d'Ivrea*, P. II. p. 6. — P. AZARIO, *De Bello Canapiciano*, col. 432. R. I. T. XVI. — Della Rocca d'Ivrea rifabbricata da Ardoino, appena rimangono alcune vestigia negli archi e nelle pareti di parecchie case innalzate sovra quel masso che sta a cavaliere del bellissimo seno formato dalla Dora, e costeggiato dalla nuova strada testè terminata.

Fra breve noi vedremo siccome un tale rifiuto riconfortando i sopiti spiriti del re italiano, cadde a danno soprattutto di que' malaugurati consiglieri. Così Ditmaro (1). Dalla quale osservazione veniamo a conoscere che fra questi consiglieri del re Arrigo erano i vescovi di Vercelli, di Novara e di Como, posciachè su di essi scoppiarono in ispecial modo l'ultime vendette del tradito Ardoino.

Dopo breve soggiorno in Pavia moveva l'impaziente Arrigo per a Ravenna: ivi collocava un suo fratello Arnolfo sulla sedia arcivescovile, usurpata, come si è detto, da un certo Adalberto (2). Quindi s'affrettava verso Roma, dove giungeva addì 14 di febbraio (1014).

La coronazione imperiale del re Arrigo e della regina Cunegonda è brevemente descritta dagli storici di Germania in questa forma:

Facevasi incontro alla regal comitiva, fuori le porte di Roma in gran pompa il pontefice Benedetto VIII colla popolazione della città, la quale sebben *discorde ne' suoi voti* verso l'imperatore presunto, tuttavia, *com'era forza*, secondo l'uso, urlava, schiamazzava, applaudiva, lodando a cielo il novello suo signore (3).

Quindi accompagnato da dodici senatori colle mazze, de' quali sei con barba prolissa, e gli altri sei raso il mento, forse in segno di soggezione, entrava nella città il felicissimo Arrigo, mentre il pontefice antivenivale sulla soglia della Basilica Vaticana. Quivi domandavalo se fosse deliberato di farsi fido patrono e difensore della Chiesa Romana,

(1) THIETM. Chron. Lib. VI. § 57. l. c.

(2) *Annal. Saxo* ap. ECCARDUM T. I. an. MXIV.

(3) « *Ivil obviam tota civitas; licet dissono voto lamen ul par eral suo domino dant laudum* » *praeconia, extollentes ad sidera.* » (*Annal. Quedlinburg. an. 1014*, ap. PERTZ *M. G. H. T. V*).
THIETM. Chron. Lib. VI in fine, et VII. § 1 l. c. Cfr. GLABRI Rod. Lib. I in fine, ap. DUCHESNE R. F. T. IV. — EPIDANNO monaco di S. Gallo (ap. DUCHESNE R. F. III. p. 477) scrisse d'Edrico.

« *Heinrich in Italiam, lecto quoque milite, Romam,*

« *Aegre spectatus fertur, Caesarque creatur.* »

Più concordi e più spontanee, narra l'Anonimo Valesiano, fossero le lodi, che circa un secolo prima tributava il popolo romano a Berengario I principe italiano, venuto come Arrigo a Roma, per ricevervi la corona imperiale:

« *..... Sonat ecce Sabura (per Subura, quartiere e tribù urbana di Roma)*

« *Vocibus elatis populi: properate faventes!*

« *Rex venit, Ansoniis dudum expectatus ab oris!*

« *..... Eral omnibus ardor*

« *Cernere praesentem, cupiunt quem saecula regem.* »

(*ANON. Panegyry. Berengarii Aug. Lib. IV. vers. 105-107, et 138-139 ap. PERTZ, T. VI*).

fedele a lui pontefice, ed a' suoi successori. Alle quali richieste avendo il re con divota protesta assentito, venne introdotto nella Basilica, dove col solito rito rievette la sacra unzione, e la sospirata imperiale corona. Volle Arrigo che l'altra corona, cioè quella del regno, fosse come voto appesa all'altare del principe degli Apostoli (1), ed il papa corrispose a questo dono presentando il novello imperatore di un prezioso ornamento, la cui descrizione conservataci dal Glabro sempre più ci dichiara quel misto d'ossequio e di superiorità, col quale i pontefici accoglievano i principi da essi chiamati all'onore dell'impero romano. Era questo un pomo d'oro adorno di gemme da' quattro punti, il quale portava superiormente una croce parimenti d'oro. « Esso rappresentava, così il Glabro, » questa nostra mole mondana, cui si suole attribuire una certa forma » rotonda: e mirando in quel globo il principe del terrestre impero » doveva ricordarsi non aver egli altrimenti ad imperare ed a combat- » tere nel mondo, se non se in modo da meritare la protezione di quel » vessillo vivifico della croce che ivi primeggiava. Nella varietà poi delle » gemme di cui brillava il pomo d'oro, rappresentavansi le virtù molte » che adornar dovevano quegli che era giunto all'apice dell'imperiale » potenza. »

Arrigo accettava devotamente col dono l'ammonimento del donatore, e mandava a presentare di quel gioiello il monastero di Cluni (2). Chiedeva quindi la solennità del giorno una lauta cena, imbandita dal papa in Laterano all'imperatore novello, ed alla imperatrice Cunegonda (3).

Ma le coronazioni di Arrigo non erano di lieto augurio; come in Pavia nella coronazione sua a re d'Italia, così in Roma corse a rivi il sangue nell'imperiale esaltamento di Arrigo.

Otto soli giorni dopo quello della sacra solennità erano trascorsi, che una grave commozione destavasi sul ponte del Tevere tra i Romani ed i Tedeschi, per la quale dall'una e dall'altra parte molti cadevano uccisi; autori di questa erano tre fratelli Hug, Hecil ed Hecclin, Lombardi. Così il solito Ditmaro, il quale altro non soggiunge nè sulla cagione, nè sulla qualità di tal movimento (4).

(1) THIETM. *Chron.* l. c. — Cfr. *Spicileg. Romanum*, edente A. MAIO, S. R. E. Card., T. VI. p. 228. « Qualiter Rom. Imp. debeat coronari. » (Romae, in 8.º, an. MDCCCXLI).

(2) GLABRI *Rod.* ibid. Lib. I.

(3) THIETM. *Chron.* Lib. VII. ibid.

(4) THIETM. *Chron.* Lib. VII. § 1 l. c. p. 836.

Le circostanze di tempo e di persone, che appartengono a questo fatto, mi parvero meritare qualche studio sovr'esso. Altri giudicherà s'io mi sia bene apposto.

In uno de' Capitoli precedenti mi venne nominato fra' più accesi aderenti del re italiano, un Oberto II della famiglia Estense, marchese in questi tempi della Liguria, conte di Milano, ed insieme del sacro Palazzo in Pavia. Erano i sopradetti fratelli Longobardi, ricordati da Ditmaro, tre de' cinque figliuoli di esso marchese Oberto (1), de' quali quel cronista va storpiando i nomi all'uso tedesco. Così senza dubbio scrisse *Hug* per Ugo od *Ugone: Hecil*, detto pure Azili, per *Attone*, contratto di Adalberto (2), ed *Hecilin* diminutivo di *Hecil* cioè *Adalberto minore* (3). Come costoro fossero figliuoli del marchese Oberto II, io non starò ad addurne le prove, che ognuno può riscontrare ne' documenti pubblicati dallo Scheidto nelle sue *Origini Guelfiche* (4). Accresce il valore di questa opinione, l'essere pure stata espressa dall'attento Leibnizio (5).

Ciò posto, francamente noi ne potremo dedurre, che la sommossa di cui Ditmaro fa capi questi tre figliuoli del marchese Oberto, rammodavasi ad un maggior movimento contro la dominazione germanica, che si andava meditando in Lombardia dal re Ardoino aiutato da quell'Oberto medesimo.

L'esistenza di questa pratica viene irrefragabilmente dimostrata da' fatti che seguirono, sebbene invano se ne cerchi una circostanziata descrizione ne' cronisti contemporanei. La funesta riuscita ch'ell'ebbe bastò al certo per far tacere gli scrittori italiani: e quanto a quelli di Germania, ben si può credere, che essi una gran parte ignorassero di questi lontani avvenimenti; il solo Ditmaro ne tratteggia qua e là qualche cenno (6). Da quel poco pertanto ch'egli ne lasciò scritto, e da altre

(1) SCHEIDT *Orig. Guelf.* Lib. II. Cap. IX.

(2) « Dum io Dei nomine Comitatu Vicentino in loco etc. in indicio adessel dominus Iob. Patriarcha, et Oci, qui et Walpoin comes, missus domini Ottonis regis, et *Adelbertus*, qui et *Azili* etc. » (MUNATORI, *Ant. Est.* P. I. p. 128).

(3) SCHEIDT l. c. § 10.

(4) SCHEIDT *ibid.* § 3. 7 et 10.

(5) Nella Prefazione alla *Storia d'ARNOLFO* da lui pubblicata nel Tom. III. p. 26, *Rerum Brunswic*

(6) Fra gli scrittori germanici, ADALDOLDO, contemporaneo di Arrigo I, lasciò imperfetta all'anno 1001 la vita di questo principe: e l'*Annalista Saxo* ed il *Chronographus* non fecero che ripetere le parole di DITMARO: punto non parla di questo l'*Annalista d'Hildesheim*. Fra gl' Italiani coevi nè LANDOLFO seniore, nè ARNOLFO, nè tampoco il Cronista del Monte Casino non ne fanno parola

sinerone testimonianze, noi verremo alla meglio indovinando l'andamento di questo fatto importante, non avvertito nè dal Sigonio, nè dal Muratori, e che dichiara a quale scopo tendesse lo zelo che le popolazioni italiane mostravano per Ardoino.

Semplice apparisce essere stato il piano de' confederati italiani: destare in Roma per mezzo de' tre figliuoli d'Oberto un tumulto contro i Tedeschi, stimolando le ire di quell'antica fazione che sotto il console Crescenzio tante prove avea dato dell'avversione sua contro gli Ottoni, e con essa assalire ed opprimere l'imperatore novello, mentre Ardoino, Oberto e gli altri confederati, nelle interne provincie del reame, preparerebbero le armi per assalire di fronte i fuggiaschi d'Arrigo, e tagliar loro lo scampo dell'Alpi per alla Germania.

Certamente il cronista Ditmaro non racconta che questo fosse il piano degl'Italiani, ma che, secondo ogni più probabile conghietture, tale ad ogni modo esser volesse il loro disegno, lo dimostrano e la sommossa che appunto fu destata in Roma da' tre fratelli Estensi, e le sentenze fulminate dall'imperatore, appena tornato in Germania, contro di essi, contro Oberto loro padre ed i loro fratelli, e contro altri Italiani che *con Ardoino invasero di nuovo il reame* (1). Noi vedremo infatti, che sebbene, fallita la sommossa di Roma, il movimento combinato in Lombardia più non potesse aver luogo, non perciò Ardoino cogli Estensi, si trattenne dal fare un'ultima prova di restaurare le cose sue, appena partito l'imperatore, prova per cui gran parte delle città italiane tornavano alla sua obbedienza.

(1) Vedi questi documenti nell'Append. n.º 36 e seguenti: la sentenza bandita contro gli Esteosi tiene nella sua sposizione queste parole: « Notum esso volumus universis sanctae Dei Ecclesiae » fidelibus, Ubertum comitem filium Hildebrandi, Othbertum marchionem et filios eius etc. » postquam nos in regem et Imperatorem elegerunt, post manus nobis datas, et sacramenta » nobis facta, cum Dei nostroque inimico Ardoino regnum nostrum invasisse etc. » Qui è dunque chiaramente indicata la levata in armi del re Ardoino, eseguita da lui appena ebbe Arrigo toccato il suolo della Germania, come ci narra DITMARO: « reversus est ab Italia Caesar, et » Hartwigus ob hoc admodum gavisus Vercellensem invasit civitatem etc. » (*Chron. VII. 3. l. c.*): ora questa levata in armi, che fu l'ultima d'Ardoino, fu altresì la sola ch'egli operasse dopo la coronazione imperiale di Arrigo: la cooperazione degli Estensi a questa nuova spedizione del re italiano è dunque evidentissima, come è pure evidentissimo che il luogo di Solega d'onde fu bandita la sentenza non può essere nè il villaggio di tal nome posto sul fiume Ollo presso Cremona, come volle lo SCHEIDIO (*Orig. Cueli. T. I. Lib. II. c. VIII. § 3*), e prima di lui TRISTANO CALCO (*Hist. Med. Lib. VI*), nè l'altro sul Trivigiano, nè verun altro villaggio d'Italia, ma sì piuttosto che il nome di Solega è un idiotismo germano-latino di Solven nel Noico, o di Solseid nella bassa Carinzia, come avvertì il DURANDI (*Condiz. del Vercellese*, p. 129).

Dopo di ciò ella è natural cosa il credere che il numero degli aderenti alla confederazione non fosse ristretto a quelli soli nominati nelle sentenze da noi indicate; ad essi, e certo fra' più zelanti aderir dovettero i miseri avanzi de' Pavesi, la cui città favorita mai sempre da Ardoino, ampia cagione aveva d'avversare la dominazione d'Arrigo: ancora per le ragioni altrove già addotte (1), potremo aggiungere agli altri, Manfredi II marchese e conte di Torino, ed Alrico suo fratello vescovo di Asti, ambi congiunti d'Ardoino e degli Estensi, e quegli altri molti fra' principi del regno, che più timidi o più avveduti non osarono mostrare arditamente il viso al nemico, ma che certamente stavano aspettando in segreto l'effetto dell'insorgimento romano, pronti a levar l'armi ogni volta che parte imperiale rimanesse oppressa in Roma, od a piaggiare vigliaccamente (come fecero) il re tedesco, ove questi sortisse vincitore. A codesti, come verrà in chiaro fra breve, uniremo ancora Arnolfo arcivescovo di Milano, potentissimo ed astutissimo principe, cui certo facevano seguito molti de' vescovi suoi suffraganei, co' conti da lui dipendenti, ed altri ancora fra' grandi vassalli del regno, che o nel 1002 avevano, come Arnolfo, chiamato Arrigo in Italia, o che nel 1004 s'erano ad Ardoino spergiurati in Verona: perciocchè ben si vuol credere che costoro, molti de' quali nell'ultimo decennio di regno avevano sperimentato le vendette d'Ardoino, ora, sia per la temenza delle nuove incursioni ch'egli non cesserebbe di fare, appena Arrigo avrebbe ritocco il suolo della Germania, sia perchè disgustati dell'occupazione tedesca, col consentire a questo movimento avessero impetrato dal re Ardoino il perdono degli antichi spergiuri, e forse, come solevano, patteggiato con esso avere ricompense. Le quali cose noi potremo ragionevolmente argomentare, avvegnachè dalle incursioni eseguite non molto dopo dal re Ardoino, apparisca quali fossero le città che avevano disdetto al movimento ideato. Così possiamo andar certi che nè Vercelli, nè Novara, nè Como non aderirono alla chiamata, posciachè contr'esse vedremo piombare più furibonda la vendetta di lui, che per altre antiche e nuove offese, i vescovi di quelle città avevano altresì provocato.

Finalmente un maggior numero di zelatori noi troveremo in que' *secondi militi*, che da' documenti d'Ivrea (2) ci vengono indicati come tratti

(1) Vedi il Capitolo IX di questi Stadi, sul fine.

(2) Append. n. 12.

da Ardoino alla sua parte, i quali formavano quell'ordine secondo di vassalli, che noi vedemmo nelle varie città italiane avere già preso l'armi contro i Grandi del reame. Ora da questo secondo ordine un terzo ne dipendeva (1), sì che questi due venivano a comporre una massa compatta di genti d'arme, che comprendeva la maggior parte degli uomini liberi del medio ed ultimo ceto della popolazione.

Estesissima pertanto e frequente di capitani e di soldatesche, argomentar potremo fosse la confederazione italiana, animosa ma non temeraria l'impresa; conciossiachè avvisar ben potevasi che Roma corriva alle sommosse, e nemica alla dominazione germanica, non fallirebbe all'opportunità di sollevarsi, ove un capo le si profferisse (nè questo capo mancava) atto a condurre que' riottosi avanzi di tanti tumulti, e che volentose brandirebbero l'armi le città confederate, dovè all'orrore rimasto impresso contro Arrigo dopo l'eccidio dell'infelice Pavia (2), nuovi argomenti d'odio e di vendetta s'erano aggiunti, pe' danni recenti e continui, sparsi dalle masnade tedesche venute con esso per la coronazione imperiale.

Imperciocchè egli è noto siccome ogni volta che i re di Germania scendevano dall'Alpi per la corona del regno o dell'impero, poco fidando essi (nè a torto) nelle legioni, che secondo la legge longobardica i conti italiani erano tenuti di provvedere, mai non venivano in Italia che stipati dalle legioni germaniche. Erano queste composte d'alcuni volontari, ma per lo più d'uomini astretti, per a tempo soltanto, al servizio di guerra, capitanati da que' conti medesimi che avevano sovr'essi beneficiario dominio: gente efferata che non valicava le Alpi che dispettosa e per forza, cui non moderava veruna severa disciplina, e che perciò con delitti d'ogni maniera manometteva le indifese popolazioni (3).

Quanto esecrati esser dovessero gli ospiti cosiffatti condotti da Arrigo in Italia, ell'è cosa più che facile a immaginarsi: da Ditmario poi abbiamo in qual guisa s'ingegnassero i manomessi, di far loro scontare a caro prezzo i quotidiani soprusi (4).

(1) ROVELLI, *Storia di Como*, P. II. pag. LXXVII.

(2) « Omnis inhorruit Italia, simile pertimescens. Ab hinc illius exinanita confidentia. » (AR-
NULPHI, *Hist.* I. XVI).

(3) GIBBON, *Hist. de la Décad. etc. de l'Emp. R. T.* IX. Ch. XLIX.

(4) THIERM. *Chron.* VII. 3. l. c.

Popolo, soldati e capitani erano dunque apparecchiati, tutto pendeva dall'esito della sommossa romana. Scoppiò questa infatti, come narra Ditmaro, l'ottavo giorno dopo la coronazione d'Arrigo, nè senza consiglio fu scelto il ponte sul Tevere per dar principio al movimento (1). Sorge, come ognuno sa, questo ponte presso la porta di Castel S. Angelo, detto allora la torre di Crescenzo, fortezza da lungo tempo tenuta dalla famiglia del console famoso, che le avea dato il suo nome (2), ed in que' giorni occupata dal prefetto di Roma, di nome come l'avolo, Crescenzo, e da Giovanni suo fratello, marchese di Camerino, nipoti amendue, come già si è detto, di quel Giovanni patrizio, morto due anni prima (3).

Nè l'uno, nè l'altro di questi due principi romani non è nominato da Ditmaro come partecipe della sommossa, ma da un placito tenutosi dal pontefice Benedetto VIII in Farfa, pochi mesi dopo, ricavasi che costoro essendo uomini potentissimi nella città, per opera loro, e forse (così il Mabillone) per loro consiglio, s'era destata quella commozione tra i Romani e i Tedeschi (4). La cooperazione adunque di quella fazione, di cui Crescenzo e Giovanni erano capi, all'impresa che meditavasi in Lombardia da Ardoino e dagli altri Estensi, è evidentissima. Roma aderiva al movimento italiano. Scatenaronsi l'ire, gli odi antichi lungamente compressi si riaccesero, sì che la zuffa s'appiccò vigorosa tra' Romani e gl'Imperiali, e molto sangue quinci e quindi in sulle prime fu sparso; così Ditmaro. Come di poi si rallentasse la mischia, e quale fosse la parte perdente, Ditmaro non si fece a narrarlo. « Da ultimo » (aggiunge egli) la notte separò i combattenti » (5).

(1) « Magna oritur commocio in ponte Tiberino. » (THIETM. VII. 1).

(2) CARLI, *Antichità Italiane*, P. IV. pag. 21.

(3) Erano costoro nati da Teoderanda figliuola del console Crescenzo, ucciso a tradimento da Ottone III, e sorella di Giovanni patrizio di Roma (Vedi questo Capitolo nelle pag. precedenti).

(4) MABILLON. *Annal. O. S. B. T. IV. Lib. LIII. § CXIV. et Placitum Farfense*, documento n. XXXII ibid. p. 701.

(5) « In octava vero die (dopo la coronazione imperiale) inter Romanos et nostrales magna » oritur commocio in ponte Tiberino, et utrimque multi corruerunt, nocte eos ad ultimum dirimente. » (THIETM. *Chron. Lib. VII. § 1. PERTZ l. c.*) — Uno scrittore moderno del quale non mi ricorda il nome, vuole che in quella sommossa fossero perdenti i Tedeschi, e quindi fossero respinti da Roma: questo non può essere, perciocchè vincitori i Romani, l'imperatore sarebbe stato o preso o cacciato in fuga, e quindi la levata in armi d'Ardoino e de' confederati di Lombardia avrebbe avuto luogo immantinenti.

Ma un'altra causa ignota a quel cronista fu quella che attutò il movimento, cui ben lungi dal cessare, le sopravvenienti tenebre della notte avrebbero dovuto aiutare, e rendere pe' cittadini tanto più favorevole, in quanto che era l'uso che il nerbo principale delle legioni forestiere andasse a quartiere ne' dintorni di Roma, dove non rimanevano di esse; che le guardie necessarie per la tutela del palazzo imperiale. Questa causa conviene indovinarla: tuttavia l'induzione, sovra la quale s'appoggia, parmi, s'io non erro, possente, ed è questa: la vicinanza della fortezza de' Crescenzi ch'esser doveva argomento di vittoria, fu al contrario cagione della sventata intrapresa. Perciocchè non solo le porte di quel castello non s'apersero a tempo per fornire di nuovi soccorsi gli Estensi che combattevano sul ponte, allorchè essi trovarono maggiore, che non credevano, la resistènz, ma anzi o s'aprirono solo per ricoverare i due Crescenzi partecipi della sommossa, o furono tenute a' figliuoli d'Oberto, allorchè costoro privi di soccorso, vedendo spacciata ogni speranza, cercarono in quelle uno scampo. Questo non può esser ito altrimenti, giacchè Dittmaro nel raccontare siccome de' tre giovani Estensi un solo (Adalberto) si salvò colla fuga, e gli altri due furono mandati prigionj in Germania, punto non ricorda che nessuno de' capi romani fosse colto con essi (1). Di più, i due Crescenzi continuarono a braggiare, come prima, per Roma, sospetti ma non inquisiti d'essere intinti nella congiura. Questo ci viene indicato dal placito di Farfa tenuto in quell'anno addì due d'agosto, tempo nel quale uno di essi era in lite co' monaci Farfensi (2).

Potremo adunque dedurne, senza timore d'andare errati, che i due principi romani associati al tumulto, progenie indegna dell'animoso Crescenzio, falsarono la fede a' figli d'Oberto, vilmente abbandonandoli nel

(1) « Ex quibus unus in hiis partibus evasit, secundus autem ad Fulda deductus est, in Iviean- » stene autem castello tertius diu servatur. » (THIETM. l. c.). Sovra il tempo in cui fu fatta questa cattura de' figliuoli d'Oberto ragiona a lungo il MURATORI (*Ant. Est.* P. I. Cap. XIV) senza conchiuder nulla. Più esplicito sembra il suo parere negli Annali (MNIV), circa l'immediato imprigionamento di due di essi, dopo superato il tumulto. Dal testo di Dittmaro mi pare evidente che la cattura fu immediata, e non baderemo alle favole che narra su di ciò Gualvano Fiamma. Quanto al cronista della Novalesa, il quale, parlando d'Arrigo, dice: « Marchiones autem Italici » sua calliditate capiens et in custodia ponens » (Lib. V. c. XXXVII novae edit.), egli è chiaro ch'esso racconta sommariamente siccome molli furono i marchesi italiani sostenuti prigionj dall'imperatore, ma non assegua verun tempo preciso alla loro cattura.

(2) Vedi il documento Farfense in MABILLON, T. IV. l. c.

bollore della zuffa, e che per questo il tumulto fu attutato e compresso. Al contrario che i tre fratelli Estensi virilmente combattessero, lo dimostrano le punitzioni rigorose ad essi inflitte dall'imperatore: d'uno di essi poi, detto da Ditinaro, Eccelino (che vale Adalberto minore), e delle prove da esso fatte in questa fazione romana, special encomio se ne legge nell'epitafio posto sulla di lui tomba nella chiesa di Castiglione (presso borgo S. Donino e Busseto). Ma lo stile ampolloso e gonfio di tal monumento ne ammonisce delle esagerazioni che vi sono espresse. Infatti dopo di aver lodato il valore e la pietà di questo Adalberto, non contento lo scrittore a paragonare *le ceneri del suo eroe a quelle di Ettore; il busto di lui al busto di Achille, ed il capo al capo di Cesare*, soggiunge, che per la virtù d'Adalberto, i barbari, cioè i Tedeschi, furono in quel punto cacciati da Roma. Il che opponendosi alle storiche testimonianze di quegli anni, non può pigliarsi che in senso iperbolico: avvegnachè sebbene l'imperatore Arrigo giudicasse bensì prudente consiglio il ricondurre le sue legioni da Roma, irritata da quella occupazione, la sua non fu nè rotta, nè fuga, siccome vedremo. Basterà dunque il dire coll'epigrafista, che non si fu per gli Estensi, che la fazione romana non fosse coronata di compiuto trionfo (1).

Svanite in tal guisa le concepite speranze, gli aderenti di Ardoino in Lombardia più non si mossero: che anzi molti fra' Grandi avvisando forse ingannare il sollerte imperatore, e meglio inorpellare i loro passati portamenti, ostentarono più vili sommissioni, e zelo più acceso per la sua causa. Così mentre il re Ardoino fra le rocche d'Ivrea andava meditando altro modo di riaccendere la guerra, e di rifare le cose sue, que' vassalli del regno si facevano incontro ad Arrigo reduce da Roma, postulando nuovi favori, ed Oberto l'Estense, forse d'accordo con Ardoino, s'accingeva ad accogliere l'imperatore in Pavia (2).

Ma quanto agli altri fedeli d'Ardoino era assoluta necessità, ch'egli ne frenassè lo zelo intempestivo, e lo serbasse a tentar prove novelle dopo la partenza del suo rivale, ch'egli prevedeva dover essere prossima. Pochi giorni infatti dopo attutata la sommossa, partiva l'imperatore da Roma, dove per certo sapeva non essere per lui sicura una più lunga

(1) Vedi SANSOVINO, *Orig. delle famiglie Illustri*, p. 380, e l'Appendice n. (41). — Cfr. SERRONI, *Orig. Guelf*, T. I. lib. 2, cap. IX, §§ 10 ed 16.

(2) *Antich. Esten.* I. c.

dimora (1). Ma sul punto di tornare nelle provincie superiori del reame, volendo provvedere alle difese, ed atterrir coll'esempio quelli fra i congiurati lombardi, che ove il movimento avesse avuto diverso risultato, sapeva esser pronti a levar l'armi, fece Arrigo pigliar per istatici varii Italiani accorsi in Roma, ed altri sostenere prigionii, come sospetti d'aver avuto mano nella congiura; costoro affidava egli in guardia a' Romani. Ma appena ebbe egli tocco il suolo della Germania, tutti furono posti in libertà: ed essi non penarono ad accorrere in Lombardia a pigliar parte alla guerra che nuovamente vi ruppe Ardoino, siccome vedremo (2). Dal che maggior argomento noi dedurremo, sovra la partecipazione di Roma al movimento italiano, e sovra la popolarità di questo nel regno.

Frattanto le date di vari diplomi imperiali dimostrano che Arrigo spese pressochè due mesi a visitare le città della Toscana, e quelle di Ravenna e di Piacenza, sia per rassermare o ricomprare con nuovi doni la fede vacillante de' grandi vassalli in quelle provincie, sia per ispiarvi gli andamenti de' suoi avversari (3); per la Pasqua poi, caduta in quell'anno addì 25 d'aprile, gli storici di Germania ce lo mostrano giunto in Pavia (4).

Quivi assisteva ad un placito tenutovi addì 7 di maggio da Ottone conte del sacro palazzo, al quale intervenne altresì il marchese Oberto (5). Perciocchè sebbene dopo il fatto di Roma dovesse Arrigo aver per sospetto il padre di quegli Estensi, ch'egli aveva testè fatti prigionii, tuttavia da quel sollerte ed astuto principe che mai sempre mostrossi, conobbe non essere prudente consiglio il fare viso severo al marchese Oberto, vassallo di estesa potenza, e di seguito infinito, ed appunto mentr'egli si trovava in quelle stesse provincie nelle quali Oberto te-

(1) « Paucos ibi (Romae) habens dies, publica re, ut putabat bene disposita accelerat » iter ad patriam. » (*Ann. Quedlimb. ad an. ap. PERTZ, T. V.*). — « Inter quos (cioè Crescenzo » e Giovanni suo fratello) molio facta est et inter Romanos et imperatoris plebem, et eam legem » quam imperator facere proposuerat adimplere non poterat et retro se dum imperator » reverteretur etc. » (*Placitum Farfense ap. MABILLON, Ann. O. S. B. T. IV. Append. 32. fol. 704.*). — Cfr. *Ann. Hildesh. ad an. 1014 ap. PERTZ op. cit. T. V.* La sommossa romana essendo scoppiata in octava die dopo la coronazione, che fu addì 14 di febbrajo, la partenza d'Arrigo dovette seguire negli ultimi giorni di quel mese.

(2) « Multi autem obsides et alii, Romanorum custodiae traditi, imperatore redeunte callide » fugam inveniunt, violantes pacem, et belli rursus consilia captantes » (*Annal. Quedlimb. l. c.*).

(3) MURAT. *Ann. 1014.*

(4) *Annal. Hildesh. l. c.* et THIETM. *Chron. Lib. VII. n. 3.*

(5) MURAT. *Ann. l. c.*

neva, od aveva per lo meno tenuto, speciale signoria. Così pure avviseremo che la speranza di non essere al tutto scoperto, e più di tutto che la coscienza della propria forza, in una città in singolar modo nemica di quell'imperatore, facessero animo ad Oberto nel profferirsi risolutamente al suo cospetto. Checchè ne fosse amendue questi principi dissimularono l'animo loro: e riponendo in cuore lo sdegno concepito, questi per la prigionia de' suoi figli, quegli per l'ingiuria della sommossa, rimandarono a miglior tempo l'eseguimento de' loro disegni. Ma intanto qualunque ne fosse la cagione, la carica di Conte del sacro palazzo era da Oberto passata nel conte Ottone, che noi vedemmo in que' giorni avere presieduto al placito di Pavia.

Ad ogni modo che mal sicuro si sentisse Arrigo in queste superiori parti del regno, lo dimostra il breve soggiorno ch'egli vi fece, prima di passare in Germania. Un'altra osservazione ancora conferma una tale credenza, ed è che in quel cotanto sfoggio di nuove donazioni e di privilegi da lui concessi dopo la sua coronazione imperiale, nessun diploma non consti aver egli concesso alla chiesa di Milano, ed appena uno ne concedesse al monastero di S. Solutore in Pavia, mentre a larghe mani gli aveva profusi alle chiese della Toscana: e così pure lo scorgerci che l'arcivescovo di Milano Arnolfo, come il maggiore fra i grandi vassalli del regno, non convenisse al placito di Pavia, mentre v'accorse l'arcivescovo di Ravenna (1), serve di prova novella di quanto già si è notato, cioè che Milano aderiva ad Ardoino, e che l'arcivescovo Arnolfo, il quale pur era stato de' primi a favorire Arrigo contro Ardoino, era entrato a parte della confederazione italiana, e parteggiava in quel punto contro il dominio tedesco.

Tardava pertanto ad Arrigo di rivalicare que' monti, che poco era mancato non avesse a mai più rivedere. Epperò dopo di aver alla meglio, siccome avvisava, provveduto alla pubblica pace, o, come scrive Ditmaro « dopo di avere co' modi suoi longanimi rassermate le menti » instabili degli Italiani » (2), partiva egli da Pavia. Il dì 21 di quello

(1) Vedi il placito tenuto in Pavia addì 7 di maggio 1014, presso MURATORI, *Ant. Est.* T. I. c. XIV

(2) « Instabilem Longobardorum mentem, caritate cunctis exhibita firmavit » (TRUTH *Chron.* lib. VII. 3). — Il monaco di S. Gallo scrive ne' suoi *Annali* (DUEFFNE R. F. III. 477)

« Compositis rebus, velut aestimat, inde reversus

» Ipsius et terrae populus mox deficit a se »

stesso maggio un suo diploma ce lo fa vedere in Verona, ed un altro di quattro giorni dopo, in Liciana (1); finalmente nella Pentecoste già si trovava in Bamberg (2).

Di questa ben augurata sua impazienza di frapporre le Alpi tra esso ed un paese, che avversava lui e quelle sfrenate legioni ch'egli seco portava, un'ingenua protesta ne lasciò il vescovo Ditmaro in questa forma: « L'Imperatore, die'egli, con molta felicità, e pari gloria, superate le difficoltà alpine, arriva nelle serene nostre regioni: perciocchè il cielo d'Italia, ed i costumi degli abitatori punto non concordano colla natura nostra. Molte sono pur troppo *nella Romagna e nella Lombardia* le insidie: lieve la carità che vi si usa cogli ospiti, e quanto costoro domandano, tutto a caro prezzo loro si vende, e con frode, e molti ancora ne muoiono attossicati » (3). Ma qui il cronista che tratta con tanta severità gl'Italiani, ed il cielo d'Italia, molto si guarda dal dire, che i Tedeschi vi erano venuti non invitati dal popolo, e dal confessare quali fossero i modi usati dagli ospiti forestieri, che provocavano tali rappresaglie da' malmenati nostri padri!

Quanto poi alle *difficoltà alpine* superate da Arrigo *con gloria*, non saprei immaginare che lo scrittore intenda parlare d'altro che di aggressioni fatte forse dalle popolazioni irritate, sovra le frontiere del regno, delle quali l'imperatore trionfasse gloriosamente. Perciocchè quali altre *difficoltà* avrebbe egli superato *con gloria sua* (4)?

Del rimanente nell'addotto testo dello scrittore germanico apparisce la conferma di quanto si è detto sovra il movimento italiano in favore d'Ardoino, che doveva cominciare in Roma, e propagarsi nelle altre

(1) MURAT. *Ann.* 1014. — Liciano f. Lienc nel Ticolo?

(2) *Annal. Hildesh.* l. o.

(3) « Hic (Henricus) cum maxima prosperitate et gloria Alpinas superat difficultates, ac nostrae regionis adiit serenitates, quia aëris huius et habitatorum qualitates nostris non concordant partibus. Multae sunt proinde dolor! in Romania atque in Longobardia insidiae; cum-
« elis huc advenientibus exigua patet caritas; omne quod ibi hospites exigunt, venale est, et hoc
« eum dolo, multique toxico hic pereunt adhibito. » (THIEM. l. c.).

(4) Nell'anno 1020 l'imperatore Arrigo concesse un diploma ad Eduardo vescovo di Trento per remunerarlo de' servigi a lui resi *in quegli stessi luoghi* (FRAPPORTI, *Della St. e della Topografia del Trentino*, p. 277): io non ho veduto questo documento, e non saprei dire se i servigi resi dal vescovo si riferiscono a questo fatto: certo è che l'imperatore dopo l'anno 1014 non ebbe più a ripassare le Alpi prima del 1022, anno nel quale venne in Italia a vinse i Saracini ed i Greci che infestavano la Calabria.

province dell'Italia superiore, e che la *Romagna e la Lombardia* erano più dell'altre accese contro gli occupatori d'Italia. Ed appunto perchè era nota all'imperatore questa disposizione degli animi italiani, noi lo vedemmo affrettare la sua partenza da Roma, e quindi dalla Lombardia, mentre aveva prolungato il suo soggiorno nella Toscana ed in altre città men sospette, moltiplicando in queste i doni ed i privilegi, per impedire che da quelle due vicine provincie maggiormente non si propagasse l'incendio (1).

Ma nel porre il piede nella sua Germania ben sapeva l'imperatore qual fomite di turbolenze avesse lasciato di qua da' monti, dove quel savio principe antivedeva che il re Ardoino non penerebbe a risorgere, aiutato da molti di que' grandi medesimi che erano stati traditori di questo re in suo favore, ed ora erano apparecchiati d'abbandonare novellamente la causa sua per quella del re italiano.

Non così tosto infatti seppe Ardoino, siccome l'emulo suo aveva superato le Alpi, che unito ad Oberto ed agli altri suoi fedeli, scendeva pieno d'ira e di novelle speranze giù ne' piani lombardi (2).

Palese saggio di cotali speranze manifestava questo re agl' Italiani, ponendo sulle nuove monete ch'egli batteva, siccome io vo argomentando, appena giunto in Pavia (3) il titolo d'IMPERATOR, al quale

(1) Fra i diplomi concessi da Arrigo in questo suo ritorno in Germania è degno di particolare osservazione quello ch'egli concesse a richiesta di Aldermano vescovo di Savona *suo fedele*, agli uomini detti in quel documento *maggiori e nobili residenti nel castello di Savona*, col quale dona e conferma loro, *omnes res et proprietates a iugo maris usque ad etc. et villas libellarias etc. quae habere soliti sunt, etc.* imponendo inoltre, *ut in his prescriptis confuvis castella non hédificentur, neque aliqua superimposita a marchionibus vel a suis comitibus vel vicecomitibus praedictis hominibus fiat, scilicet de fodro, de adprehensione hominum vel saltu damorum.* Erano dunque in quella città come in Milano ed in Genova antiche società d'uomini liberi, e questa di Savona voleva Arrigo in ispecial modo favorire, per far contrapposto alla potenza de' grandi vassalli (*Hist. Pat. Mon. T. I. duenm. CCXXXVII. col. 404*).

(2) « Iterum superbiere cepit. (THIETM. Chron. VII. 3).

(3) L'imperatore Arrigo il dì 21 maggio stava a Lienz nel Tirolo: la discesa d'Ardoino in Lombardia fu dunque probabilmente negli ultimi giorni di quel mese, ed a que' giorni deesi pure assegnare la data della terza di quelle monete battute da Ardoino. Ma al proposito di questo mi si conceda a titolo, se così piace, di novella ipotesi che prima d'ora non mi si offeriva al pensiero, il dire che questa moneta che tiene il titolo d'IMPERATOR, potrebbe pur essere la prima delle tre, che fece coniare il re Ardoino, come sospettò il cavaliere di S. Quintino, ma ad ogni modo il titolo d'imperatore non vi fu posto nè per islaglio, nè per imitazione delle antiche monete Ottoniane, ma bensì perchè, secondo ci narra lo storico ANSOLFO (I. XIV), la Dieta Italiana avendo salutato CESARE quando lo innalzò al trono, e considerando egli se stesso come imperatore

la Dieta Italiana lo aveva nel 1002 inaugurato, titolo ch'egli ben sapeva dover riuscire grato a tutti coloro che avversavano la dominazione tedesca, e ch'egli avvisava con quella sua levata in armi, e mercè delle sue aderenze dentro Roma, potere violentemente conseguire.

Quindi senza dimora dava egli di mano alle armi.

Prima a provare il furore del re Ardoino fu la città di Vercelli. Ne era vescovo, tuttora, il monaco Leone, contro il quale era questo re animato di sempre maggior desiderio di vendicarsi, posciachè alle vecchie ingiurie dello avere strappato dal troppo facile Ottone III, quelle tante sentenze che gli assegnavano il comitato di quella città, che anticamente faceva parte della Marca d'Ivrea, s'aggiungevano le novelle, più acerbe ancora. Perciocchè non solo sapeva essere stato Leone fra i primi, che contro di lui avevano invocato la venuta d'Arrigo fin dall'anno 1002, ma ancora gli era noto essersi quel vescovo mostrato fra i più caldi animatori della congiura contr'esso, e del rifiuto de' patti da lui proposti ad Arrigo, mentre calato dall'Alpi moveva per la corona imperiale verso Roma. Se dal 1004 al 1014 Vercelli, come tante altre città italiane, sia stata da Ardoino taglieggiata, o manomessa, nessun documento da me veduto, me ne fa fede. Difficile tuttavia egli è a credersi che questo re per tanti anni ne lasciasse in pace il vescovo, suo capitale nemico. Forse un qualche accordo fu fermo tra essi, osservato con pari fede in que' primi anni, pieni del resto per Ardoino di tante altre cure (1). Ad ogni modo questa volta inopinata al certo fu l'aggressione del re contro Vercelli, posciachè lasciò scritto Dilmaro, che il vescovo Leone appena si potè salvare colla fuga (2). Più tardi, ma nell'anno medesimo 1014, questa presa di Vercelli, e questa fuga fruttarono all'avidissimo vescovo Leone un famoso diploma da Arrigo, col quale gli assegnò i beni di Wiberto fratello del re Ardoino, e quelli de' figliuoli di

presunto, pose nella prima sua moneta il titolo suddetto. Tutto questo non toglie la probabilità delle congetture da me espresse sovra le date delle altre due monete, cioè il ritorno del re Ardoino in Pavia nell'anno 1005, e la novella sua venuta in questa città sul fine di maggio dell'anno 1014.

(1) Avvalora questa opinione il diploma del re Ardoino pel monastero di Fruituaria, *colla data di Vercelli*, e dell'anno 1005. (Vedi Append. n. 31).

(2) « Sedatis tumultibus universis, reversus est ab Italia cesar; et Hartwigus ob hoc admodum gavisus, Vercellensem invasit civitatem, Leone eiusdem episcopo vix effugiente. » (THIETM. Chron. Lib. VII. § 3. l. c.).

Roberto da Volpiano di lui cognato, e di oltre a cenquaranta aderenti di quello. In questo diploma manca, come in molti altri di Arrigo, il giorno del mese, e porta la data di Solega, come quello fulminato dallo stesso imperatore contro gli Estensi (1). Ora siccome Ardoino ritenne Vercelli sino quasi all'ultimo de' suoi giorni, possiamo ragionevolmente argomentare, che Leone ricorresse ad Arrigo, o forse esulando si facesse a trovarlo in Germania, e colà *da quel potente parlatore ch'egli era, ed efficace operatore* (2), dipingendo all'imperatore con patetici colori la propria cacciata, le dilapidazioni commesse dalle masnade d'Ardoino in Vercelli, e l'aiuto che il marchese Oberto e gli altri Estensi avean dato a quel re, ottenesse non solo questo diploma a lui favorevole, ma l'altro già detto, contro que' principi, ed un terzo ne provocasse a favore di Pietro vescovo di Novara per rifarlo da' danni recati da Ardoino, de' quali or ora parleremo (3).

La felice occupazione di Vercelli vieppiù confortò le speranze d'Ardoino. I soccorsi di gente che dal marchese della Liguria, e dalle città, che le vessazioni germaniche avevano fatto tornare alla devozione sua, gli erano dati, la fedeltà ed il valore de' capitani subalpini, risvegliarono le perdute speranze di riprendere l'intero reame: epperò abbandonando i modi di venturiero co' quali, siccome abbiain detto, sì lungo tempo gherreggiato aveva negli anni precedenti, deliberò di recare guerra formale alle altre i cui principi aveano primi dato l'esempio del tradimento, nello accogliere l'emulo suo appena sceso dall'Alpi, sperando colla punizione di quelli intimorire gli altri, e condurli a darsi a lui a patti o a total dedizione.

Così dopo di avere provveduto Vercelli di difensori, e munita la città delle opportune bastite, volgeva Ardoino le sue bandiere all'assedio di Novara (4).

(1) In *Hist. Patr. Mon.* T. I. doc. CCXXXVIII, ed Append. numeri 36-37.

(2) « *Valde potens in sermone — Efficax in opere — Sapientiae vestitus — Septiformi podere; — Pro ecclesiis pugnavit — Animo et corpore.* » (BENZO Alb. Episc. in *Paneg. Henrici IV.* apud MENCENIUM, R. G. T. I, col. 1021).

(3) Dipl. di Arrigo imperatore dell'an. 1014 contro Ardoino, in favore della chiesa di Novara. (Append. n. 38).

(4) « *Omnem quoque hanc civitatem comprehendens, iterum superbire coepit.* » (THIETM. *Chron.* VII. § 3. l. c. p. 837). « *Arduinus iuxta posse ultionem exercet in perfidos. Siquidem postea Vercellensium urbem coepit, Novariam obsedit.* » (ARNULPHI, *Hist. Med. Lib. I. c. XVI*).

Or qui di nuovo mi tocca lamentare la mancanza degli scrittori, che di queste guerre estreme, mosse da Ardoino per l'indipendenza dell'Italia, abbiano dato esteso ragguaglio. Fra gl'Italiani il solo Arnolfo ne fa cenno, ma nulla più che cenno: pare che questo scrittore affrettandosi di giungere colle sue storie a' tempi da lui veduti, trascurasse di addentrarsi a narrare quello che era accaduto pochi anni prima, e che come egli stesso osserva, aveva udito raccontare (1), sbrigandosene con dire che l'avarizia de' principi era stata la cagione de' mali d'Italia (2).

Ma di questa fazione contro Novara accennata da questo storico, della quale ora vorremmo dare contezza, nessun altro antico storico ragiona; qualche notizia nondimeno se ne ricava dal diploma sopracennato, concesso da Arrigo a Pietro vescovo di quella città, il quale non trasandò di ricorrere anch'esso a quell'imperatore, forse a un tempo col vescovo Leone. Non senza una qualche soddisfazione trovai in questo documento la conferma delle induzioni tratte da me dalle carte pagensi (3), sulle scorrerie fatte da Ardoino circa gli anni 1007-1008 su quel di Novara, induzioni alle quali fu pure condotto il Giulini fondato su altri titoli (4), e che per analogia confermano le altre, sovra le rimanenti scorrerie da noi raccontate. Dice infatti l'imperatore nella parte descrittiva di quel documento, siccome: « Pietro suo fedele, venerabile ve- » scovo della santa chiesa di Novara, a cagione della fedeltà sua ebbe » a soffrire di molti mali, cioè: sete, fame, caldo e freddo: e come » inseguito da' nemici ebbe a fuggire, e a valicare a pie' nudi, colli e » rupi scoscese. » Tutto ciò al tempo di quelle prime incursioni, come apparisce da questo che segue: « di più anche or ora (cioè nel 1014 » data del documento) molti danni ricevette da Ardoino, il quale dava » il guasto al territorio. Imperciocchè le chiese sue furono depredate, » le bastite distrutte, ruinate le case, tagliate le vigne, scorticate le » piante: e inoltre le pievi e le curtì da Ardoino concesse in beneficio » a' nemici del vescovo » (5).

(1) « Superiori vol. audita tantum utcumque exsufflare tentavimus: nunc autem ea quae ipsi » videndo cognovimus, ex abundanti eructare studeamus. » (ARNULPHI *Hist. Lib. II. cap. I. ibid.*).

(2) ARNULPHI, *Lib. I. c. XV.*

(3) Vedi il Capitolo VIII.

(4) GIULINI, *Mem. di Milano*, P. III. p. 94.

(5) Append. u. 38.

Questi fatti, tristi, ma solite conseguenze di un assedio, dichiarano i modi barbarici con cui guerreggiava l'offeso Ardoino: modi, altronde, usati in que' tempi da tutti, ed anche dallo stesso Arrigo (1). Da' quali si può dedurre che non solo il contado, ma la città stessa di Novara cadde in mano degli assediati, come lo prova pure la nuova fuga del vescovo, per cui anch'esso si recò in Germania a supplicare l'imperatore (2). Ottenne infatti dal liberale Arrigo il comitato d'Ossola, e la restituzione della Pieve di Treccate, e della Curte di Gravellona, con tutti i diritti regali soliti a concedersi in somiglianti occasioni, acciò, dice Arrigo nel diploma: « acciò gli altri nostri fedeli, questo conoscendo, sempre » più si raffermino nella loro fedeltà verso di noi » (3). Perciocchè la fedeltà de' Grandi d'Italia era ridotta ad oro, e fedeltà chiamavano il falsare i primi giuramenti.

Da Novara cadeva Ardoino sopra Como. Ampia cagione di risentimento aveva destato nel re l'ingratitude di Pietro vescovo di questa città, il quale confermato da lui nel grado eccelso di arcicancelliere del regno, ed arricchito di molti onori, era pur stato fra' primi a volgersi ad Arrigo, e ad invitarlo al trono d'Italia (4).

Ma Pietro moriva nel 1004, prima del risorgimento d'Ardoino, che buon per lui. Gli era succeduto Everardo tedesco, ed a questo nel 1010 Alberico cappellano del re Arrigo, il quale era tuttora vescovo nel 1014 (5). Como adunque per opera del vescovo parteggiava per Arrigo: con tutto ciò siccome non difettava neppure di aderenti d'Ardoino (6), così stava a cuore a questo re di riordinarvi l'autorità sua. Di questi zelatori d'Ardoino fanno prova altri diplomi di Arrigo, dati nel 1015, i quali confiscano a pro del monastero di Sant'Abbondio in Como, e del vescovo Alberico, certi beni di Alberto da Parma, di Guiberto e Sigiberto suoi figliuoli, e quelli di Berengario ed Ugo figliuoli di un conte Sigifredo, tutti chiamati ribelli dall'imperatore (7). Ma l'oc-

(1) *Annal. Quedlinburg. an. 1013*, apud PERTZ, *M. G. H. T. V.*

(2) GIULINI, *Mem. di Milano*, P. III. p. 95.

(3) « Ut alii nostri fideles hoc cognoscentes, nostrae fidelitati amplius stabiliantur. » (*Dipl. Henrici* in Append. n. 38).

(4) V. ne' Capitoli precedenti.

(5) ROVELLI, *Stor. di Como*, Ep. IX. capo II. pag. 99 e seg.

(6) ROVELLI, *ibid.* p. 83.

(7) Append. nn. 39 e 40.

occupazione di Como per l'armi del re Ardoino non fu che momentanea: nel settembre di quell'anno medesimo le carte comasche portano di nuovo gli anni dell'imperatore (1). Altre cure ed altre spedizioni meditava Ardoino, e da Arnolfo storico sappiamo che oltre Vercelli, Novara e Como, altri luoghi a lui contrari provarono le sue vendette (2). Quali fossero queste città o terre non risulta, ma forse non andremo lungi dal vero, supponendo che contro quelle possedute dal ricco Bonifacio marchese, figliuolo di Tedaldo, egli movesse le sue legioni.

Qui noteremo novellamente l'insussistenza della notizia, che sulla fede di Gualvano Fiamma fu spacciata dal Sigonio, e ripetuta da molti scrittori, sovra i guasti recati da Ardoino a quel di Milano in questo tempo, ragione che furono, secondo essi, dell'ultima di lui caduta (3). Notizia chiarita falsa dal Muratori (4), e che il Ginlini mi somministra il modo di dimostrare falsissima.

Già siamo venuti qua e là annotando siccome dopo l'incendio di Pavia, Arnolfo arcivescovo di Milano disgustato anch'egli come gran parte degli Italiani dalla barbarie dell'atto, lasciava bensì per timore di Arrigo, che le pubbliche carte di questa città venissero intitolate al re germanico, ma che in segreto egli stesso co' Milanesi pendeva pel re italiano (5). Infatti quest'arcivescovo da nessuno degli storici viene ricordato fra i Grandi d'Italia che si fecero ad incontrare il re Arrigo quando scendeva dall'Alpi nel 1013 per ricevere l'imperiale corona, nè, come già si è fatto osservare, quando tornava dalla coronazione imperiale, dopo la sventata sommossa di Roma. Certamente il cauto Arnolfo non si mostrava aperto nemico dell'imperatore, ma persuaso che appena avrebbe questi ripassato le Alpi, sarebbe Ardoino per trovare nelle popolazioni malmenate dall'occupazione tedesca, novello appoggio, e certo modo di ripigliare l'autorità sua, governavasi in guisa di non insospettire Arrigo: ma d'accordo col re italiano disponeva intanto chetamente gli animi de' Milanesi a secondarlo. Forse non era di ciò ignaro l'imperatore Arrigo (6), ma non volendo o non potendo contro esso l'arcive-

(1) ROVELLI, l. c. p. 83.

(2) « Multaque alia demolitus est loca sibi contraria. » (ARNOLFI, *Med. Hist. Lib. I. c. XVI. l. c.*).

(3) SIGONIO, *De Regno Ital.* Lib. VIII. col. 478.

(4) *Annali d'Italia 1015.*

(5) Vedi Capitolo VIII.

(6) GILINI, *Mem. di Milano*, P. III p. 93

scovo mostrarsi irritato, per la temenza di suscitare in quella vasta città tumulti che non sarebbero per riuscire che noccevoli alla sua potenza, stava contento a tenere in soggezione Milano colla presenza di frequenti messi regi, i quali, come si vuol credere, lo ragguagliavano di quello vi accadeva. Nel che apparisce sempre più quanto alla prudenza sapesse Arrigo far concordare i provvedimenti di una fine politica (1). Questi provvedimenti provano dunque che poco buona armonia passasse tra il re Arrigo e l'arcivescovo Arnolfo in quegli anni. Ma prova maggiore del disaccordo loro nel 1014, deduce anch'esso il Giulini dal non isorgere intervenuto questo arcivescovo al placito tenuto in Pavia alla presenza di Arrigo imperatore in tal anno, mentre vi fu presente l'arcivescovo di Ravenna, che meno titoli aveva per questo (2). Similmente ancora tal cosa deduce lo stesso scrittore dalla donazione fatta in quell'anno medesimo da Arrigo a Pietro vescovo di Novara (3) della Pieve di Trecate, la quale era propria della chiesa di Milano per dono fattogliene da Corrado marchese, uno de' tre figliuoli del re Berengario II (4), donazione fatta forse da quell'imperatore a Pietro, per punire l'arcivescovo della sua parzialità per Ardoino.

Finalmente supera ogni altra prova dell'accordo segreto che passava tra il re Ardoino e l'arcivescovo, lo scorgersi che in un diploma dell'anno MXIV nel mese di luglio, quest'arcivescovo non conta più gli anni di Arrigo, soliti a notarsi da esso sino al tempo dell'ultima partenza dell'imperatore, ma quelli soli dell'era cristiana e del proprio suo pontificato (5).

Stabilita in tal guisa la tacita aderenza di questo arcivescovo alla parte d'Ardoino, maggior peso acquista, per arguire di falsità la notizia data dal Fiamma e quindi dal Sigonio, l'argomento tratto dal silenzio dello storico Arnolfo sulla supposta aggressione di Milano per parte del re Ardoino, il quale non avendo nessun motivo di disgusto nè verso quella città, nè verso il suo arcivescovo, nè verso il suo conte, ove tratto da barbarico furore fosse caduto in quell'eccesso, lo storico suddetto non

(1) Il GIULINI nomina *Anastasius qui et Amizo*, ed *Adelardus*, come messi regi di Arrigo negli anni 1009-1010. (*Mem. di Mil.* P. III. p. 75-77).

(2) GIULINI, l. c. p. 92-93.

(3) Append. n. 38.

(4) GIULINI, l. c. p. 96.

(5) « Anno Dominicæ Inc. millesimo quattordicesimo, Pontificatus Domini Arnulphi Archiepi septimo » decimo, mense Iulio, Ind. duodecima. » (*Charta Mouri S. Mariæ in Valle* presso il GIULINI, l. c. p. 99).

solo l'avrebbe lasciato scritto, come narrò delle aggressioni di Verelli, di Novara e di Como, ma di certo non avrebbe chiamato col dovuto nome di *perfidi*, siccome fece, i traditori del re Ardoino. Or dunque, signore di una ricca parte del reame, ed alla testa di numerose legioni, non più come nel 1002 guidate da principi traditori, ma da que' capitani, che la sentenza già citata dell'imperatore Arrigo ci dimostra fino all'estremo fedeli al re italiano, aiutato da principi Estensi nemici implacabili della dominazione tedesca, e da molti Italiani de' quali altre sentenze d'Arrigo ci danno ragguaglio, fatto amico del possente arcivescovo Arnolfo, scorgeva Ardoino ad una ad una le città del suo regno tornare alla devozione sua, mentre all'opposto l'emulo Arrigo andava di giorno in giorno perdendo presso gl'Italiani quel prestigio d'autorità che il grado imperiale gli aveva procacciato.

Ma il Cielo aveva segnato il termine de' trionfi d'Ardoino.

Quali cause mutassero la sua fortuna, come in un baleno perdesse il frutto de' suoi trionfi, da nessuno degli storici contemporanei viene bastantemente spiegato. Le poche notizie che ci tramandarono, involte di reticenze, e male d'accordo tra loro, non bastano a chiarire questa catastrofe, strana ed inattesa, come ogni altro fatto dell'infelice Ardoino. Faremo dunque sovra di ciò qualche ricerca.

La relazione del cronista germanico è questa: « Ardoino (dice Dittmaro) re soltanto di nome, perduta la città di Verelli, ch'egli, cacciato il vescovo Leone, aveva a lungo (1) ingiustamente tenuta, cade ammalato: e perciò radendosi la barba (2), si fa monaco, e morto il terzo dì delle calende di novembre, viene sepolto nel monastero » (3).

Le stesse cose e colle medesime parole narra pure l'Annalista Sassone (4).

Tra gl'Italiani il solo storico Arnolfo dopo di avere enumerate le nuove conquiste del re Ardoino, ne narra brevemente la caduta in

(1) *A lungo*, cioè dal principio di giugno al settembre di quell'anno 1014 (vedi le note (3) alla pag. 296 e (4) alla pag. 308).

(2) Allora tutti portavano la barba, meno i monaci.

(3) « Hardwigus, nomine tantum rex, perdita urbe Vercellensi, quam diu expulso Leone episcopo iniuste possedit, infirmatur, et radens barbam monachus est effectus, terciæque kalendas novembris obiit, sepultus in monasterio. » (THIETM. Chron. (an. 1014-1015) Lib. VII 17. l. c.).

(4) *Annal. Saxo ad ann. apud ECCARDUM, Corpus Hist. M. Ae. T. I.*

questa forma: « Da ultimo, spossato dalla fatica e dalla malattia, privo » del regno, si contenta del solo monastero detto Frutteria (Fruttuaria): » quivi deposte le insegne reali sopra l'altare, e vestito l'abito di povero, » more in pace a suo tempo » (1).

Queste due narrazioni van d'accordo soltanto nel dire che Ardoino cadde infermo e morì in un monastero: ma nè in quella d'Arnolfo si parla della perdita di Vercelli, che il cronista germanico ci presenta quasi come la causa della caduta d'Ardoino, nè questo scrittore fa motto della rinuncia del re italiano, che Arnolfo ci viene indicando, col dire che esso *si riservò il solo monastero di Fruttuaria*, e che vi depose egli stesso volontariamente nella chiesa le regie divise.

Che Arnolfo, scrittore milanese, il quale una trentina d'anni dopo questi fatti, scriveva su di essi le ancor fresche tradizioni popolari (2), fosse meglio informato che non Ditmaro scrittore tedesco, lontano ed appassionato, non può esser dubbio: inoltre in quella stessa guisa che questo storico s'ingannò nell'assegnare al terzo dì delle calende di novembre la morte del re Ardoino, che dal Necrologio Divionense abbiamo essere occorsa il diciannovesimo di quelle di gennaio (3), potremo pur dubitare ch'egli abbia preso abbagli nel rimanente.

Tuttavia mi trattiene dal rigettare del tutto la versione di Ditmaro sopra Vercelli, la testimonianza di un altro scrittore, per verità posteriore ad esso di una sessantina d'anni, ma informatissimo. Questi, già da noi più volte citato, è Benzone pseudo-vescovo d'Alba, panegirista sperticato e stomachevole d'Arrigo III imperatore, e di quanti a' suoi tempi seguivano, od avevano per lo avanti segnito la parte tedesca, il quale nel ricordare le lodi di Leone vescovo di Vercelli, dice fra l'altre cose che *esso aveva privato Ardoino della corona* (4).

(1) « Ad ultimum labore confectus et morbo, privatus regno, solo contentus est monasterio. » nomine Fructeria, ibique depositis regalibus super altare, sumtoque habitu paupere, suo deinde movit in tempore. » (ARNOLPHI, *Hist.* l. c. Lib. I. c. XVI).

(2) « Superiori volumine audita tantum utcumque exsufflare tentavimus. » (Ibid. Lib. II c. I).

(3) Apud MABILLON, *Ann. O. S. B. T.* IV. p. 217. Per quanto poco importante sia questa notizia sopra il dì preciso della morte di Ardoino, potremo credere che meglio di Ditmaro ne fosse informato chi la registrò nel necrologio del monastero di Dijon, dove stava abbate S. Guglielmo figliuolo di Perinza sorella del re Ardoino.

(4) « Nostra quidem sub aetate — Fuisset gemma praesulum — Leo ille Vercellensis — Ornans totum saeculum — In quo fratres mirabantur — Ut vultus ad speculum. — Valde potens in

Leone fu al certo il più costante ed acerbo nemico di questo re, e più volte abbiamo avuto luogo di ricordare le cabale ed i raggiri da lui posti in campo per ingoiarne le possessioni, prima della coronazione d'Ardoino, e quindi le congiure delle quali fu sempre il più animoso promotore: ma come in ispecial modo fosse cagione della caduta d'Ardoino, nè Benzone, nè altro scrittore non lo lasciò scritto, e ci conviene indovinarlo.

Era costui uomo d'alto affare, di molto seguito, e di non minore autorità presso i Grandi suoi pari; potentissimo poi per le infinite donazioni ottenute e per le rapinate sostanze, come da vari suoi contemporanei raccolsero il Mabillone e il Muratori (1). Non sarà dunque cosa contraria a questi dati, il dedurre che mentre Ardoino stava intento a guerreggiare, ed a riprendere colla forza le sue città del reame, il vescovo Leone trovasse modo di ordire nella città di Vercelli, occupata dalle genti d'Ardoino, una qualche segreta trama, o coll'introdursi egli stesso di celato nella città, o per mezzo de' propri aderenti, e che coll'oro suo, colle sue promesse, per sorpresa, per violenza o per tradimento facesse ricadere quella città nelle mani degl'imperiali.

Ammissa colla scorta di Benzone la perdita di Vercelli, la quale sebbene non espressa da Arnolfo, si può tenere come indicata da questo storico, là dove dice che Ardoino restò *privo del regno*, la rimanente relazione di lui diviene chiara e naturalissima, più che non sia quella del cronista Ditmaro.

Perciocchè egli è evidente che Ardoino irritato pel tradimento che gli faceva perdere Vercelli, ed oppresso, come dice Arnolfo, dalle continue fatiche, cadendo ammalato, fu costretto cessar dal combattere. Per questo scorati i suoi, e rinfraucati gli avversari, tutte le conquiste da lui fatte, ricaddero nelle mani de' traditori (2), con prestezza eguale a quella con cui egli le aveva testè eseguite. Fattosi allora recare, ammalato, al suo monastero di Fruttuaria, deliberò di cedere con volontaria

« sermone — Efficax in opere, — Sapientiae vestitus — Septiformi potere — Pro ecclesiis pugnavit — Animo et corpore. — Ardoinum qui se regem — Dicebat in gentibus — Demale privavit — Sparronistis flentibus. » (BENZONI *Albens. Ep. Panegyric. Henr. III. Imp.*, ap. MENGONIUM R. G. S. T. I. col. 1021).

(1) Vedi i Capitoli II e III di questi Studi.

(2) *Perfidi* sono chiamati da ARNOLFO i grandi vassalli del regno, tante volte spregiuri: « Ardoinus » iuxta posse ultionem exercet in perfidos. » (Loc. cit.).

rinunzia i suoi diritti a quella corona d'Italia, che il male che lo gravava impedivagli di conservare coll'armi. Deposte perciò le insegne regali sovra l'altare della sua chiesa, rifiutò il regno, e vestì l'abito di S. Benedetto. Tutto questo è, se così si vuole, un' amplificazione delle poche parole di Arnolfo, ma essa è talmente conforme alla ragione de' fatti, ed alla condizione di que' tempi, ch'io non penso possa venire contraddetta in verun modo, o giudicata ipotetica.

Così dunque finiva Ardoino.

Qui di nuovo gli scrittori seicentisti, ripigliando le solite iperboli, favoleggiarono a piacer loro sovra la santità e sovra le virtù d'Ardoino, del quale (per aver campo maggiore a narrarne i miracoli) prolungarono la vita nel monastero, sino all'anno 1018, quando è cosa notissima, ch'essa, siccome vedemmo, non oltrepassò il 14 di dicembre del 1015. Tuttavia non fu tanto breve la penitenza imposta a se stesso da quell'infelice, posciachè la rinuncia ebbe luogo nel settembre dell'anno precedente, siccome ricaviam dal Giulini (1).

Forse oltre al pensiero di servire all'andazzo de' tempi, vestendo moribondo la tonaca monacale, corse in mente ad Ardoino la sentenza del concilio romano che lo condannava a farsi monaco per l'uccisione appostagli di Pietro vescovo di Vercelli (2), e volle attutare i propri rimorsi passando penitente gli ultimi suoi giorni.

(1) Vedi la nota (1) alla pag. 307.

(2) Append. n. 13.

CAPITOLO XII.

CONSEGUENZE DELLA MORTE D'ARDOINO.

VENDETTE DE' TEDESCHI. PRIGIONIE, CONFISCHE, ESIGLI.

ORIGINE DELL'ORDINE DEGLI UMILIATI E BREVE SUNTO

DELLA STORIA LORO.

Ma appena fu nota la malattia e la rinuncia del re Ardoino, non fu tardo l'arcivescovo di Milano a provvedere alle cose sue, per modo che non gli si potesse dall'imperatore cogliere cagione de' modi tenuti verso il di lui rivale. Diffatto le carte milanesi che, come si è detto, più non segnavano in luglio gli anni di Arrigo, nello avvicinarsi del settembre, tempo nel quale si può supporre accaduto l'ammalamento di Ardoino, di nuovo recano gli anni di quell'imperatore (1). Pur non contento a questo, l'arcivescovo Arnolfo volendo a un tempo rendersi meritevole presso Arrigo, e arricchire se stesso procacciando novelli acquisti alla sua chiesa, raccolte alcune sue masnade, corse ad invadere i beni di Berengario e d'Ugone figliuoli di Sigefredo conte di Seprio, dichiarati ribelli dall'imperatore come aderenti d'Ardoino (2). Dalle quali cose novelle prove abbiamo dell'aderenza di quest'arcivescovo e de' Milanesi alla causa d'Ardoino ne' tempi anteriori al settembre di quell'anno.

Questa novella mutazione di parte era certamente indicata dalla politica all'arcivescovo Arnolfo, tuttavia la facilità con cui vi si abbandonava, novellamente ci palesa quale e quanta esser dovesse la corruzione de' Grandi in quell'età, la quale comportava che non solo i principi secolari, ma gli ecclesiastici ancora, e fra questi quelli che godevano fama di più riputati in fatto di dottrina e di zelo, cadessero in eccessi cotanto stomachevoli di versatilità e d'avarizia, e quanta quindi dovesse essere la forza dell'esempio nelle soggette popolazioni.

(1) GIULINI I. c. p. 103.

(2) GIULINI I. c. p. 110-111-112.

Ma oggimai era giunto il tempo delle vendette tedesche: le proscrizioni, le confische non fallirono all'avarizia de' principi, che si erano mostrati, o prima o poi, favorevoli all'imperatore germanico, e che speravano ricco bottino su' beni de' condannati.

A questo tempo, cioè verso il settembre dell'anno 1014 (1), deono riferirsi le sentenze di Arrigo, già da me ricordate più volte, ed i diplomi dati in quell'anno medesimo a favore di Leone vescovo di Vercelli, e di Pietro vescovo di Novara contro i congiunti ed i molti Subalpini segnaci del re italiano: ancora a questo tempo riferiremo la cattura di que' marchesi longobardi, cioè Italiani che sono rammentati dal cronista Novaliciense (2), fra' quali alcuni sono nominati dallo storico Arnolfo, cioè: Ugo, Azzo, Adalberto ed Opizone (3); tre di essi già chiariti come autori della sommossa romana da noi recitata.

Ma convien badare circa la presa di questi marchesi, che Arnolfo ne favella soltanto sommariamente ed alla rinfusa, quasichè gli Estensi fossero stati presi tutti ad un colpo quando la cosa andò altrimenti. In fatti abbiam veduto in Ditmaro siccome due di quelli nominati da Arnolfo, cioè Azzo od Attone, ed Adalberto, erano stati sostenuti prigionieri dopo spenta la sommossa di Roma, ed uno si era salvato colla fuga (4): ragion vuole adunque se ne conchiuda, che caduto Ardoino, gli altri Estensi fossero colti negli agguati che tese loro l'imperatore (5), e così fosse compiuta l'importante cattura de' più zelanti ed accesi nemici della dominazione germanica.

Presi costoro e morto Ardoino, la mancanza di un capo disordinò del tutto l'esercito degli Italiani, nè fu difficile alle genti di Arrigo congiunte co' principi che aveano tradito la causa italiana, di sperperarlo. Questa rotta portò il terrore in tutte le provincie, memori di qual peso fossero le vendette dell'imperatore. Tutto il reame fu preso di grandissimo spavento, perciocchè, scrive Arnolfo, la persecuzione fu tale, che chiunque

(1) GIULINI l. c. p. 106-107-108.

(2) *Chron. Novalic.* Lib. V. cap. XXXVII in *H. P. Monum.* T. V.

(3) « Qualiter (Henricus) Marchiones Italiae quatuor Ugonem, Azonem, Adelbertum et Opizonem captione una constrinxerit. » (*ARNOLFI* Lib. I c. XVIII).

(4) *THIETM. Chron.* l. c.

(5) « Marchiones autem Italici regni calliditate sua capiens et in custodia ponens etc » (*Chron. Noval.* Lib. V. in fine).

fosse chiarito d'aver parteggiato pel re italiano, era costretto a fuggire, od a far dedizione (1).

La punizione del marchese Oberto e degli altri individui della sua famiglia aveva necessariamente tratto con se quella de' Milanesi e de' Liguri dipendenti da quel ricchissimo principe (2), e sebbene gli Estensi fossero tosto riammessi nella grazia d'Arrigo, e ridonati di una parte de' loro beni (3), tuttavia non si vuol credere che lo stesso favore ottenessero gli altri condannati Insubri, a' quali, siccome stiam per narrare, toccarono ben altre sorti prima di rivedere il cielo d'Italia. A codesti conviene aggiungere molti cittadini di Como, specialmente da Tristano Calchi nominati come parteggiatori d'Ardoino, e per questo dall'imperatore puniti coll'esilio e colla confisca (4). Nè andremo errati, m'è avviso, arrogando ancora al numero di tanti tapinelli, que' molti popolani subalpini che seguitavano que' cenquaranta capitani del re Ardoino nominati nel diploma dato da Arrigo in quell'anno alla chiesa di Vercelli, da noi sopra indicato (5): come pure i numerosi aderenti che Ardoino teneva nella tormentata Pavia, e nella città di Milano, e quegli altri infiniti che certamente a lui avevano mandato quelle altre città del reame, contro le quali non si sa ch'egli avesse negli anni addietro volto le sue vendette.

Ora dunque dalla qualità e dal numero di queste sentenze, dall'universale terrore delle vendette d'Arrigo, che al dir d'Arnolfo si sparse per tutta l'Italia, novella prova trarremo del seguito avuto da Ardoino, e della popolarità della causa che esso rappresentava.

Ma le fazioni di guerra allora operate, i fatti di disperato valore, di onorata baldanza, di generosa resistenza, co' quali gl' Italiani s'opposero all'impeto del re forestiero, non furono registrati dalla Storia, e rimarranno mai sempre ignorati, ma certi. Quella stessa material forza che rese inutili que' virtuosi conati, costrinse pure al silenzio gli scrittori de' vinti.

(1) « In fortitudine eius omnis terra contremuit, usque adeo ut si qui reperti fuerint Ardoini »
» favisse partibus, aut fugerent, aut deditionem facerent. » (ARNULF. l. c. Lib. I. c. XVIII).

(2) TIRABOSCHI, *Humiliator. Vetera Mon.* T. I. Dissert. I. § XIII. p. 16).

(3) MURAT. *Ant. Est.* l. c.

(4) « Caeterique rebellionis populares, in quibus non pauci, Mediolano, Comoque oriundi fuere, »
» in Germaniam relegantur. » (TRIST. CALCHI, *Hist. Mediol.* Lib. VI. p. 122).

(5) Append. n. 37.

Ma se le voci di proscrizione e d'esiglio suonano dure ed acerbe a' giorni nostri, ne' quali i popoli inciviliti facilmente si piegano ad accogliere con umani e pietosi modi chiunque per le politiche commozioni spinto dalla patria va tapinando per terre lontane, ma dove le arti, le scienze, la mercatura aprono vasto campo all'ingegno dell'uomo, come più dure e più acerbe suonar non dovettero in que' rozzi tempi a quegli infelici, confinati sovra incognite terre, dove il nome d'Italiano, noi vedemmo in Ditnaro in qual conto fosse tenuto, dove alla nativa rustichezza degli ospiti, l'odio aggiungendosi, che la qualità di ribelli dell'imperatore suscitava contr'essi, erano gl'indigeni stranati dall'esercizio di quelle ospitali virtù che Tacito assegna a' popoli della Germania! Colà la mancanza degli ospizi, universale in quell'età, dovette spingere di continuo quegli esuli ad aver ricorso a' monasteri, frequenti nella Germania, solito rifugio in allora de' viaggiatori e degl'infelici, a' quali tutti il sublime istituto di S. Benedetto comandava di provvedere.

Forse così nasceva in que' proscritti il primo pensiero di riunirsi anch'essi sotto una legge severa, santa e laboriosa, la quale accomunando fra loro ogni disagio ed ogni conforto, con vincolo novello di religione gli uni agli altri astringesse, e li consolasse a vicenda. A questo pietoso pensiero univasi quel desiderio di rivedere la patria, sempre intenso in chiunque ne è forzatamente lontano, intensissimo poi in quegli esuli, che sospettati di meditar nuove sommosse, erano condannati a non più rivederla (1).

Deliberavano pertanto d'abbracciare un modo di vita modesto e pio, il quale mentre li verrebbe a porre in grado di sopperire col lavoro a' loro bisogni, torrebbe pur anche di mezzo ogni sospetto, che aver potesse l'imperatore sovra i loro ulteriori disegni, e forse lo piegherebbe un giorno a conceder ad essi il sospirato ritorno alla patria.

Deposti in prima gli abiti di lusso, ed ogni altro prezioso ornamento, presero i confinati un vestire conforme all'umiltà di vita che abbracciar divisavano. Una lunga tonaca di panno grossolano e di colore ci-

(1) Molto si è disputato fra' dotti sovra la data della fondazione dell'ordine degli Umiliati, che altri a' tempi di Corrado il Salico, altri a quelli di Federigo Barbarossa volle attribuire. Noi seguimmo il Tiraboschi, il quale provò irrefragabilmente colla testimonianza di molti documenti, che essa ebbe luogo nel MXIV. (TIRABOSCHI, *Humiliatorum Vetera Monumenta*, 3 vol. in-4; Milano, 1766, T. I, Dissert. 1. pag. 1-25).

nerizio, stretta da una fine attorno a' fianchi, ed un berrettaccio del medesimo drappo, tagliato in forma di lungo cono, che giù piegato cadeva su l'unno de' fianchi, formava tutto il corredo della persona (1).

Erano pari i costumi all'umile vestire. Proponimento loro, tuttavia non legato con voti, era *coll'ainto di Dio custodire l'umiltà del cuore e la mansuetudine de' costumi* (2). Però emendati volonterosamente i corrotti modi, convenivano in pietosi colloquii, mostrando colle parole, cogli atti, colle abitudini, l'umile desiderio che custodivano nel cuore.

Spregiando quindi, come ogni vizio, così tutti gli agi, e le reliquie di quelle dolcezze cui prima molti di essi erano stati avvezzi, stavano contenti ad un mediocre vitto, e questo colle lor mani lavorando, soprattutto ne' lanifici, si procacciavano: col soprappiù soccorrevano a' poverelli.

Davano a codesta pietosa associazione il nome di Convegno o Parlamento (3), nomi l'unno e l'altro appropriati: perciocchè sebbene ognuno di quegli esuli se ne vivesse da se, o colla famiglia, o colla moglie nel suo privato abituro, soleva ognidì co' suoi *convenire* in luogo a ciò deputato, dove co' fratelli d'esiglio attendeva a' lavori, a' colloquii, alle preghiere ed alle altre opere sovradescritte. E tutto ciò facevano con tutta semplicità di modi, e con purezza di mente, ma con acceso irremovibile intendimento di ottenere il ritorno in Italia: ed affinché più salda, più immediata mai sempre rimanesse questa proposta, avevano fermo tra di loro, che negli spessi colloquii dovessero ogni volta confortarsi a vicenda ne' loro proponimenti, colla speranza di rivedere la patria (4).

Queste cose ordinavano que' proscritti nel MXVII, dopo tre anni passati fra gli stenti e il crepacuore, romeando di curte in curte, di città in città, di monastero in monastero. La nuova vita di questi confinati, così spontaneamente modesta, semplice ed abbietta, scevra bensì

(1) Cfr. *Humiliat. Vet. Mon.* T. I. Diss. I § XX. p. 24. — Trist. CALCHI, *Hist. Mediolani*. Lib. VI. p. 123.

(2) « Humilitatem cordis, et mansuetudinem in moribus iuvante Domino custodire. » (In *Legib. Humiliat.* ap. TIRABOSCHI op. cit. T. I. p. 61).

(3) « Hinc aedes huiusmodi Convonia aut Parlatoria barbaris vocabulis appellatae. » (TIRAB. l. c. T. I. p. 57).

(4) « Esto quod daretur facultas ad propria redeundi. » (BOSSI *Chron.* ap. TIRAB. l. c. T. I. p. 24).

d'ogni mondano conforto, ma serena per virtù, e di lavori e di speranze ricolma, commosse alfine gli animi nel popolo: sì che la pietà per essi suonò, sebben tarda, in tutti i cuori, come le lodi ne corsero di bocca in bocca. E queste giunsero nell'aula imperiale (1). Udivale Arrigo, il quale deliberando chiarirsi cogli occhi propri, se vere e pure, o se simulate o torbide fossero quelle virtù, che a' codesti suoi nemici attribuivansi, comandò si conducessero alla presenza sua. Ma come ne ebbe veduto l'abito dimesso, il mesto contegno e l'umiltà de' modi, così disse loro meravigliando: « Venite pure a me, Umiliati carissimi; vi » siete voi fatti veramente religiosi, come lo accenna l'abito che vestite? » Ed essi a lui: « Voi lo vedete, o Signore! » Allora, segue il cronista, concesse loro di ricondursi in patria (2).

Dalla parola Umiliati detta dall'imperatore, non già per vizzo o per consolare que' tapinelli dalle pene patite, come volle il Tiraboschi, ma sì piuttosto per rinfacciar loro l'antica baldanza, come notò uno scrittore francese (3), da quella parola altri potrebbe dedurne, che fin da que' primi tempi i profughi del Couvegno avessero preso il nome d'Umiliati. Ma ciò non è; codesta appellazione non fu data loro che assai più tardi, e dopochè essi ebbero pigliato regole e forme di congregazione monastica, che allora non professavano (4). Tristano Calco poi ci porge una maggior prova di questo, col dirci siccome tornati finalmente in patria, ebbero da' Milanesi in prima il nome di *Berrettani*, dal lungo berretto che usavano: e che quindi la costanza de' loro proponimenti, che li ren-

(1) Trist. CALCHI I. c.

(2) « Cum hoc Imperator sensisset, ad se cum habitu sumpto illos vocat, et admirans inquit: » accedito clarissimi Humiliati: en religioni dediti estis ut monstrat habitus vester? Cui respondunt: Sicut vides Imperator! — Et tunc Patriam concessit. » (*Chron. Ordin. Humiliatorum*, apud TIRABOSCHI op. cit. T. III. p. 230).

(3) *Hist. des Ordres religieux*, en huit volumes, par le P. H. ELLIOT, cordelier, T. VI. Chapitre XIX, ap. TIRAB. ibid. p. 10 e 12. — Vuolsi tuttavia aggiungere quello che Maren Bossio nella sua *Cronaca dell'Ordine degli Umiliati* narra essere stato detto dall'imperatore Arrigo allorchè concesse a quegli esuli il ritorno in Italia: « Simulatum atque conditio velatum votum hoc » debet esso (ait imperator): certo crediderim si liberum vobis ad Lares proprios daretur iter, » animum vestesque mutaretis. At illi (segue il cronista)..... e contra dixerunt: Serenissime » Imperator, ita ut vidisti, stat nostra sententia; quia licet homines fallantur, ipse Deus falli non » potest. Imperator igitur elevata manu super illorum capita, signoque crucis facto: Ite, » quo vultis, inquit, vere Humiliati etc. » (TIRAB. ibid.).

(4) TIRAB. op. cit. Diss. II. § XXVI.

deva saldi contro ogni maniera d'assalti della superbia, meritò loro più tardi l'altro nome d'*Umiliati* (1).

Tali furono le sorti de' confinati Italiani, tale l'origine di una società religiosa, che vuol esserc dall'altre distinta onde più tardi fu inondata l'Italia, pe' frutti ch'ella produsse propagando esempi di cristiana carità e di credenza sincera, dottrine di civiltà e di progresso, insegnando alle popolazioni arti utili e liberali, sorgenti che furono di ricchezza e d'indipendenza alle Italiane Repubbliche.

Così quello scopo, che stava in cima d'ogni loro desiderio agli esuli Insubri fondatori del *Convegno*, quell'indipendenza per cui avevano essi invano versato il sangue sotto Ardoino, e finalmente incontrato l'esilio, diveniva più tardi, coll'opera de' loro successori, la ricompensa della pietà e del lavoro.

Ma la sorte delle umane istituzioni è circoscritta, e tende coll'andare degli anni a corruzione e rovina. Toccherò brevemente di quella degli Umiliati.

Favorirono dapprima i tempi agitati una pietosa istituzione, che apriva un asilo di pace a' tormentati seguaci del re Ardoino, ed a chiunque fosse battuto dalle sventure: dove quindi non legato da' voti che lo distogliessero dagli uffici di cittadino, di marito e di padre, l'uomo del medio evo avvezzo ad una vita operosa, trovava nelle manuali fatiche un'immagine dell'agitazione passata, ed una salutare espiazione delle proprie colpe.

Crebbe pertanto e fiorì per più d'un secolo quell'utile *Convegno*, seguendo sempre le primitive sue leggi che punto non sentivano di chiostro. Lo zelo quindi di maggior perfezione, e la tendenza monacale di quelle età indussero nuove forme. Nel 1136 s'aggiunse al primo ceto, quello de' fratelli claustrali, e poco poi verso il 1140 l'altro de' sacerdoti (2): così fu mutata la prima istituzione, non dirò se in bene od in male. Certo, che non molto tempo dopo, e mentre sedeva sommo pontefice Innocenzo III (1198-1216) furono i tre ceti accusati come turbolenti, inquieti e divisi tra di loro, e come intinti d'alcuna delle

(1) Trist. CALCHI I. c. — « Solum anno MCCXI in Girardi Cardinalis legati literis ad Humiliatos » datis XII kal. maias, nominatur Religio quae Humiliatorum appellatur. » (TIRAB. I. c. Dissert. II. § XXVI).

(2) TIRAB. I. c. Diss. II. §§ XXII. XXIII. XXIV et XXXIII.

eresie de' Cattari, de' Paterini, o de' Poveri di Lione (1). Allora soltanto, emendati gli errori introdottisi, un codice di statuti formato sovra le diverse leggi, che loro aveano servito di regola, fu dal papa approvato, come furono approvati i tre Ordini ne' quali era stato diviso il Convegno (2).

Fondamento principalissimo dell'istituto era, che gli Umiliati campar dovessero coll'opera delle proprie mani, specialmente coll'industria de' lanifici (3): fattisi pertanto sperti, e riputatissimi nell'arte della lana, inestimabili furono i vantaggi che in que' fervidi tempi ne colsero i Comuni d'Italia. Molte case d'Umiliati furono fondate in tutta la penisola italiana, e dalle storie di Firenze è noto siccome ad una di esse andò questa città debitrice che l'arte della lana vi si propagasse, e molto fondamento divenisse della ricchezza e della potenza di quella Repubblica (4).

E beati que' Fraticelli, se contenti alla semplicità primitiva, mai non avessero trascurato la laboriosa industria loro, per impigliarsi ne' mondani negozi! Ma come ebbero preso a badare a' banchi, a' pedaggi, com'ebbero volto le cure all'altre pubbliche incumbenze, che loro erano state a titolo di premio attribuite, come si videro dalle città italiane onorati d'esenzioni, di privilegi; il desiderio di godere delle adunate ricchezze non solo fece loro abbandonare l'arte antica e benefica, ma traboccolli in un mare di stravizi, di disordini, di delitti, e finalmente in totale rovina.

Invano a porre un qualche freno alla crescente baldanza, ed alle loro già inveterate brutture, dopo la metà del secolo XVI affidava Pio IV S. P. il protettorato dell'Ordine a Carlo Borromeo, cardinale di S. Chiesa ed arcivescovo di Milano, il quale dapprima con miti esortazioni, poi con severi provvedimenti pigliava a ricondurre a miglior via quegli indegni successori degli esuli Italiani (5).

(1) Ibid. Diss. III. § III. — GIULINI, *Mem. di Milano*, P. VII. p. 25.

(2) Ibid. Diss. III. § VI.

(3) « Nos itaque attendentes quod ipsi Fratres ad ecclesiam S. Donati ad Turrim — exercere non possint commode artem suam, videlicet lanificium, texere pannos, ac vendere, ac alia operari, ex quibus possent percipere alimenta, cum de labore manuum suarum vivant non petentes elemosinas, sed dantes eas indigentibus affluenter; pro eo quod etc. » (*Epist. Joannis Epì Florentini*, 3 id. sept. Ind. IX, an. 1251, apud UGHEL. *Ital. Sacr.* T. III. col. 122).

(4) Tirab. I. c. T. II. Diss. VII. Pars alt. §§ LXX. LXXI et seq.

(5) Ibid. T. I. Diss. VIII. §§ V. VI et VII.

Ma come non le preghiere ed i consigli, così non fruttarono i rigori del santo vescovo all'emendazione di que' tristi. Avvezzi i preposti dell'Ordine ad un modo di vita al tutto profano e libero, e imbalanziti per quelle ricchezze, che a loro talento maneggiavano e profondevano, poco dapprima curarono quella tempesta che loro sovrastava, e che avvisavano fosse per disperdersi in vane minaccie. Ma posciachè ebbero conosciuto come insistesse lo zelo del Borromeo, e come questi ad ogni modo avesse fermo di vincere la loro protervia, pensarono a torre di mezzo quegli ch'essi credevano sola cagione degli insoliti rigori: l'assassinio del cardinale Borromeo fu risoluto (1).

Scampava egli quasi per portento dal piombo micidiale che uno de' fratelli Umiliati scagliavali nel suo privato oratorio: ed abbenchè la carità del santo prelado s'adoperasse di salvare il sicario, e gli altri fraticelli a parte della congiura, sette di essi furono secondo le leggi condannati chi nel capo, chi al remo, e chi alle carceri (2).

Allora papa Pio V (1566-1572) con lettere dell'anno 1571 abolì totalmente l'Ordine degli Umiliati (3).

(1) Ibid. § X.

(2) Ibid. §§ XIII e XIV.

(3) Ib. § XV. — In varie città di questa superiore Italia è rimasta memoria dell'Ordine degli Umiliati in quelle Compagnie di donne, che vanno al seguito delle varie Confraternite de' Battuti; tali Compagnie appellansi anche oggidì delle Umiliate, e le donne che ne fanno parte: *le Dame così dette Dell'Umiltà*; il largo cappuccio, ed il vestito di canovaccio, di colore quasi cenerizio che le avviluppa, ricordano il rozzo abito, che vestivano i fondatori del Convegno.

CONCLUSIONE

Nell'anno 1019, quarto dopo la morte del re Ardoino, tornavano i proscritti Italiani a rivedere la patria.

Libero Arrigo dalle cure che la presenza di un rivale temuto ed animoso, centro di tutti coloro che odiavano la dominazione germanica, a lui procacciava, aveva egli senza sospetti potuto concedere il sospirato ritorno a quegli infelici, de' quali il dimesso vestire, le foggie penitenti ed i benefici modi potevano bensì destare negli Italiani sentimenti di pietà e di rammarico, non più confortare nel regno movimenti di popolo somiglianti a' passati.

Tuttavia le condizioni del regno d'Italia erano più che mai agitate. Perduta appena nata la speranza d'indipendenza, che aveva posto la corona sul capo ad un principe italiano, e l'armi fra le mani della popolazione d'Italia, queste sole rimanevano al popolo, caldo oggimai nel desiderio di maneggiarle per conseguire la pienezza di que' municipali diritti, de' quali una parte già era stata o conquistata od ottenuta da esso in quegli anni, e per far vendetta delle querele nate nelle città tra loro, o per gelosie di confini, o nel parteggiare per l'uno o per l'altro de' re contendenti. Fomento a quest'ire avea dato Ardoino, spingendo Italiani contro Italiani al tempo delle sue guerre avventurose, ed aveva avvalorato l'altro desiderio la gara di lui coll'emulo Arrigo nello arricchire i grandi ecclesiastici a danno de' conti, cagione, già l'abbiamo detto, di una totale mutazione nel reggimento delle città esentate, le quali già in questi anni aveano conquistato sopra i novelli loro reggitori una parte almeno de' diritti regali, che per le liberalità di questi re, soprattutto d'Arrigo, erano venuti quasi tutti nelle mani de' Grandi di Chiesa.

Erano dunque imminenti novelle collisioni tra le città italiane, o tra le popolazioni di esse, ed i principi loro. Di molti esempi di questi movimenti già noi abbiamo avuto campo di osservare ne' Capitoli precedenti, ma più frequenti e più gravi si troveranno rinnovati a' tempi di Corrado il Salico successore di Arrigo, ed a quelli di Arrigo il Nero, finchè sotto Arrigo IV furono soverchiati dalla gran lite che sorse tra il sacerdozio e l'impero. Espressive e pietose lagnanze di tali collisioni, e dell'ire che bollivano fra gl'Italiani, negli ultimi anni del regno di Arrigo I, abbiamo nel frammento di un discorso detto al popolo di Milano da Uberto, abate di non so quale monastero, per cui rimproverandolo de'suoi portamenti contro i popoli di Cremona, di Pavia e di Novara, simboleggiava gli odi maggiori, e non mai bene spenti, che tempestarono tutte le città italiane, e più rinvigorirono a' tempi de' Guelfi e de' Ghibellini: « La mano tua (diecavagli) sta contro tutti, e » le mani di tutti, o Milano, stanno contro di te! Oh quando mai, » quando verrà quel giorno, in cui Pavia a Milano, Crema dirà a Cremona: il popolo tuo è popolo mio, la tua città è la città mia! » (1).

Ma i voti del generoso oratore furono in gran parte infruttuosi!

Non è per ora assunto mio il proseguire queste storiche indagini, che io deliberai di condurre soltanto sino al termine della lotta degl' Italiani a' tempi del re Ardoino, per la loro indipendenza; tuttavia il sistema da me tenuto finora, domanda che nel dar termine a questo lavoro io mi faccia a considerare quale fosse in quel punto la condizione delle provincie italiane poste nella più orientale estremità della penisola, accennando brevemente i principii di que' rivolgimenti che quindi sottrassero que' popoli dal giogo degl' avviliti Cesari d'Oriente, e dalle invasioni de' Saracini, ma spensero a un tempo quelle reliquie di viver libero, che qua e là s'erano fra essi conservate, e più nell'isola di Sicilia, dove la dominazione de'

(1) « Tu supplantare quaeris Cremonensem, subvertere Papiensem, delere Novariensem. Manus tua contra omnes, et manus omnium contra te O quando erit illa dies, ut dicat Papiensis » Mediolanensi: Populus tuus Populus meus! Cremensis Cremonensi: Civitas tua Civitas mea! » (*Sermo Domni UBERTI Venerabilis Abbatis*, ex ms. Cod. Ambros. Bibl. sub lit. Q n.º 283 in fol., ap. MURAT. *A. It. M. Ac.* T. IV. Diss. XLV). — Il GIULINI (*Mem. di Mil.* T. V) pende a credere che questo discorso fosse scritto sul principiare del secolo XII, ma il Muratori, che ne pubblicava lui primo un brano, dal testo ms. della Biblioteca Ambrosiana, avvisò sì debba assegnare all'anno 1020.

Saracini s'era dimostrata più prudente che non quella de' Greci (1).

Già in uno de' precedenti Capitoli (2) abbiamo riferito siccome ne' primi anni dopo il mille i Greci imbalanziti per le vittorie ottenute sovra l'imperatore Ottone II, aveano ridotto di nuovo in loro balia quasi tutta la Puglia, da Ascoli lunghezzo il lido Adriatico, meno Siponto ed il monte Gargano, occupati da' Saracini, e come parimenti era in loro potere tornata la maggior parte della Calabria (3). E queste conquiste reso avendo più temuto il nome de' greci imperatori in quelle regioni, avvezze per lo avanti a reggersi quasi a loro talento sotto il governo de' propri magistrati, Napoli, Amalfi, Gaeta e Sorrento di nuovo ne riverivano forzatamente l'alta signoria (4).

Ma temendo i principi greci, che dagli imperatori d'Occidente novelle prove non venissero contr'essi intraprese, e stimolati dalle insidie de' Saracini, pensarono non solo a munire queste loro conquiste di bastite e di presidii, ma vi preposero ancora un nuovo loro ministro, del quale fermarono la sede nella città di Bari. Lo chiamarono col nome di *Catapano*: e la sua carica, siccome il greco vocabolo significa, lo rendeva primo sopra tutti, e dava a lui pienissima balia nel reggimento di quelle provincie (5). E sì non penarono codesti Catapani a usare ogni maniera di vessazioni e di tirannidi, per modo che non solo alienarono da se, e dagli imperatori che li mandavano, gli animi di que' popoli, ma gli inasprirono a segno di condurli a scoppiare in aperta sommossa.

Melo, generoso cittadino di Bari, levò il vessillo dell'indipendenza, e più volte condusse i sollevati alla vittoria (6). Assediato nella sua città, e tradito, trafugavasi e rannodava l'esercito. Associavansi ad esso alcuni pellegrini Normanni tornati di Terra santa, primi fra que' settentrionali guerrieri che ponessero sulle spiagge della Campania, ivi

(1) SCROFANI, *Dominazione degli stranieri in Sicilia* (passim).

(2) Vedi Capitolo IV in fine.

(3) GIANNONE l. c. T. I. p. 495.

(4) GIANNONE l. c. p. 493.

(5) « Quod Katapan Graeci nos iuxta dicimus omne,
» Quisquis apud Danaos vice fungitur huius honoris,
» Dispositor populi, parat omne quod expedit illi,
» Et iuxta quod cuique dari decet Omne ministrat ».

(Guill. APPULI, *De Reb. Norm.* Lib. I. R. I. T. V).

(6) LEO *Ost. Chron. Cass. Mon.* Lib. II. cap. XXXVII. R. I. Tom. IV. p. 362, et seq

chiamati dal Cielo come forieri di maggiori destini. La fama dell' alte imprese operate da' guerrieri di Normandia nella Spagna, nelle Gallie, e nell' Anglia fece accogliere costoro come potenti e quasi invincibili ausiliari: e sì novelle vittorie coronarono gli sforzi di Melo, il quale rapido come lampo ruppe in più scontri il nemico, e liberò la Puglia dalla presenza de' Greci (1).

Ma non a lungo gli arrise la fortuna. Sopraffatto e sperperato il suo esercito da nuovi e maggiori rinforzi venuti da Costantinopoli, vide Melo tornare in mano de' nemici le sue conquiste, con rapidità pari a quella con cui egli stesso le operava dapprima. Sdegnoso, correva oltre l'Alpi a sollecitare d'aiuto Arrigo imperatore d'Occidente (2).

Le vittorie de' Greci spaventarono Benedetto VIII, il quale sebbene pontefice d'alti spiriti, come quegli che in questi anni (1017) collo arinare i Genovesi ed i Pisani contro i Saracini possessori della città di Luni (3) era stato cagione di segnalata vittoria (4), a buon diritto temeva, che ove i greci imperatori si venissero impossessando di Roma, e più dilatassero le loro conquiste, le novità religiose che avevano macchiato Costantinopoli non fossero per turbare la Chiesa Romana, ed inoltre non venisse a questa da' greci imperatori impedito il possesso delle donazioni fatte da' re Franchi, e che per accordo cogli imperatori d'Occidente, dappoi due secoli essa riteneva (5).

E tanto più a buon diritto temeva il papa gravi danni da' progressi de' Greci, dacchè Pandolfo II principe di Capua, i cui confini toccavano il territorio della Repubblica Romana, avendo fatto sommissione del suo principato all'imperatore Basilio, più imminenti erano i pericoli che sovrastavano a Roma di ricadere sotto il dominio dell'Oriente.

Per la qual cosa nell' anno 1020 passava Benedetto in Germania a pregare Arrigo di soccorso (6), il quale già scosso dalle istanze di Melo, maggiormente confortavasi ad assalire i Greci, pel timore che impossessandosi costoro nuovamente di Roma, il reame d'Italia con tanta fe-

(1) Guill. APPULI, *Hist. Poema*, Lib. I. vers. 24 l. c.

(2) *Hist. de Li Normant etc.* par AIMÉ (*Amatus*) moine du Mont Cassin, publ. pour la première fois par M. CHAMPOLLION-FIGEAC, Paris 1835 in-8.º, Liv. I. Ch. XXXIV. — LEO Ost. l. c.

(3) Vedi il Capitolo IX di questi Studi.

(4) Cfr. THIETM. VII. § 31, SIGON *De Regno It.* VIII. 475, e MURAT. ann. 1016.

(5) LE-BEAU, *Hist. du Bas Empire*, Liv. LXXVII.

(6) *Chron. Hildesheim ad an. 1019 ap. PERTZ.*

licità conquistato sopra il re Ardoino, non fosse per isfuggire dalla dominazione germanica dalla quale avversava (1).

Rapida e più delle altre gloriosa fu per Arrigo quest'ultima sua calata in Italia. Scesovi verso il Natale dell'anno 1021, a mezzo l'agosto già tornava trionfante in Germania (2).

Il breve spazio di otto mesi era a lui bastato per ridurre novellamente sotto il suo dominio tutta quella parte d'Italia, che i Greci aveano ripreso. Così Benevento, Capua, Troia (novella città a onor dell'antica edificata in questi anni), così Salerno e Napoli (3) passavano dall'alta signoria dell'Oriente a quella dell'Occidente. Ma quelle infelici e sconquassate provincie non furono salve per questo, nè dalle aggressioni de' Saracini, nè dal furor delle parti che vi mantenevano i Greci.

In cotal guisa adunque le due più lontane regioni della penisola italiana erano in quel punto immerse nelle agitazioni e negli scompigli, che sempre mena con se uno stato di cose transitorio, e poco conforme a' santi principii del giusto, ed alle necessità de' popoli. Ma le mutazioni alle quali volgerano l'una e l'altra erano di gran lunga diverse: chè mentre le città dell'Italia settentrionale accennavano ad ordini migliori, le altre accennavano ad un giogo novello. Tuttavia se tolgasi la Repubblica d'Amalfi in quegli anni ancora libera e potente, qualunque fossero le reliquie di viver libero, di che goder potessero le altre città di quella porzione d'Italia, l'essere finalmente liberate dalle perenni angustie che loro procacciavano i Saracini da un lato, ed i Greci Catapani dall'altro, dovette se non consolarle della perdita della libertà, rendere ad esse men grave quel giogo che loro era venuto maturando l'arrivo di que' primi Normanni, i quali col sangue loro posero le fondamenta di una vasta e potente monarchia, che collegò colla Sicilia tutte quelle meridionali provincie dapprima in molte parti disperse, e formò un solo popolo italiano di tante popolazioni nemiche tra di loro, ed a tanti inquieti reggitori sottoposte.

(1) « His omnibus augustae memoriae Imp. Heinricus auditis, Graecorum scilicet invasionem » etc., reputans amissa Apulia ac Principatu, Romam quoque non maturaret, ac per hoc Italiam » totam consequenter sibi, et in proximo amittendam etc. » (LEO Ost. l. c. cap. 39).

(2) Cfr. Herm. CONTRACTI, *Chron.* ap. PISTORIUM, T. I. ad an. 1021. — *Chronogr. Saxo* in access. *Hist.* LEIBNITZII T. I. ad an. 1002. — *Acta Ss. Bollandi die 14 julii*.

(3) « Troiam, Capuam, Salernum, Neapolim, urbes Imperii sui ad Graecos deficientes ad deditionem coegit. » (*Ann. EPIDANNI* ap. GOLDBAST. T. I. P. I.).

APPENDICE

AVVERTENZA

Ho riunito in quest'Appendice tutti i Documenti, editi ed inediti, che appartengono al regno d'Ardoino, ma, qualunque ne sia stata la cagione, pochi più mi fu dato d'aggiungerne a quelli che le diligenti ricerche del P. Tatti, del Muratori e d'alcuni altri avevano raccolto.

Già da me si è toccato delle cause, che in tanto correre di tempo distrussero quegli altri molti che certamente esistevano. Parecchi non di meno giacciono tuttora sepolti in Archivi pubblici e privati, dovunque od un sospettoso diritto di proprietà, o non so qual altro più gretto sentimento, resiste alle istanze degli studiosi, che con lunghe e fastidiose ricerche radunano gli elementi dell'antica Storia Italiana.

Fra gl'inediti, undici furono trovati, come già si è detto, dal Cav. Peyron (1) in due Codici dell'Archivio Capitolare d'Ivrea, e sono tutti relativi alle contese d'Ardoino marchese d'Ivrea con Warmundo vescovo di quella chiesa, e perciò anteriori all'elezione di quel principe a re d'Italia. Di questi non accade di far parola, giacchè egli stesso ne rese conto in un suo apposito scritto (2). Aggiungerò soltanto, che recatomi

(1) Ognuno di essi sarà distinto in margine colle due sigle A. P.

(2) *Notizia dell'Archivio del Rev. Capitolo d'Ivrea, del Cav. Amedeo Peyron* (Torino 1843 stamp. reale).

io pure ad Ivrea per potere aver copia di quanto il Cav. Peyron aveva trovato concernente ad' Ardoino, m'accorsi che quelle ragioni medesime di cautela che avevano fatto riporre que' Documenti dentro i due Codici, a' tempi del re Ardoino, consigliarono ancora chi li nascose d'interventirne l'ordine cronologico. Epperò nel pubblicarli per la prima volta, col gradimento di chi li scoperse, in quest'Appendice, io cercai d'indovinarne le date, che mancano nelle carte originali, e li disposi alla meglio secondo le medesime. Tuttavia io volli serbar traccia dell'ordine che tengono quelli del Codice in fol.°, apponendo a ciascuno di essi un numero in cifre romane corrispondente al numero ordinale, che esso serba nel Codice. Per questo, il Documento che sta solo nell'altro, non tiene nessuna cifra romana.

Ancora altri tre se ne leggono qui fra gl'inediti, e sono i numeri 4, 17 e 26: il primo favoritomi dal signor Canonico De' Gandenzi Archivista del ven.^{do} Capitolo di Vercelli, il secondo dall'esimio Monsignor D. Luigi Moreno Vescovo d'Ivrea, il terzo da me trascritto dalla carta originale in Lucca. Della loro storica importanza già si è per me ragionato nel corso di questi STVDI; del resto tanto a questi ultimi Documenti, come agli altri dell'Archivio Capitolare d'Ivrea, e generalmente a tutti quelli fra i rimanenti, che più parvero abbisognarne, ho aggiunto in piè di pagina alcune note.

L. G. PROVANA.

DOCUMENTI

N. I.

Ex origin. in
archiv. capit.
Ecel. vercell.

An. 987.

Inedito.
L. G. P.

Donatio facta Ecel. Canon. Vercell. a Chourado qui et Chona, filio quond. Berengarii n regis, et Ichilda filia Ardoini marchionis, iugalibus, quorumd. bonorum in loco Caresanae.

Anno incarn.^e domini n^{ri} ihu xpⁱ no^gentesimo octuagesimo septimo sec. cal. october ind. XV. canonica s. cusebii ecel.^a ubi ipso corpore requiescit in ciuitate episcopio uercellensis ecel.^e

Naus corado qui et cona marchio f. bone memorie berengarius eā dī rex & yhilda filia *ardoini item ipse marchio* iugalibus qui professi sumus nos ipsi iugalibus ambo ex nazione n^{ra} legem uiuere salielia ipso namq: iugale meo mihi consentiente et subter confirmante offertores et donatores ipsa canonica pp diximus quisquis in sanetis ac in uenerabilibus locis de suis aliquit contuleris rebus iusta octoris (1) uocem in oe seculo centuplum accipiad et quod melius est uitam possidebitis eterna^m ideoque naus corum supra corado marchio & yhilda iugalibus donamus post meum coru^m supra corado marchio decessum in eadem canonica OC EST cortem unam domui coltilem cum castro inibi constructo cum tenimen et fossato circumdatum cum casis massaritiis et omnibus rebus siue capella unam foris eodem castro que est edificata in honorem sr.^m simonis et iuda cum omnibus rebus ad easdem cortem & castro seu capella pertinentium molendinis aqueductibus in marcoda et amporio seu ripatis et piscacionibus in fluminis pauo et in sieitha cum portum unu^m que in ipsa sieitha percurrit et de ambabus ripas applicare debere ad iuris nostris que supra iugalibus quam habere uisi sumus in loco et fundo caresiana uel in eis territoriiis predictam cortem domui coltilem

(1) *Octoris* per *auctoris*, come *Naus* per *Nos*, indizio di nazionalità francese nel notaio.

de castro inibi constructo eum tenimen et fossatum circumdatum est per mensura iusta perticas iugeales (1) sex de casis sediminibus et uineis et arcis in integrum *iuris nostri* seu area predicta capella foris eodem castro sunt p mensura iusta iuges centum. de terris arabilis sunt per mensura iuges duocenti de pratis et gerbis sunt p mensura iuges trescenti de siluis maioribus siue minoribus seu fraschatis sunt iuges quatuorecenti et si amplius de nostro eorum supra iugalibus plus inuentum fuerit que ad ipsam cortem et castro seu capella in predicto loco earesiana quam ut supra mensuraliter perane cartam offersionis a parte iam diete canonica persistat potestatem proprietario iure ut dictum est tam predicta corte domui coltile et castro inibi constructo seu capella inibi edificata eum molendinis piscacionibus seu ripaticis atque portu unum in predicto fluuio sicita siue sediminibus terris uineis pratis pascuis siluis ac stallareis riuis rupinis ac palutibus coltis et incoltis diuisis et indiuinis una cum finibus terminis accessionibus et usibus aquarum aquarumq. ductibus eum omnium iure ac iacentiis et pertinentiis earum rerum per locas et uocabulas que ad ipsam cortem et castro seu capella pntinent oia in integrum que autem ista corte domui coltile eum castro inibi constructo seu capella foris eodem castro edificata siue casis massariiciis et oibus rebus molendinis et piscacionis seu portum unum et omnibus rebus ad eandem cortem pertines iuris nris quem supra iugalibus in eodem loco earesiana super nominato una eum accessionibus et ingressoriis earum seu eum superioribus et inferioribus earum rerum qualiter supra mensuraliter in integrum ab ac die in eadem canonica sibi eusebii dictam cortem domui coltilem eum castro inibi constructo seu capella inibi edificata eum omnibus rebus ad eas pertinenes donare et offerre uideor in eo u ordine sicut subter legitur ita ut faciant exinde canonicis qui ibidem cotidie et nocte deo desernuerint ad eorum uso et sumtus de iam dieta cortem et castro seu capella eum casis et omnibus rebus ad eas pntinentibus seu fruges et redditum atq. censum quod exinde esierit quicquid uoluerint post decessum meum predictus cona marchio pro anima nostra et heredum ac proheredumq. nostrorum contradicione uel repeticione. insuper naus eorum supra corado marchio et yhilda iugalibus a parte ipsa canonica S. eusebii iusa lege nra salih exinde legitimam facimus tradicionem et uestituram per eultellum festu eum notatum uuanthonem et uuasonem terre seu ramum arboris et nos exinde foris expulli uuarpiuimus et aborito fecimus a parte ipsa canonica habendum relinquimus. si quis uero quod futurum esse non credimus si naus ipsi corado marchio et yhilda iugalibus quod absimus aut ullus de credibus ac procredibus nostris seu quislibet nostra opositas personas contra anc cartam offersionis ire quandoque temptauerit aut eam p eouis genium infringere quesierit tunc inferamus pars ipsa canonica contra quam exinde litem intulerimus multa quod est pena auro optimo uncias

(1) Vel *iugealias*.

centi argenti ponderas ducenti et quod repeterimus et vindicare non valeamus. sed presens anc cartam offersionis diuturnis temporibus firma permanead atq. psistat inconuulsa cum stibulacione subuixa: nam si forsitan ipsis canonicis de iisdem corte et castro seu capella seu omnibus rebus et fruges seu reditu atque censu quod exinde esierit inquietas non fuerint et eas qui eoru ordine habere non permiserint sicut supra legitur tunc volo et statuo ut deuenia ipsa corte et castro seu capella cum eaxis cum omnibus rebus ad eas pertuens in potestatem de propinquioribus parentibus meis qui tunc temporibus apparuerit et tandiu in eoru potestate cortem ipsa persistad quoadusque illi euenierint potestate ut supra legitur. nam si a nemine personas ipsis canonicis exinde inquietatos non fuerint tunc ab ea iam dictam cortem et castro seu capella cum eaxis et omnibus rebus sicut supra legitur in ea protesta ut supra legitur per mercedem anime nostre et facian exinde ipsis canonicis et eorum usu et sumtu ut disi pro animae nostre mercede. anc enim cartam offersionis et bergamela cum atramentario de terra eleuauerunt me pagina uuifredus notarius et index sacri palatii tradedi et scribere rogauerunt in qua subtus confirmas testibus ip. obtulit roborandu.

Actum in ciuitate eporcia felic.

† Sign. man. Sup. eurado marchio qui anc cartam offersionis fieri rogauit et propter infermitate sua menime scribere ualuit. et relicta est.

† Sign. man. Sup. ychilda qui anc cartam offersioni fieri rogauit et relicta est.

††† Sign. man. Tedaldi et gauxomus seu maifredus uassalli istorum ingalibus lege uiuentes romana testes

†† Sign. man. aymino et ermino seu salicus uassalli istorum marchioni testes

Ego qui supra uuifredus notarius et index sacri palatii scriptor uisus carte offersionis post tradita compleui et dedi (1).

(1) Di questo documento e dell'altro segnato col n. 14, vo debitore al ven. Capitolo di Vercelli.

Nelle antiche copie di questo primo documento, da me vedute in Vercelli, fu aggiunta la lettera R sul principio del nome della donatrice ICHILDA: divenuta in tal guisa RICHILDA, il suo nome fu ripetuto in questa nuova forma da TRISTANO CALCO (*Hist. Mediol. lib. VI. p. 113.*), dal CHIESA (Agost.) (*Genealogia de' conti d'Agliè fol. 46. b. ms. della Bibliot. del Re*), e sulla fede del CHIESA, dal TERRANO (*Adelaide Illustrata, P. I. p. 197.*). Una maggiore storpiatura soffrì il nome del donatore CORRADO, il notaio uomo francese, sul principio della carta avendo scritto *Naus Corrado* invece di *Nos Corrado*, gli amanuensi posteriori che ne presero copia per uso del Capitolo, non sapendo capiro quella voce *Naus* scritta olla francese per *Nos*, s'affaticarono tanto che lessero *Ritius* o *Ricius*: e così aggiunsero il prenome di *Ritius* al donatore *Corrado*, il quale in tutte le copie da me vedute sempre vien detto *Ritius Corrado*.

N. 2.

Ardoini Comitis Palatii sententia in Placito Limitensi
pronuntiata pro Episcopo Cremonae contra Walpertum
iudicem.

MURATORI
Ant. in. aev.
I. I. diss. VII.
col. 383.

An. 996

Dum in Dei nomine locus ubi dicitur, Limite, Iudiciaria Brisiense, in prata proprio Episcopo ipsius scē Brisiensis Ecclae, per data licentia domini Adelberti Episcopi ipsius Episcopo, in iudicio residebat Ardoinus Comes Palatii, iustitiam faciendam ac deliberandam, residentibus cum eo Riprandus comes, Adelbertus, Geprando, Rainaldus, Petrus, Sigefridus, Ganselmus, Alfredus, Sielhardus, Walfredus, et Nozo Iudices Sacri Palatii, et reliqui plures. Ibiq̃e eorum ueniens praesentiam Rozo Auocatus Episcopo scē Cremonensis Ecclae, nec non et ex alia parte Walpertus Iudex, altercationes &c.

Quidem et ego Adelbertus Notarius Sacri Palatii ex iussione praefacto Comes Palatii et Iudicum, ammonicione scripsi, Anno Incarn. D. N. I. C. DCCCXCVI. undecimo kalendas junias, Ind.^o IX.

ARDOINVS Comes Palatii subscripsi.
Adelbertus Iudex Sacri Palatii interfui.
Reginaldus Iudex S. P. interfui.
Petrus Iudex S. P. interfui.
Sigefredus Iudex S. P. interfui.
Ganselmus Iudex S. P. interfui.
Walfredus Iudex S. P. interfui.

N. 5.

Epistola canonica (1)) anathematizaturò directa.

Nel cod. n. VI.

Ex cod membran. in fol. archiv. capit. Eccl. Epored. cui titulus: Liber Ieronimi contra Iovinianum.

An. 997-8 (?)

A P.

Ine lito (2).

WARMUNDVS DEI auxiliante gratia humilis episcopus et coepiscoporum coetus unanimis. Arduino dignam si placet in domino uocationem cum salutis integritate. Quum preter quam tibi licitum esset arrogantiae spiritu tumuisse et insuper ecclesiastica iura crebra et intollerabili uexatione acriter commouisse cognouimus commonitorias tuae temeritati literas dignum duximus dirigendas. quatinus coeptorum uesaniae furorem ab animo penitus rescecando digno poenitentiae fructu matris ecclesiae membris non ut predo insaniens sed ut fidelis athleta deseruiens

(1) Spazio in bianco, donde fu rasiato il nome ARDVINO.

(2) Mancano in tutti questi documenti d'Ivrea le note cronologiche: nel capitolo terzo di questi studi ho dichiarato le ragioni per le quali argomentai doversi assegnare le date agli anni indicati in ciascuno di essi in margine

ascribi & aggregari dignissime merearis. hoc tuac utilitati exhortando committimus. hoc paterno affectu persuadendo consulere & consulendo persuadere instantia quoque precum decernimus.

Nostrae igitur ammonitioni obturatae auris intentionem accomoda & obstinatae mentis duriciam condignae satisfactioni excolendo subiicito! quatinus diuina hereditas ypporediensis ecclesiae tuae oppressionis deuastatione diutius attrita! tanti laboris finem inueniat. & proprii pastoris diu desiderabile solatium quasi captiuitate deposita & libertate cōpta assequatur & teneat. Quod si praeter quam credimus nostrae uocationi reluctari et tuae salutis conaris resistere (1) ab ecclesiae sinu eliminandum & anathematis uinculo te certissime sapias innodandum legis enim decreto statutum esse comperimus! ut qui aliena inuadit non exeat impunitus.

N. 4. Qualiter excommunicari infideles episcopus debeat.

Nel cod. n. 1.

An. 997-8 (?).

A. P.

Inedito.

Episcopus cum excommunicare uel anathematizare aliquem infidelem pro certis & manifestis secleribus dispositum habet! post lectionem euangelii clerum & plebem ita debet alloqui.

Nonerit karitas uestra fratres mei quod quidam uir nomine arduinus diabolo suadente postponens xp̄iana[~] promissionem quam in baptismo professus est atque sacramentum quod huic ecclesiae sanctae dei ypporediensi promisit relicto dei sanctaeque aecclesiae seruitio post apostasiam conuersus post sathana cui abrenunciauit & omnibus operibus eius. uineam xp̄i idest aecclesiam eius deuastare et depredare non pertimescit. Pauperes xp̄i quos precioso sanguine suo redemit uiolenter opprimens et interficiens et bona eorum diripiens. predas uero & rapinas assidue exercet unde quia filius huius nostrae ecclesiae cui domino auctore presidemus debuere esse sed diabolo suggerente eius hostis & persecutor effectus est quia in ea per aquam et spiritum sanctum renatus est et inter adoptiuos filios dei annumeratus quamuis modo filius diaboli sit imitando diabolum. nos solliciti esse debemus ne per negligentiam pastorem aliquam de ouibus nostris depereat. pro qua in tremendo iudicio ante principem pastorum dominum nostrum ihesum xp̄m compellamus reddere. iuxta quod ipse terribiliter nobis cominatur dicens. si non adnunciaueris iniquo iniquitatem suam! sanguinem eius

(1) Spazio in bianco, come sopra, donde fu tolto il nome d'Arduino

de manu tua requiram. misimus ad eum presbiterum nostrum et litteras commonitorias. semel et iterum atque tereio inuitantes eum canonice ad emendationem & satisfactionem & poenitentiam! corripientes eum paterno affectu. sed ipse pro dolor diabolo cor eius indurante. monita salutaria spreuit & in cepta malicia persenerans de die in diem in peius ruit. & iuliani apostatae immitator ecclesiae dei quale sit superbiae inflatus satisfacere dedignatur. De talibus itaque transgressoribus & sanctae religionis pacisque quam xp̄us suis discipulis dedit atque reliquit. uiolatoribus precepta dominica & apostolica habemus quibus informamur. quod de huiusmodi preuaricatoribus agere nos oporteat. ait enim dominus in euangelio. si peccauerit in te frater tuus corripe eum. fratres in uno quoque nostrum peccat qui in sanctam aeclesiam peccat. si enim sancta aeclesia unum corpus est cuius corporis caput xp̄s est singuli autem sumus alter alterius membra. & compatitur unum membrum compaciuntur omnia membra! proculdubio in nos peccat qui membra nostra laedit. lubet ergo dominus ut frater idest xp̄ianus quilibet in nos peccans primo secrete corripiatur. deinde cum testibus redarguatur. Nouissime in conuentu aeclesiae publico conueniatur. Quod si has tres ammoniciones & pias correptiones contempnit! & satisfacere despicit post haec sit tibi inquit sicut hetnicus idest gentilis atque paganus. ut non iam pro xp̄iano sed pro pagano habeatur. Et in alio loco. dominus membrum quod a sua compage resoluitur & a iunctura caritatis dissociatur! et omne corpus quod scandalizat dominus abscidi et proiici iubet dicens. si oculus manus uel pes tuus scandalizat te erue eum et proiice abs te. Et apostolus auferte inquit malum ex uobis. Et item. infidelis si discedit discedat. Et alio loco. Rapaces a regno dei excludit dicens. neque rapaces regnum dei possidebunt. Et alibi. si quis frater nominatur et est fornicator aut homicida aut adulter aut rapax cum huiusmodi nec cibum sumere licet. Et iohannes electus pre ceteris xp̄i discipulus talem nefarium hominem salutare prohibet dicens. Non ei aue dixeris. Neque eum in domum receperis. Qui enim aue dicit communicat operibus eius malignis. Dominica itaque atque apostolica precepta adimplentes! membrum putridum & insanabile quod medicinam non recipit. ferro excommunicationis et dirae maledictionis a corpore aeclesiae abscidamus. ne tam pestifero morbo reliqua membra corporis ueluti mortifero ueneno inficiantur (1).

(1) Vid. inter formulas exorcismorum et excommunicationum veteres apud BALUZIUM (*Capitular. reg. Francor.* t. 2. cap. XII col. 663.).

N. 5.

Incipit excommunicatio.

Nel c. d. n. 11.

An 997-8 (?)

A. P.

Inedito

Igitur quia monita nostra et crebras exhortationes contempsit quia
tercio secundum dominicum preceptum vocatus ad emendationem et
poenitentiam venire despexit. & culpam suam needum cognouit. nec
confessus est. & adhuc coepta malitia perseuerat! indurante diabolo
cor eius. & iuxta quod apostolus dicit secundum duriciam suam et cor
impenitens thesaurizat sibi iram in die irae.

Veniat mors super illum et descendat in infernum uiuens. Fiat

Conuertatur ad uesperum. & famen paciatur ut canis & circum
eat ciuitates. Fiat

Fiat mensa illius coram ipso in laqueum. & in retributione et
in scandalum. Fiat

Obscurentur oculi eius ne uideant! & dorsum ipsius semper in-
curuet dominus. Fiat

Effundat xps super eum iram suam & furor irae suae comprehen-
dat eum. Fiat

Fiat habitatio illius deserta et in tabernaculis eius non sit qui
inhabitet. Fiat

Apponat dominus iniquitatem super iniquitatem illius et non
intret in iustitiam suam. Fiat

Deleatur de libro uiuentium et cum iustis non scribatur. Fiat

Ihs xps dominus ponat illum ut rotam et sicut stipulam ante fa-
ciem uenti. Fiat

Sicut ignis comburens siluam! sicut flamma comburens montes!
ita persequatur illum in tempestatem suam! et in ira sua contur-
bet eum. Fiat

Erubescat et conturbetur in seculum seculi & confundatur et
pereat. Fiat

Reddat illi dominus iniquitatem ipsius, & in malicia eius disper-
dat eum! disperdat illum dominus deus noster. Fiat

Cum indicatur exeat condemnatus et oratio eius fiat in pec-
catum. Fiat

Fiant filii eius orfani et uxor eius uidua. Fiat

Nemo sit illi adiutor nec sit qui misereatur in uita sua pupil-
lis suis. Fiat

Fiat contra dominum semper! et dispereat de terra memoria
eius! pro eo quod non est recordatus facere misericordiam. Fiat

Dilexit maledictionem. ueniat ei. noliit benedictionem elon-
getur ab ipso. Fiat

N. 6.

Nel cod. n. III.

Ao. 997-8 (?).

A. P.

Inedito.

Nos uero eundem (1) maledictum et apostatam cum uniuersis complicitibus suis & sequacibus & hominibus & fidelibus & amicis & communicatoribus & fautoribus suis iudicio dei omnipotentis patris & filii & spiritus sancti & beatae dei genitricis mariae cuius ecclesiam innuadit cuius episcopum a sede propria soepe uiolenter expulit! cuius seruos contriuit! cuius famulos exterminauit! & gloriosissimi petri apostolorum principis. & omnium sanctorum nec non & nostrae mediocritatis auctoritate & potestate nobis diuinitus collata ligandi & soluendi. in coelo & in terra & preciosi corporis & sanguinis domini perceptione & a societate omnium xpianorum separamus excommunicamus & a liminibus sancte matris aecclesiae in coelo & in terra excludimus & excommunicatum & anathematizatum esse decernimus! & dampnatum cum diabolo & angelis eius & omnibus reprobis in igne aeterno iudicamus. Sitque anathema maranatha & cum iuda xpi traditore nec non & annania & saphyra. in die iudicii retributionem accipiat & in secundo domini aduentu pereat. ita ut nullus xpianus ei aue dicat aut eum osculari presumat. nullus presbiter cum eo missam celebrare audeat. uel sacrosanctum corpus & sanguinem domini tradere.

Nemo ei iungatur in consortio neque in aliquo negotio. Et si quis ei se sociauerit & communicauerit eius operibus malignis nouerit se simili percussus anathemate. nisi forte a diaboli laqueis resipiscat & ad emendationem & poenitentiam redeat & ecclesiae dei quam laesit satisfaciatur — Et respondeant omnes tercio AMEN . AMEN . AMEN . aut FIAT . FIAT . FIAT .

N. 7.

Nel cod. a. IV.

A. P.

Inedito.

Qualiter excommunicetur excommunicandus (2).

Debent autem duodecim sacerdotes episcopum circumstare & lucernas ardentes in manibus tenere quas in conclusione anathematis & excommunicationis proicere debent in terram et pedibus conculcare. Post haec episcopus plebi ipsam excommunicationem *communibus uerbis* (3) debet explicare ut omnes intelligant quam terribiliter dampnatus sit. Et ut nouerint quod ab illa hora in reliquum non pro xpiano sed pro pagano habendus sit. Et qui illi quasi xpiano communicauerit! aut eum eo manducauerit aut biberit! aut eum osculatus fuerit! uel eum eo colloquium familiare habuerit! nisi forte ad satisfacionem et poenitentiam eum prouocare studuerit! aut simul cum eo orauerit proculdubio similiter sit

(1) Spazio in bianco pel nome d'Ardoine come al n. 3, al n. 4 ecc.

(2) Ved. in BALUZZO l. c. col. 666.

(3) Cioè nel dialetto volgare in lvrea.

excommunicatus. deinde epistolae presbiteris per parrochias mittantur continentes modum excommunicationis in quibus iubeatur ut dominicis diebus post lectionem euangelii plebibus sibi commissis adnuncient ipsam excommunicationem ut ne quis per ignorantiam communicate excommunicato. Oportet etiam ut aliis episcopis ipsa excommunicatio manifestetur. Precipit enim toletanum concilium ut inuicem mox scripta percurrant per omnes prouinciae episcopos quoscumque adire potuerint ut excommunicatus audiat. Seniori etiam eius ipsa excommunicatio debet nota fieri.

N. 8.

Nel cod. n. v.

A. P.

Inedito.
Stessa dataQualiter episcopus reconciliet vel recipiat
excommunicatum.

Cum aliquis excommunicatus uel anathematizatus penitentia ductus ueniam postulat & emendationem promittit! episcopus qui eum excommunicauit ante ianuas ecclesiae uenire debet et duodecim presbiteri cum eo qui cum hinc inde circumulare debent. Ubi etiam adesse debent illi quibus iniuriam uel dampnum illatum est. & ibi secundum leges diuinas et humanas oportet dampnum commissum emendari. Aut si iam emendatum est eodem testimonio comprobari. Deinde interroget episcopus si poenitentiam iuxta quod canones precipiunt perpetratis sceleribus suscipere uelit. & si ille terrae prostratus ueniam postulat. culpam confitetur! penitentiam implorat! de futuris cautelam spondet! tunc episcopus apprehensa ei manu dextera! cum in ecclesia introducat et ei communionem et societatem reddat. Posthae secundum modum culpae penitentiam ei iniungat et litteras per parrochias dirigat. ut omnes nouerint eum in societate xp̄iana receptum. Aliis etiam episcopis hoc notum faciat.

N. 9.

Ex eod. mem-
brae. in 8.^o
archiv. capit.
epored. Eccl.
cui tit.: *Liber
Benedictionum*
etc

An. 997-8 (?).

A. P.

Inedito

Allocutio episcopi ipporediensis ad plebem,
contra Ardoinum et Amedeum fratrem eius.

Conperiat uestrae dilectionis fraternitas proximi & conserui mei in propatulum intollerabilia mala nos hactenus perpressos fuisse iniuste ab osoribus sanctae dei ecclesiae et praedonibus quae nobis a xp̄o redemptore nostro ad regendum atque gubernandum collata est per nostri senioris imperatoris concessionem. quam cotidie multis oprobris laceratam aspicientes interni animi dolore affecimur & quod nollem nostrae ecclesiae rebelles cogor sub anathematis uinculo innecti. Exurgat

dominus & dissipentur inimici eius & fugiant qui conculcant et dissipant ecclesiam eius. sicut deficit fumus deficiant. sicut fluit cera a facie ignis. sic pereant tales scelesti a facie xpi. Proinde nostri officii armis eos confodientes. Maledicimus omnes milites terram sanctae mariae iporiensis tenentes qui *ardoino* (1) et *amedeo* consilium et adiutorium per aliquod ingenium dederint & nos per rectam fidem in omni ingenio sue possibilitatis non inuauerint donec nobiscum quaecumque finem habeant et domum reddant. similiter et omnes uastantes et milites depredantes famulos et seruos sanctae mariae et super terram eius sedentes similiter maledicimus ardoinum et amedeum fratrem eius predones et ecclesiam dei uastantes et *ewardum* cum omni eorum substantia hac perinde maledicimus omnes ciues in eporeria ciuitate habitantes quicumque ardoino et amedeo consilium dederint aut adiutorium. iterum (2) anathematizamus predictos omnes superiores a domino patre & filio et spiritu sancto. & cum iuda traditore necnon cum dathan & abiron quos uinus infernus absorbit dampnandi sint. maledicti sint in ciuitate. maledicti in agro. maledicti sint facultates. & reliquiae eorum. maledictus fructus uentris et fructus terre eorum. armenta & cuncta illorum animalia. maledicti ingredienti. et egredientes ubique. mittat dominus famem esuriam et increpacionem in omnia opera eorum. donec conterat & perdat uelociter propter adinuenciones eorum pessimas. adiungat dominus ei pestilenciam donec consumentur. & maledicti sunt omnes qui eis consilium adiutorium & conloquium dederint. nisi pro sanctae dei ecclesiae utilitate. & nostro profectu. maledicti sunt uigilantes. ambulantes. dormientes & quiescentes. Percuciat eos dominus egestate. febris. frigore. ardore. estu. et rubigine. donec pereant. tradat eos corruentes semper ante hostes suos. Percuciat eos dominus ulcere aegypti. & parte corporis. scabie quoque & rubigine. ita ut curari nequeant. Percuciat amencia. cecitate ac furore mentis. omni tempore. filii eorum in proximo orfani. & uxores fiant uiduae. Dominus meus pone illos ut rotam et sicut stipulam ante faciem uenti. sicut ignis qui comburit siluam & sicut flamma comburens montes. ita persequeris illos in tempestate tua. & in ira tua turbabis eos. imple facies eorum ignominia et querant nomen tuum domine. Erubescant & conturbentur et confundantur & pereant. Omnes iste maledictiones. a planta pedis usque ad uerticem capitis in gyrum constringant eos. nisi resipiscant & ad sinum matris ecclesiae satisfaciendo redeant. propterea tota huius ecclesiae plebs dicat. fiat. fiat. amen.

(1) Questo documento che contiene tante maledizioni contro Ardoino essendo stato riposto, solo, nel codice io 8.^o che porta per titolo: *Liber Benedictio[n]um per totius anni circulum*, non accadeua di cancellarvi il nome d'Ardoino, giacchè il titolo del libro allontanava ogni sospetto.

(2) Questa parmi essere la formola della seconda scomunica bandita contro Ardoino e contro i suoi fautori, fra' quali nomina *Amedeo* fratello d'Ardoino, ed un *Euerardo*, personaggio ignoto, non nominati nella precedente scomunica, documenti n. 5 e 6.

N. 10. Quaerimoniae coetus episcoporum ad Gregorium V. S. P.,
contra Ardoinum.

Nel cod. n. IX.

No. 998 (?).

A. P.

Inedito.

Lumine intimae contemplationis divinitus illustrato, domino gregorio pontificum summo, Coetus episcoporum quicquid praesens in domino delectabile & futurum habet optabile cum sedula nostrarum precum deuotione, decet nos cum digna gratarum actione semper in domino gloriari qui nos tanta suae miserationis largitate voluit refoueri ut et mundi arca et diuina hereditas alterutris successibus muniretur, uestra namque seu imperialis sublimitas quod praecipuum patet diuina ammonicionis erulita mysteriis nunquam dissoluendis concetitur nexibus nec noto dissentit nec disparatur effectu. Quos etenim propaginis linea unit et omnis consolidat fides deest unum sentire idipsum inuicem premenditari idem sapere nec dispari clausula terminare, et hoc totum secundum ibesum xpm, quum igitur alteruter apex alterutro cumulatur dispositu conuenit uos utriusque indaginis uiam recto considerare intuitu & continua discussione gressu mentis percurrere ut si forte quippiam superuocaneum tumet aut secus ac debet deprimitur uestra opera complanescat quatinus uester incessus ineffense procedat et subsequenti gregi imitandum succedat, intendat igitur paternitas uestra lamentis nostris condescendat gemitibus nostris perfusa lacrimis nostris, et prouideat omnibus nobis, animaduertat capud nostrum membrorum conquestum ne forte in nobis neglectus male serpendo et latenter rependo preoccupet caput et sic totum miserabiliter aut forsitan inremediabiliter corpus tabescat, eninuero neglegentibus usualiter duriora contingunt eoque eos tenacius affligunt, et securitas felicitatis nouercae is (1) re diuina solacia interdicat, ut igitur sit notum quod petimus.

Ardoinum rem nostrae legationis inducimus ardoinum nihil in se diuinum nichil humanum habentem se atroeiter trucidantem omnium neci imhiantem, et quod dictu est horrendum animae cunctis interitum comminantem, nichil habet diuinum quia omnium saluti inuidet ipsos quoque domini sacerdotes bestialiter trucidant (2) & quasi poena eis necementior possit inferri inaudita seuitia postea ipsi cadaueri parat incendium. Et ut hoc quam sit detestabile possitis cognoscere! nedum poenitudine querat commissa detergere cunctos pene eiusdem professionis superstites eodem satagit sine consumere, nichil habet humanum quia dum feraliter seuiat hominumque sanguine sitibundus ipse perfundi gaudent et pasci quod ab humanitate alienum creditur sibi uidetur ad summam proficere si suo qq: flagicio alios possit deperdere habet tamen quod utinam non haberet et hoc diabolicum quia cum sua ne-

(1) Luogo guasto.

(2) Forse trucidat.

quicia et aliorum delectetur flagitiis nullius seminarium optinet poenitudinis. Quum igitur tanta et talis ut pote qui omnium nostrum causas perpendit in uestri absentia (1) nostro xpianissimo domino imperatore ob id differente nichil deliberacionis promeruit contentio! dignetur pietas uestra oculo animae eam discutere et omnibus nobis paterno affectu in commune consulere! ut tanti patris tuicione premuniti sub specie hominis latentis diaboli uersutias ualeamus deuotare indempnes. mirum enim nimisque pauendum uidetur nulli utili instanti nullo onesto cogente nihil prouectus reque uendicante. unius precio omnium nostrum animarum lucra deperdi eiusque commodo aeternas nobis infelicitates mercari. tolerabilis item est unum merito suae nequiciae interire quam cunctos alterius culpa animaduertendi facinoris poenas subire neque enim interno iudicio presentabimur inexcusabiles si tante assercionis extiterimus peruersores. quicquid enim futurum est precaneri debet ne male fiat. et quod tanta auctoritate recolis factum pudendum est sine racione mutatum. nos etenim tam obstinatae suae meritis (2) fraudibus condolentes crebra conuentione singulari exhortatione sedula legacione et cartarum multiplex amonicionem ab huiusmodi reuocari perfidia quesimus. sed quia malus sepe ammonicionem fit peior undis eum corrigi putauimus inde eum euidentius descuire ut scitis comperimus. Unde iam eum secundo anathematis uinculo innodauimus. iuxta illud propheticum ihs populum de terra egypti liberans secundo eos qui non crediderunt perdidit. Consideret igitur sanctitas ur̄a si tam iuste innodatus debeat enodari incorrectus aut si sua enodatione nos om̄s deceat innodari. ad quam considerationem uestram mentem excitet xp̄o et ita equitatis censuram quod impedit expedire concedat quatinus in extremo examine pro nostra redemptione misericordiae uicem uobis iudex rependat placatus. ihs xp̄s dñs nr̄. qui uiuit et regnat.

N. 11.

Nel cod n VIII

An. 998 (?).

A. P.

Inedito.

Epistola Gregorii P. V. Ardoino directā.

Gregorius episcopus seruus seruorum dei (5).

Xpianae fidei expugnatori nullam quia nondum mereris benedictionem.

(1) Queste parole *in vestri absentia* mi fanno credere che la lettera sia stata scritta dopo il ritorno di Gregorio V in Roma (che fu prima del di viii delle calende di marzo del 998), donde era stato cacciato dal console Crescenzio l'anno precedente. Da questo documento risulta che non all'anno 1001 come scrisse l'UGHELLI (Ital. Sacra l. iv. col. 1066.), ebbe principio l'episcopato di Warmundo, ma assai prima, giacchè Gregorio V morì il dì 12 gennaio 999 (MURAT. Annali).

(2) *Pro mentis*.

(3) Spazio pel nome d'Ardoino, stato tolto come sopra.

Audiuimus unde grauiter dolemus sanctam yporediensem ecclesiam tua uexatione intollerabilia damna incurrere! et unde doctrinae lae ad animae tuae remedium suscepisti! diabolica recompensatione persecutionis toxicum porrigere non perhorrescis. cunctaque eius incendiis deuastare non pertimescis. certum enim habemus quā cuius instinctu tantum malum coepisti. eiusdem persuasione iniquitati iniquitatem super addere delectaris. Apostolica igitur auctoritate te alloquar. aut male incoepata dimitte & quae peccasti emenda. aut procul dubio sapias te in pascha domini anathematis gladio feriendum.

N. 12. Epistola regibus regnorumque principibus missa (1).

Nel cod. n. vii.

An. 998 (?).

A. P.

inedito.

Omnibus uobis notum esse credimus (2) .) perfidiae spiritu seductum rebellionis arma contra regiam dignitatem commouisse et publicae functionis insignia ad totius regni detrimentum sibi improvida elatione usurpasse. diuinam autem haereditatem eiusdemque cultores ac preuisores episcopos crebra et impia uexatione concussisse atque a propriis ciuitatibus expulisse. *secundos uero milites pene omnes in periurii crimen atrociter coegisse* (3). his multisque aliis exigentibus flagitiis ab ecclesiae sinu quam non ut filius coluit sed ut hostis inuasit subegit atque diripuit. *domni uero pape censura* cunctorumque coepiscoporum assenciente cognitione expulsum atque anathematis uerbere prostratum et conquassatum cognoscite. Admodum quippe inhonestum esse sapitis prelati subiectos inobedientes proteruos aut resistentes

(1) Questa epistola sembra essere una di quello che, secondo il concilio di Toledo ed i capitolari di Carlo Manno (ved. BALUZIIUM I. c. col. 666.) ogni vescovo era tenuto di seriuero agli altri vescovi, ed al signore *diretto*, di colui, che era stato poco prima da lui scomunicato, per partecipar loro la bandita scomunica. La data di questo documento dee ad ogni modo essere posteriore di qualche giorno o mese, di quella dell'epistola diretta ad Ardoino da papa Gregorio V (Doc. n. 11), giacchè le parole *domni pape censura* paiono riferirsi alle minacce di scomunica che quel Pontefice aveva fatto in quell'epistola al Marehese d'Ivrea, ove non cessasse le sue vessazioni.

(2) Solito spazio pel nome d'Ardoino.

(3) Il LURI (cod. Bergom. lib. iv. col. 587. t. 2.) parlando della sollevazione de' Vassalli, cioè de' *secondi militi* contro i maggiori Vassalli in Milano, dice: « an » *autem etiam in aliis Langobardiarum ciuitatibus tumultus huiusmodi, et conspiratio » exorta fuerit, liquido non constat.* » Egli è evidente che le parole sopracitate bastano a dimostrare che la guerra tra i Grandi Vassalli ed i *Secundi Militi* non era rotta solamente in Milano, e che a questa guerra doversi riferire l'aver potuto il re Ardoino reggero così lungamente contro il suo potente rivale Germanico, pel quale parteggiava il maggior numero de' Grandi Vassalli del regno, mentre egli conduce *secundos milites pene omnes* a tenero per esso.

existere aut eorum offitia suis usibus inclinare. Caveat igitur nestri nobilitas animi & prudenter aduertat talibus nequitis mancipatum. tanteque auctoritatis sententia percussum non ut hospitem suscipere sed a nestri societate ut inimicum repellere! atque a uobis poenitus auertere cui ipsam quoque ecclesiam sentitis aduersam. oportet enim cum morbum ferro secari & cauterio peruri qui aliis medicaminibus non potest curari. Vos igitur quibus regnorum moderamina diuinitus sunt contradata uel qui sub domini disciplina estis constituti sic nos exhibete ut et nestri potestas semper ad meliora prouehatur uestrumque ministerium nullatenus uituperetur. qui enim ea quae synodali auctoritate statuuntur infringere conantur animae suae hostes proculdubio comprobantur.

N. 15.

Nel cod. n. x

An. 999 (?)

A. P.

Inedito.

Poenitencia ardoini romae in ecclesia beati petri apostoli ei imposita & a dompno papa siluestro et augusto imperatore tercio ottone et a pontificibus italiae catholice & synodice edicta.

Notum sit omnibus quod ardoinus (1) in sancta synodo professus est coram domno siluestro sanctissimo et domno nro tercio ottone romanorum imperatore augusto. & coram omnibus episcopis ibi residentibus se conduxisse illos homines qui interfecerunt petrum uercellensem episcopum. et eius neci interfuisse. et eosdem homines secum reduxisse et retinuisse. et cum illis postea conuersatum esse. ideoque inuentum est in sancta synodo ei tanti criminis participi non modicam imponere poenitentiam. quia quamuis ipse hoc manibus non perpetraret scelus. tamen causa eius mortis extitit. quia interfectores conduxit. sicut et iudas qui non eo modo tradidit dominum ut crucifigeretur! sed quia alios conduxit causa eius mortis simili modo existens in perpetuum dampnatus est. in hoc tamen iudas mitius fecit quia non postea cum interfectaribus domini conuersatus est. ideoque quia publice confessus est. eandem poenitentiam uult ei sancta synodus imponere quae ei daretur si secreto confiteretur manu sua episcopum interfecisse. Videlicet ut deinceps arma deponat. carnem non manducet. nemini uirorum aut mulierum osculum donet. nec lineum uestimentum induat. et si sanus fuerit ultra duas

(1) Gregorio V mori addì 12 di febbraio del 999, e Gerberto cioè Silvestro II fu eletto S. P. il dì 2 d'aprile dell'anno medesimo (*Art de vérif. les dates*). Ottone III alla cui presenza fu tenuto questo sinodale giudizio, rimase in Roma dal principio dell'anno 999 fino alla primavera dell'anno seguente, e non vi ritornò prima dell'Ognissanti. La data dunque di questa sentenza è presumibilmente bene assegnata all'anno 999.

noctes in uno loco non moretur, nec corpus domini accipiat nisi in exitu uitae, et in eo loco agat penitentiam ubi neminem eorum ledat qui sacramenta contra eum fecerunt, aut praesens monachus efficiatur.

N. 15. *bis*

Ex H. P. mon
t. I. col. 315.

An 997.

Ottonis III Imp. diploma quo canonicos vercellensis Ecclesiae omnesque eorum possessiones sub suae defensionis ac tuitionis *Mundiburdium* recipit, datum interventu Raginfredi episcopi.

In nomine sc̃te &c. Otto diuina fauente elementia *Romanorum Imperator* augustus. Decet imperatorem ecclesias Dei semper recuperare ut inde a Deo digna valeat mercede remunerari, qua propter omnium sc̃te Dei eccl̃ie nostrorumq. fidelium presentium uidelicet ac futurorum nouerit universitatis industria qualiter nos interuentu *nostri fidelissimi Raginfredi uenerabilis episcopi* ac pro Dei amore nostrique remedio anime cunctos canonicos sc̃te uercellensis eccl̃ie cum omni familia et possessione omnibusque rebus mobilibus uel immobilibus ad sc̃ti Eusebii canonicam iuste et legaliter pertinentibus cum plebibus Dustria et Casaliglo omnibusque earum pertinenciis cum portibus Sarni et Sicide cum curtibus Carisiana atque Diuali et Montanario et omnibus earum pertinenciis et cum omni integritate ad prefatam Sancti Eusebii canonicam pertinente *sub nostre defensionis et tuitionis mundiburdium* recepimus. Quare nostra imperiali iubemus potentia ut nullus dux aut episcopus marchio uel comes nullusque nostro imperio subditus magne aut parue persone prenomatos sc̃ti Eusebii canonicos de omnibus que supra descripsimus seu que ad eorum canonicam iure pertinere noscuntur inquietare molestare uel disuestire sine legali auctoritate presumat, si quis autem huius ñri mundiburdii uiolator extiterit sciat se compositurum auri purissimi libras centum medietatem kamere ñre et medietatem prefatis sc̃ti Eusebii canonicis. Quod ut uerius credatur &c.

Heribertus cancellarius uice *Petri Cumani Episcopi* recognouit.

Data ii kalend. ianuarii an. D. I. dcccxcvii Indiet. xi. anno autem tereii Ottonis regnantis xiiii imperii autem secundo. Actum Papie in palatio fel. Amen.

Ex codice
num. cxxxiv
membr. in 4.^o
Eccles. capit.
vercell., cui
titul. Concord.
evangelica.

An. 1004 (?).

In nomine domini Leo ep̄s servus eusebii.

Multitudo populi. copia militum. decens frequentia clericorū. gloria est et exaltatio eccl̄ae dī. sed emergit importabilis paupertas. & graue dispendiū domui dī. quod serui ecclesiariū aliquib; diuitiis inflati (a). collunt contra suos dominos. et p neglectū priorū. a iugo seruitutis in libertatis nobilitatem transcunt. et ipsa eccl̄am ex cuius questu ditati s. et ut esse potuit quantū ad corū iudiciū libertati. in derisu et despectu habent; itaq; fit. ut (2) eccl̄a dī cessamus de officiis nr̄is dicere. ipsis etiā quod flentes dicimus architectis carcat; monstrum quamvis n̄ inauditum. sed babylicū. domū dī a laicis ditata et ab ipsis rectoribus. immo pdatoribus pauperpata terris thesauris. et seruis spoliata; Conueniat ergo domus dī (b). et nouo et exquisito genere mortis (c) illos perdamus. qui peccata populi manducant. et qui elemosinas uendunt. & infrontati ab eccl̄a thesaurū eccl̄ae tollunt; hoc eū dolore uidentes. quos et quot potuimus in hac ciuitate uercellis. incuria pontificū a seruitio eccl̄ae dī nescimus p quod maleficiū et captiosū laqueū libertatis (d) a longo subtractos p̄sentia iudiciū. ciuiū. affluentia residente militū. appositis euangelis. et libris legū. cartis contra leges factis. si quae erant legalit̄ incisis nobilit̄ acclamante populo reuocauimus. quosdā etiā nullis cartarum colluuiis infectos (e). sed tantū longo tempore stultitia predecessorū nostrorū qui fr̄s neglegentes dicti sunt non inquisitos. ad pristinū seruitiū reduximus.

(1) Questo pregievolissimo documento fu, per quanto a me pare, indubitabilmente scritto ne' primi anni del secolo xi (forse nel 1004 dopo la prima calata di Arrigo re di Germania); esso fu pubblicato una prima volta in Roma nel 1602 da Gio. Stef. FERRERIO nel libro *De vita et gestis S. Eusebii Vercell. episcopi*, e di nuovo dall'UGHETTI nel t. iv. *Ital. Sacrae* col. 773; ma queste due pubblicazioni essendo gremite d'errori, stimai giovevole cosa il trascriverlo nuovamente con ogni diligenza dall'originale, e qui stamparlo. Queste che seguono, segnate colle lettere a, b, c ecc. sono le annotazioni con cui lo illustra il FERRERIO op. cit.

(a) *Diuitiis inflati* (idest) « facti liberi inquinant nobiles et ipsam Ecclesiam ».

(2) Forse si dovo leggere *in ecclesia*.

(b) *Conueniat ergo domus Dm̄i*: « conueniant in unum qui sunt vere ex domo Domini ».

(c) *Et nouo et exquisito genere mortis*: « forsan intelligendum per civilem mortem, » qua ex libertate redigantur iterum in seruitutem ».

(d) *Per quod maleficium et captiosum laqueum libertatis*: « quia isti serui suo iudicio » se putabant iam liberi, et hac fraude decipiebant praesules ».

(e) *Chartarum colluuiis infectos*: « quibus chartis quasi privilegiis libertatis utebantur; quao erat colluuiis ad inquinandos vere nobiles ».

N. 15. Ottonis et Imp. diploma Leoni ep̄o vercellensis Ecclesiae
concessum an. 999.

Dal DUBANDI
Piem. traspad.
p. 148.

An. 999.

In nomine etc. Otto etc. imperator augustus. Iam dudum omnia, quae data sunt Sancto Eusebio confirmavimus, scilicet ea quae sunt necessaria (1), et maxime quae Carolus imperator Liutvardo episcopo aut dedit, aut reddidit, iterum atque iterum ex nunc confirmamus, et successores nostros idem agere rogamus; *quod nos ipsi imperatoris Caroli praecepta legimus, et litterae in Ecclesia Sancti Eusebii a tempore Caroli super altare sancti Iohannis scriptae testimonium donant et ad veritatem recognoscendam fidem legentibus faciunt*; idest theloneum et districtum suarum plebium, et super sua habitantium, aquam de Sicida, aquam de Sarvo, aquam de Helevo cum utrisque ripis a loco ubi nascuntur, usque in Padum. aquam de Pado cum duabus ripis a Lionna (2) usque Plebem Martori, aquam de Duria cum utrisque ripis a Petragrossa usque Verrucham. Confirmamus Mataseam (3), Firminianam, Sestignum, Carisianam cum utraque ripa. Bugellam (4) cum omnibus suis appendiciis Galanicum, Ponderanum, Mulinariam, Andurnum, Causades, montem (5) Cisdolam, Pedrono Blatini, Bedulium, et Clavatiam, Candele et Clevoli, quia Berengarius et Adalbertus reges, quorum proprietates fuerunt, ei dederunt, et Treverem, et districtum per totum Bugellense, et Calamago (6) Radigada, Radigadella, Trebledo, et Orco, Vallem Cledi, et Vualda (7). Damus omnia praedia Ardoini filii Dadonis, quia hostis publicus adiudicatus episcopum Petrum Verecellensem interfecit, et interfectum incendere non expavit; et praedia eorum, qui exploratis armis, et ipsis manibus huic crudelitati interfuerunt, idest filiorum Ruperti (8) de Casale, Goslini, et Aymini de Liburno, Alberti et Cribaldi de Vuglano. Damus praedia illorum qui cum armis ecclesiam S. Eusebii vastaverunt, idest Olrici de Bayna (9), Rodorardi de Sandiliano, Andrici de Magnanigulo servi S. Eusebii, Alberici et Vilhelmi de Saluciola, Astulfi et fratrum ejus de Qualdincho (10), Ugonis de Palestre, Stephani de Chivolo (11), Ademari de Gambolade, Ugonis (12) de Ciriago. Aldonis

(1) Sed ea quae sunt necessaria.

(2) a Limua.

(3) Mandastum

(4) Biccella.

(5) Montes Tissiodas, Podio-Blatium, Bedolium et Clavasiam, Caudelle et Clevoli.

(6) Et Clavasium.

(7) Radagada, Madagadella, Tribledo, Arco, Valle, Dade, Vualda.

(8) Teperti de Casale, Gollini et Armini de Livorno, Alberti et Aeribaldi de Viglano.

(9) Olrici de Bena.

(10) De Valdengo.

(11) De Clivolo.

(12) Ingonis.

de Leuriana, Ysac et fratris ejus. Confirmamus Sulgiam cum Silva Salsa, castellum Victimuli (1), mercatum et districtum Plebis Sanctae Aghatae, et curtis de Asceliano (2), et in Troneiano et in altero Troneiano, et per totam campaniam et castellum Quirini. Damus praedia Agadi subdiaconi in Sancta Agatha, Goslini, Constancii, Guidonis, Gurardi (3), Amizonis fratris Gunterii. Confirmamus Sanctam Mariam in Oliade (4), quae dicitur Monasteriolum cum sua pertinentia, cum Bornade, et Grignaseho, et districto Vallis Sicidae, et herimannos de Navola (5), et de Casaliglo, et Sylvam Rovaxindam. Damus Gattinariam cum districtu, et omnia praedia Giselberti archidiaconi Vercellensis, et hoc iuste, quia cum esset de familia S. Eusebii inflatus divitiis ecclesiae, ecclesiam dominam suam fugit, eamque cum Ardoino miserabiliter vastavit. Similiter ei damus praedia suorum generorum (6), idest Vicilianni (7) de Causade, et Nigizonis de Rade, et parentum ejus servorum fugitivorum, idest Liprandi, et Hermanni fratrum, et Gyselberti iudicis; districtum et theloneum in Rade, Ghislarincho, Arbori, Gregi, Albano, Conflencia. Odonicum cum districtu reddimus, et ecclesiam Sancti Salvatoris ultra Padum, sicut Carolus Augustus fecit. Confirmamus (8) Montem Pedogletum et Brosules, et districtum in Palaciolo, Gorzano, Livagi, Gabiano, Cantavenna, Carderisi, Uliaco, Malione, Arcelli, Medulae, Herbara. Confirmamus districtum Sancti Evaxii a Pado usque in Sturam, in Fraxanto, Pasciliano, Ticinense, Sarmatia, et Sancto Georgio, et in Ozano (9) ultra tria milliaria, praedia Arderici de Monterone (10), Milonis de Salerana, Thedixii de Lavagna, Disonis de Goagazia (11), Hermanni iudicis, Graseverti de Ciriseido, et fratrum ejus; Cerro, Cavalli, castellum sancti Angeli in lacu majore, *abbatiam de Arona confirmamus, sicut praeceptum Caroli testatur*. Cerretum, Vulpata (12), Casanova, curtellam in Bremide confirmamus, quia propria fuerunt Albuini servi

(1) Confirmamus Salsiam cum Sylva Salsa, castellum Vicinili.

(2) De Cisiliano.

(3) Godonis, Sonandi.

(4) Moliade.

(5) De Cravola.

(6) Germanorum.

(7) Mulmianum de Causade et Nigizonis de Rade, et praedia parentum eius servorum fugitivorum, idest Liprandi, et Hermanni fratrum, Ghisemberti iudicis; districtum et theloneum in Rade, Ghislarengo, Albano, Conflencia, et Odonicum cum districtu.

(8) Confirmamus montem Ledoretum, et Brasules, et districtum in Palazolo, Gorsano, Liviani, Gabiano, Cantavenna, Carderisi, Villata, Maglione, Azelli, Medole Herbara.

(9) Et Morano, et ultra.

(10) Alberti de Moncerone.

(11) Disonis de Crovara.

(12) Milpata.

S. Eusebii de plebe Bagella. Cortem Torcelli (1) confirmamus, sicut Liprandus rex donavit. Cortem Canavam reddimus, sicut Ludovicus imperator donavit. Damus autem S. Eusebio omnia praedia Cuniberti (2) archipraesbyteri, et hoc iuste et rationabiliter, quia omnia quae de bonis ecclesiae exierunt, iudicio ecclesiae et seculi ad ecclesiam, cuius fuerunt, pertinebunt. Confirmamus S. Eusebio abbatiam de Lucejo, sicut Carolus augustus, et divinae memoriae genitor noster fecerunt. Confirmamus S. Michaeli de Lucejo hanc pertinenciam quam Hortum S. Michaelis vocamus, idest a Monte Regis usque Aquam Nigram, sicut currit Ampori (3), et usque Fossatum Axinarium, et sicut (4) ecclesia S. Mariae a Ponte, et Stura currit subtus Broilum Vetus. Confirmamus Aleram usque Gardinam (5), et usque Roncumsicum, et a terra Mortuorum (6), sicut Ampori tenet, usque in caput Montis Salacesse (7), et usque in Padum. Confirmamus Camassa Nigra (8), et totum Versade usque in Ampori, et totum Andolium intra Duriam et Padum cum Zebedasco. Confirmamus S. Michaeli de Lucejo sicut Lotarius augustus donavit, quando corpus S. Januarii ibi collocavit, cortem Quadradulam cum districtu herimanorum, et theloneo, et aquam Padi a portu Clevasi cum utrisque ripis usque ad Clorum (9) ubi vetus Duria intrat in Padum, et a Cloro (10) usque Midine et Marinica. Silvam de Lucejo, et Cuzuningum (11), et Silvam Palazolascam confirmamus S. Eusebio, sicut ab antiquis semper pertinuit. Confirmamus Romanianum, et Aucinianum (12), sicut Carolus augustus donavit et confirmavit. Si quis autem Sanctam Vercellensem ecclesiam disvestiverit, aut molestiam intulerit, componat mille libras auri puri, medietatem Camerae nostrae, et Sancto Eusebio alteram. Quod ut credatur, et conservetur, hoc praeceptum manu nostra firmavimus, et amore Leonis Episcopi, qui nobis fidelissimus amicus (13) est, aureo sigillo nostro jussimus insigniri.

Signum Domni Ottonis gloriosissimi Romanorum Imperatoris Augusti.

Heribertus Cancellarius Vice Petri Cumani Episcopi, et Archicancellarii recognovit.

(1) Manca sopra *Cerretum*, e qui dupo *Bagella* o *Bivella*, leggesi: et *Cerretum* Torselli confirmamus.

(2) Gimberti.

(3) Dopo *Ampori* leggesi: et usque Solarium-Arsum, et usque etc.

(4) Et sicut est ecclesia.

(5) Confirmamus Alberam, atque Gardinam

(6) Munctuorum.

(7) Balasese.

(8) Tamasaniga.

(9) Ad Merum.

(10) Et a Duria usque Rancilum et Marinica Silva de Lucedio.

(11) Et Runcum-siccum et Casam Ugonis et Silvam Palazolastam

(12) Confirmamus scto Eusebio, sicut ab antiquis semper pertinuit, Romanianum Augumanum, sicut Carolus Aug. etc.

(13) Qui nobis fidei testimonio aureus est, aureo sigillo etc.

Datu^r nonis Maji Anno Dominicae Incarnationis nongentesimo nonagesimo nono, Indictione duodecima, Anno Tertii Ottonis Regis Quinto-decimo, Imperatoris tertio (1).

Actum Romae feliciter (2).

N. 16. Diploma Ottonis III Imperatoris, quo ecclesiae vercellensi omnes praedecessorum suorum donationes confirmat. Sequitur Sylvestri II S. P. bulla confirmationis quoad comitatum Sanctae Agathae.

Hist. P. mon.
chartarum t. I.
c. 325 n. cxciii.
(da cop. siner
dell' archivio
della cattedr.
di Vercelli).

An. 999.
die 7 maii

In nom.^e S.^{ae} et Ind. Tr. Otto divina favente clementia Romanorum invictissimus Imp. Aug. Notum sit omnibus Dei cultoribus et nostri Imperii fidelibus quod pro respectu divini amoris, et pro petitione optimi hugonis nostri illustri marchionis supplicante domno papa Silvestro et intercedente heriberto nostro dilectissimo cancellario concessimus Leoni nostro ep^o sueque sc^ete vercellensi Ecclesiae ubi sc^etus Eusebius requiescit totam civitatem vercellensem in integrum cum omni publica potestate in perpetuum more precessorum atque predecessorum nostrorum. Et ut constantiam fidelis nostri constanter remuneraremus ut ceteri promptiores ad obsequium nostrum *consurgat*. Liberalitas nostri imperii pro dei et scⁱ Eusebii amore donavit predicto leoni ep^o omnibusq. successoribus suis in ppetuum totum comitatum vercellensem in integrum cum omnibus publicis pertinentiis et totum comitatum quem dicunt sc^ete agathe in ppetuum cum omnibus castellis uillis piscationibus venationibus silvis pratis pascuis aquis aquarumque decursibus et cum omnibus publicis pertinentiis cum mercatis cum omnibus teloneis et cum omnibus publicis functionibus ut remota omnium hominum omni contrarietate tam leo sc^o vercellensis sedis ep^{us} quam omnes sui successores ad honorem dei omnipotentis et ad reuerentiam scⁱ Eusebii magnifici episcopi inuicti contra heresiarchas militis et in civitate vercellensi

(1) Secundo.

(2) Questo diploma fu pubblicato dall'UGNELLI (It. S. I. IV. col. 772.), dal MURATORI (Ant. m. ae. t. VI. col. 317.), e dal DURANDI (Piemonte Traspadano, Alpi Graie e Pennine p. 148.); io vi aggiunti in più di pagina le varianti adottate dal TERRANEO (Tabular. celto-ligust. part. 2., ms. della R. Università). Il GIULINI ed il DURANDI credono, che sia perchè l'avidità del vescovo Leone avesse ingannato la fiducia di OTTONE III, o che altrimenti la cosa accadesse, alcune giunte siano state fatte al diploma: ciò farebbe credere soprattutto, il vedere che: « la Badia di Arona siccome fondata nel secolo decimo, e non molto prima del finire di esso, vogliasi » donata da Carlo il Grosso a Liutardo vescovo di Vercelli nel secolo nono » (GIULINI Mem. della città etc. di Milano, part. 2. p. 461.).

intus et foris et in toto dominatu uercellensi intus et foris et in toto comitatu sc̄e agathe et in omnibus eorum pertinentiis liberam habeat potestatem placitum tenendi legem omnem faciendi omnem publicum honorem publicam potestatem omniam publicam actionem et omnem publicam redditionem habendi exigendi et secundum propriam uoluntatem et potestatem iudicandi, et omnem potestatem, et omne dominium publicum quod ad nos pertinuit in potestatem et in dominium sc̄e uercell.^{is} ecclesie et leonis nostri episcopi et omnium sibi successorum dedimus largiti sumus et omnino concessimus in perpetuum. Nostra igitur imperiali maiestate precipimus ut nullus dux nullus marchio, *ne etiam yporiensis marchio* nullus comes nullus uicecomes, nullus archiepiscopus nullus episcopus nullaque nostri Imperii magna aut parua persona *nullus italicus nullusque teutonicus* audeat sanctam uercellensem ecclesiam aut praedictum Leonem episcopum aut aliquem eius successorem de comitatu uercellensi et de comitatu sancte agathe aut de aliqua eorum pertinentia inquietare molestare disuestire aut ullum placitum ibi tenere aut ullum districtum ibi habere aut ullam publicam exactiorem ullo ingenio ibi exigere aut mereatum aut teloneum ibi querere. Et si aliquis aliquod scriptum de mercatis aut teloneis ad comitatum uercellensem et ad comitatum sancte agathe pertinentibus ostenderit sit inane sit uacuum nullius unquam auctoritatis uel firmitatis habendum. Sed liceat tam leoni episcopo quam successoribus eius omnibus ad honorem Dei et sancti Eusebii omnem liberam potestatem habere in perpetuum et in ciuitate et in toto comitatu uercellensi et in toto comitatu sancte Agathe et in omnibus eorum pertinentiis ut libere et seure permanente Dei ecclesia prosperetur nostrum imperium triumphet corona nostrae militie *propagetur potentia Populi Romani et restitatur respublica* ut in huius mundi hospitio honeste uiuere de huius uite carcere honestius auolare et cum Domino honestissime mercamur regnare. Si quis autem contra hoc nostrum preceptum per aliquod ingenium ire presumpserit componat mille libras auri camere nostre medietatem et sancte uercellensi Ecclesie alteram. Quod ut omnino credatur et in eternum conseruetur manu nostra firmauimus in eternum Deo adiutore uictura et tribus sigillis precepimus insigniri quia amor sancte Trinitatis pro qua pugnavit sanctus Eusebius ad hoc nos traxit ut suam Ecclesiam suumque successorem tanto et tali honore donaremus. Qui hoc preceptum seruauerit sancta Trinitas eum benedicet

Qui autem fuerit transgressor, sancta Trinitas eum maledicet et inter hereticos damnabit.

Signum domni Ottonis glorios̄i Romanor^{um} Imp. Aug.

(Monogramma)

Hilbertus cancellarius ad uicem Petri ep̄i et archicancellarii recognovit.

Data non. maii an. dom. incarnationis mcccxcix ind. xii. an. tertii Ottonis regis xv. imperatoris iii. Actum Romae felie. Amen.

In nom. trinitatis indiuiduae et aeternae Silvester papa seruius ser-
uoru Dei. Clareat eunetis ad presens in uita degentibus et in poste-
rum nascituris quod honorabili interuentu et digna petitione nostri filii
domni Ottonis piissimi imperatoris per nostre auctoritatis priuilegium
affirmauimus sēte agathe comitatum cum omnibus publicis pertinentiis
et omnibus castellis uillis piscationibus uenationibus mereatis teloneis
et omni exactione in integrum ab hinc in ppetuum permanere et im-
mutabiliter persistere sub ditione sēto uercellensis Ecclesie quem pro
amore Dei et sancti confessoris Eusebii qui inibi requiescit summa
eiusdem pie memorie domni Ottonis imp. (1) liberalitas omnino conce-
sit eo pacto ut nemo uiuentium imperator aut rex marchio seu comes
nullus italicus nullusque teutonicus aut aliqua quecumque persona qua-
libet temeritate aut ingentii molimine audeat suprafate basilice ulla
contrarietatem aut molestiam quandoque inferre. At si quis forte tempta-
uerit tante imperiali donationi contraire et nostre huiusce affirmationis
transgressor sanctam Dei Ecclesiam turbare certauerit confusus ab eo
omnipotente deo et abiectus proculque fugatus ab omni societate fide-
lium maledictus a uirgine uirginum et a michaele summo archangelo-
rum et a beato clauigero petro principe apostolorum et a ceteris ordi-
nibus sanctorum sit anathema maranatha et ueniant super eum omnes
maledictiones que in utriusque testamenti uolumine leguntur et feriat
eum omnis Ecclesia que quaqua uersum per orbem diffusa fidem sancte
apostolice sedis respicit imitatur et inuiolabiliter credit ut in pceatis
manducet et bibat in eisdem dormiat iocetur sedeat stet semperque
uersetur et suum uiuere sit mors que fine careat et omni remedio
egeat donec sepe diete sancte Ecclesie et prouisorii eius sua in integrum
restituantur. Ut autem hec nostre auctoritatis confirmatio nostris suc-
cessorumque nostrorum per tempora labentia temporibus irrefragabiliter
persistere ualeat more nostro eam subscribere et de bulla nostra ius-
simus sigillare.

(1) Le parole *eiusdem pie memorie* farebbero credere che questa bolla di conferma sia stata concessa dal Pontefice Silvestro II dopo la morte di Ottone III. Ciò posto la sua data vorrebbe assegnarsi tra il 23 di gennaio dell'anno 1002, giorno della morte di quest'Imperatore, ed il dì 11 maggio 1003 in cui seguì quella di Silvestro II. E si badi che il diploma d'Ottone essendo stato tratto da copia sincrona, è cosa probabile che in essa sia poi stata aggiunta più tardi la conferma del Pontefice. Tali trascrizioni usavano assai.

N. 17.

Diploma Ottonis in Romanorum Imp. pro Ecclesia
yporediensi.

An 1000.
Dat. vii. id.
juli Ind. xiii
Act Papiæ.

Inedito.
L. G. Pr.

In n. s. et ind. trin. Otto Dei gr. Imp. Romanor. et semper aug. Quia Ecclesiasticis institutis proficimus merito Ecclesiasticis profectibus insistimus. Cunctis igitur Deo nobisq. nunc et imposterum militantibus pateat, Nos pro animæ nostræ futura recompensatione, et Henriberti nri dilecti fidelis, et sctæ Coloniensis Ecclesiæ Archiep^o petitoria intermentione juxta nostra^m concessionis præmissam auctoritatem Iporediensi Ecclesiæ omnem ejusdem Ciuitatis districtum et publicam functionem, atque forin secus circumeire per tria miliaria præsentis paginæ aureis litteris decoratae testimonii, et auctoritate concessisse, corroborasse, et firmiter habendum statuuisse eum curte una Romano dicta sub titulo acquisitionis pertinente et altera Florano nominata cum omnibus earum pertinentiis et familiis seu capistraticis, eo uidelicet ordine, quatenus Varimondus præsens ejusdem Ecclesiæ prouisor, et cuncti pro tempore ibi locandi prædictum districtum eum jam dietis entibus et publicis functionibus, earumque pertinentiis, et adiacentiis, habeant teneant, firmiterq. possideant, habeantq. licentiam legali seu duellari definitione emissuras contentiones dirimere, nostra nostrorumque successorum, et totius dignitatis seu officii hominum contradictione remota. Si quis igitur huius nostræ corroboracionis statuto contraire temptauerit centum talentorum reus existat, medietatem nobis, et aliam medietatem eidem Ecclesiæ persolueudorum. Et ut uerius credatur aureo sigillo iussimus insigniri.

Signum () D. Ottonis inuictissimi imperatoris et semper augusti. Henricus cancellarius uice Petri Cumani Epⁱ cognouit — Dat. vii id. juli an. d^e Inearn. millesimo, Ind.^e xiii. an. terciū Ottonis regis xvi. et imp. v. Actum Papiæ cum continuacione felicitatis. Amen Deo gratias (1).

(1) Le note cronologiche confermano la legittimità di questo documento favorito a me dal non meno gentile che erudito Monsignore D. Luigi Moreno Vescovo della città d'Ivrea; giacchè nell'anno 1000 correva appunto l'Ind. xiii, come correva l'anno v dell'impera d'Ottone: quanto agli anni del regno dovrebbero leggere il xviii e non il xvi, ma frequenti esempi addotti dal MURATORI (in specie ved. annali ad ann. 1000 e 1001) dimostrano che a più d'una era l'epoca del regno, che s'indicava ne' diplomi imperiali d'Ottone III, o che l'imperizia de' cancellieri cadeva sopra di ciò in frequenti sbagli. Del resto questa copia del secolo xiii merita fede bastante nella mancanza del diploma originale, che forse più tardi si potrà rintracciare, nel proseguirsi l'ordinamento dell'archivio vescovile d'Ivrea, cui per cura del Rev. Vescovo si sta attualmente provvedendo. Aggiungasi ancora per la validità di esso, che dal MARGARINO (Bollar. Cass. t. 2. constit. 68.) abbiamo che di fatto Ottone III addì 6 di luglio stava in Pavia, onde egli poteva molto bene ancora trovarsi in quella

» Suprascript. privilegium sive rescriptum a formularu libro vulgo Prothocollo q.^m D. Notarii Bonaventurini de Mantua caractere antiquo scripto, et in hoc Ep̄i Epored. Archivio servato sub n.^o 14. modo quo supra pp̄ia manu fideliter extraxi, debiteque collatum concordare reperi, Ego Jos. Andreas RONCO publ. reg. auct. not. Curiaeque Episcopi Epored. Cancellarius, necnon praedicti archivii Praefectus hic in fidel. manual. subscriptus, apposito etiam ejusd. Curiae consueto sigillo. Dat. Epored. die vii. sept. 1774. »

» *Sottoscritto* Ronco Cancell. e Archivista. »

N. 18. Ottonis III diploma quo ecclesiae vercellensi omnia praedia Ardoini marchionis, atque Ardicini filii eius, nec non privilegia alia concedit.

Dal Mon. Hist.
P. I. col. 338.
u. cxcvii.

DURANDI
Marca d'Ivrea
in Piem. trasp.
p. 99.

An. 1000
die 1. nov.

In nom.^o &c.

Otto &c. Romanor Imp. augustus. Notum sit uniuersis nostris fidelibus quia pro diuino amore et pro leonis nr̄i Ep̄i petitione audita dilapidatione sancti Eusebii ab uxoris antecessoribus facta concessimus sancte uercellensi Ecclesiae ut in castello sc̄e agathe aut in burgo eius aut per quinque milliaria in introitu nullus unquam hominum placitum teneat aut fodrum colligat aut albergarias faciat publicas aut ullam publicam exactionem exigat nisi uercellensis Ep̄us aut eius missus in tota campania nullus thelonia capiat nullus mercata habeat publica nisi uercellensi Ecclesia dedimus uercellensi Ecclesiae andurnum mulinariam ponderana motem et fidolam (1) Galanicum cum omnibus suis pertinentiis dedimus sc̄o Eusebio omnia praedia maledicti ardoini filii dadonis quia eius episcopus interfecit et incendit Roueredum Riuarolum Riuaruptam reddimus canauam rodiliteguam (2) dedimus sparono castellum ualle

città il dì vii degl'idi di quel mese, cioè addì 9 di luglio, data di questo diploma.

Alla lista pertanto delle esenzioni concesse dagli Ottoni alle città d'Italia, datati dal Cav. VESME (*Vicende della proprietà in Italia*, lib. III. cap. VII.) conviene aggiungere quella che col presente diploma di Ottone III ottenne nell'anno 1000 la città d'Ivrea.

Notisi ancora che questo diploma fu anteriore a quelli concessi da Ottone III a Leone Vescovo di Vercelli nell'anno medesimo, cioè nell'anno 1000, ma addì 1.^o di novembre, dati in Roma.

Per ultimo si badi che Bonaventurino da Mantova scrittore del Protocollo, d'onde ho estratto questo documento, fu notaio della curia vescovile d'Ivrea a' tempi del Vescovo Alberto Gonzaga mantovano, cioè tra gli anni 1288 e 1322.

(1) Montem Cisdolam (DUR.).

(2) Et Rodilitegnam (ib.).

suanam ualle origanam fontanedum Barsan Suanam et omnia predia ardoini ubicumque iacent cum omnibus pertinenciis dedimus ^{scto} Eusebio cortem Sisballanam et Gatinarum in integrum que iuste perdidit ardiscinus (1) filius ardoini marchionis quia uocatus ad palacium papae (2) ut legem fecerunt noctu aufugit et ipsam presenciam (3) nullius reuerencie habuit confirmamus et redimus ^{scto} Eusebio omne forestum de lœccio et totam siluam Rouaxindam Confirmamus ^{scto} Eusebio monasterium de lauceio cum omnibus suis pertinenciis et confirmamus omnia precepta eidem ^{scto} Ecclæ a nostris predecessoribus facta statuimus quoque ut omnes filii uel filie clericorum et familia (4) ^{scti} Eusebii in seruatione Ecclæ remaneant neque liberis matris si clerico suo adhesit (5) hiis qui nati fuerint prosint uolumus (6) rogamus etiam successores nostros sub (7) Dei timore contestamur ut omnia cambia illicita et seruos Ecclæ illicite liberatos ad pristinum usum uenire cogant et ad antiquam seruitutem uenire compellant maxime Ingonis episcopi omnia cambia frangant qui pro adulterio sanctam agatham eum seruis ancillis et ipsam mortuorum sepulturas ab Ecclesia alienauit monasterium ^{scti} Stephani annullauit quia caballiacam per cambium diabolicum ei abstulit Lauceium monasterium disperdidit quia alicæ (8) ab eo alienauit ipsam ciuitatem uercellensem ita publice quod nec terras neque seruos ibi esse permixit (9). Omnia quæ superius dicta sunt et caualliatam alicem et ^{sctam} agatham et omnia eorum pertinencia ^{scta} uercell.^a Ecclesia habeat teneat et in perpetuum proprietatem diuididet. si quis uero ullam molestiam de hiis omnibus Episcopis Ecclesie uercellensi fecerit mille libras iusti auri componat uercellensi Ecclesie medietatem ei et nobis alteram, et hoc preceptum in sua maneat firmitate quod ut credatur et conservetur manu nostra hoc firmauimus et nostro sigillo precepimus insigniri.

Signum domni Ottonis inuictissimi augusti.

(Monogramma)

Henertus cancellarius nice petri cumani episcopi recognoui

Data kal. nou. anno dom. inc. indiet. viii. anno tercii Ottonis regis xv (10) imperii uero quinto. Actum Romae in palacio monasterio fel. amen.

(1) Ardiscinus (DUR.).

(2) Papale (ib.).

(3) Et ipsam pape presenciam (ib.).

(4) Et filiao Clementis ex familia ^{scti} Eusebii (ib.).

(5) Liberi matris si clerico seruo adhaesit (ib.).

(6) Volumus.

(7) Nostros et sub (ib.).

(8) A lite (ib.).

(9) Promixit (ib.).

(10) Datum kal. nou. anno Domini m. indiet. xiv., an. tercii Ottonis regis xvii. imp. uero v., Act. Romae in palacio Montis, fel. (ib.).

N. 49.

Dal Mon Hist.
P. I. col. 339.
n. CXCVIII

An. 1000
1. novembr.

Diploma Ottonis in Imperatoris quo ecclesiae vercellensi
praeecedentes donationes confirmat, totumque aurum
quod invenitur et elaboratur infra vercellensem epi-
scopatum et vercellensem comitatum atque plura alia
privilegia concedit.

In nomine &. Otto & Imperator aug.

Notum sit omnibus nostris fidelibus Leonem nostrum Ep^{um} nostram
supplicem exorasse elemenciam ut suum episcopatum pro Dei amore
et s^ci eusebii et pro sua laudabili fidelitate ita nostris publicis rebus
donaremus et datis ita confirmaremus ut s^ca Ecclesia omni parte
libera nullis feriatu aduersitatibus sed secura Deo sancto eusebio, nobis
et presenti Leoni Ep^o eiusque successoribus seruiat. hanc iustissima
postulacionem audientes omnem forestum quod est inter baonam et
sturam et omnem forestum publicum a strata ronearolii usque in baon-
nam et usque in monasterium s^ci michaelis in loccio et usque in cur-
tem sulziam dedimus et confirmauimus s^cto Eusebio Leoni Ep^o suisq.
successoribus omnibus ut secrete teneat et quod uellit faciat tantum ad
utilitatem ecclesie dedimus et confirmauimus s^cto eusebio omnem aquam
publicam et ripas publicas cum molendinis portubus uenacionibus et
piscacionibus ab illo loco ubi Sicida flumen intrat in padum usq. in
portum de gabiano. dedimus et confirmauimus sancto eusebio in ppe-
tuum omnes insulas piscationes uenationes et ubi aues capiuntur a bal-
zola usq. ad s^ctum euaxium et usq. ad carisianam. dedimus et con-
firmauimus s^cto eusebio cortem Firminianam in integrum et cortem
cleuoli in integrum et cortem montem in integrum et cortem cande-
le in integrum cum seruis ancillis pratis pascuis uenacionibus molendinis
siluis teloneis et cum omnibus ad easdem cortes ex omni parte omnino
pertinentibus ut tam Leo Episcopus quamque sui successores secrete
quiete teneant ordinent et ut uoluerunt iudicent. Dedimus et confirma-
uimus sancto Eusebio et s^cto michaeli in lauccio cortem quadradula et
cortem turbam et cortem triueri cum seruis ancillis siluis piscacionibus
uenationibus pratis pascuis portubus et eum omnibus ex omni parte
ex toto ad easdem cortes pertinentibus dedimus et uolumus ut in eter-
num sanctus eusebius habeat et leo ep^{us} omnesq. sui successores cum
omni pace ad proprietatem. radiganda et cortem geniziasto cum
omnibus seruis ancillis pratis pascuis aldionibus siluis montibus et pla-
nieie uillis et omnibus casis et cum omnibus rebus mobilibus et immo-
bilibus ad eandem cortem pertinentibus. Dedimus et confirmauimus
s^cto Eusebio cortem cauconada et cortem sulziam in integrum cum
seruis ancillis aldianibus pratis pascuis siluis uenacionibus molendinis
aquis et cum omnibus rebus ad easdem cortes pertinentibus. Dedimus
et confirmauimus s^cto Eusebio tres mansos in carazona unde mel pu-
blicum reddi solet et quicquid de publico ibi habuimus cum seruis

casis pratis pascuis et cum omnibus rebus ad easdem mansos pertinentibus. Dedimus et confirmauimus s^cto Eusebio omne quod de publico habuimus in quirino et in castello et in nullis et siluis pratis pascenis ripis montibus alpidibus uenacionibus piscacionibus seruis ancillis aldionibus molendinis uineis uinetis et aqueductibus et cum omnibus que unquam a parte publica ad eandem cortem pertinuerunt. Dedimus et confirmauimus s^cto Eusebio omnem aquam de sicida a fine inter gatinariam et romanianu^s usque dum ipsa aqua sicida intrat in padum et molendinis portubus ripis piscacionibus uenacionibus panteriis et cum omnibus que in ipso flumine supra et infra ex omni parte fieri possunt. Dedimus et confirmauimus s^cto Eusebio totam aquam de saruo de Androni usque dum intrat in padum cum molendinis piscacionibus portubus et cum omnibus que ad publicum pertinuerunt. Dedimus et confirmauimus s^cto Eusebio ut cum omni potestate habeat et teneat de tedua usq. in padum piscaciones uenaciones molendinos pantere ut nullus mittere audeat nauim ad piscandum aut rete ad piscandum aut pantere sine iussione uercellensis episcⁱ. Dedimus et confirmauimus s^cto Eusebio totum forestum mortilianum in integrum ut nullus hominum audeat ibi ullam uenacionem facere sine uoluntate et iussione uercellensis episcⁱ. Dedimus et confirmauimus s^cto Eusebio et Leoni nostro fidelissimo episc^o suisq. omnibus successoribus in ppetuum totum aurum quod inuenitur et elaboratur infra uercellensem episcopatum et uercellensem comitatum et infra comitatum s^cte agathae et infra iura et infra pertinentias s^ci michaelis in laurecio et infra alias terras ad episcopatum uercellensem et ad comitatum pertinentes. Volumus enim ut sicut in nostram cameram aurum solitum reddierat ita deinceps in aeternum in kamera s^ci Eusebii deferatur ut nostra memoria non deficiat ibi et quod auro uitam eterna^m acquiramus. precipimus igitur ut nullus dux marchio comes uicecomes nullus archiepiscopus episcopus nullaque parua aut magna persona s^cti eusebium aut leonem n^{ost}rum episcopum uel suos successores de omnibus istis disuestire inquietare molestare presumat sed liceat tam leoni quamq. eius successoribus ad honorem Dei et s^ci Eusebii ad nostrum seruiciu suamque utilitatem omnia que suprascripta sunt quiete pacifice cum omni potestate habere tenere et facere et iudicare quicquid propria decreuerit uoluntas saluo Dei respectu omnium hominum contrarietate remota. Si quis autem nostris aut futuris temporibus diabolico ductus spiritu s^cti^m Ecclesiam uercellensem leonem episcopum aut suos successores in aliquo de his omnibus que suprascripta sunt aliquo ingenio disuestire aut ulla racione inquietare uel fatigare aliquando presumpserit componat mille libras auri medietatem nostrae camere et uercellensi ecclesie alteram et preceptum firmum permaneat Quod ut uerius credatur et diligentius obseruetur manu propria confirmauimus et nostro sigillo ut in eternum uiuat uerissime iussimus insigniri.

Signum domni ottonis glorⁱ Romanorum imp. aug.

(Monogramma)

Heribertus cancellarius ad uice^m petri episcopi recognouit.

Datum kal. nou. an. dom. incar. indiet. xiii an. tercii Ottonis regnantis xv. (1) imperii uero v. Actum Romae in palacio monasterio (2) feliciter amen.

N. 20. Ottonis III praeceptum per quod Leoni Epo vercellensi, eiusq. Eccl.^{ae} duas curtes Clavasiam et Bedolium elargitur.

MURAT. Ant.
m. aev. I. v.
Diss. LXVII.
col. 647.

An. 1001.
die 18 ian.

In nom.^e sc̄ae & indiv.^{ae} &c. Otto tertius secundum voluntatem Iesu Christi Romanor. Imperator Aug., Sanetarumque Ecclesiar. fidelissimus dilatator. Notum sit fidelibus nr̄is qualiter interventu et petitione Ugonis marchionis nostri dilectissimi fidelis, dedimus sc̄to Eusebio cui domnus Leo Ep̄us praeesse videtur duas cortes juris nr̄i Clavasiam et Bedolium in integrum cum omnibus terris massariitiis &c. ut tam Leo Ep̄us quam omnes sui successores habeant &c. salva tamen Dei reverentia, et honore sc̄ae Ecclesiae &c.

Dat. xv cal. februar. Ann. D.^{cae} Incarn. millesimo primo, regni vero domni tercii Ottonis xvi. Imperii vero v., Ind.^e xiv.

Actum Romae in Palatio fel. Amen.

N. 21. Privilegium Arduini regis Italiae, Monachis Cassinensibus S.^{ti} Salvatoris Papiac concessum.

(Ex collectan.
instr. comitum
Valpergiae)

Exstat in Bull.
Cassin. Mon.
(MARGARINI)
I. I. const. 71.
ubi deest quo-
que Indictio-
nis nota

An. 1003
die 20 febr.

In nomine S.^{clae} et Individuae Trinitatis. Arduinus rex divina providente clementia secundum voluntatem Dei Salvatoris, nostriq. liberatoris; Quidquid confirmationis et proprietatis ad Ecclesiarum Dei, Sanctorumque suorum exaltationem proebuerimus, id nobis ad aeternae beatitudinis bravium, et secularis vitae profectum esse profuturum verissime credimus. Igitur omnium sanctae Dei Ecclesiae fidelium, nostrorumq. praesentium, scilicet ac futurorum agnoscat universitas, qualiter nos propter Dei omnipotentis amorem, et ob remedium animae nostrae, parentumque nostrorum rogante domino Andrea Ven. Abbate, seu Caenobio ad honorem S. Salvatoris, haud procul a moenibus Ticinensis

(1) xvii (Dcr. I. c.).

(2) Montis (ib.). — Questo diploma fu pubblicato dal DURANDI (Alpi Graie e Pennine pag. 141), ma compendiato, e per quanto sembra assai scorretto.

urbis fundato, per hoc nostrum regale praeceptum, prout iuste, et legaliter valeamus, confirmamus, quemadmodum a tertio Othone praeceptali auctoritate confirmata sunt omnia quae eidem ven. loco donata collata et oblata sunt tam largifluo dono bonae memoriae dominae Adeleidae Imperatricis quam etiam aliqua inscriptione chartarum aliorum hominum. cum castellis villis curtibus cappellis oratoriis mansis campis vineis pratis pascuis silvis montibus uallibus planiciebus aquis aquarumque decursibus, piscationibus, molendinis, terris cultis et incultis ripis portubus servis ancillis aldionibus aldianis verum etiam cum omnibus, de quibus ven. Coenobium iuste investituram habet vel habuit ex ea die qua serenissima quondam memorata Adeleida monachos ibi constituit. confirmamus quidem et firmissima traditione largimur eidem monasterio S. Salvatoris monasterium S. Anastasii cum omni sua pertinentia una cum curte Ollana (1), Monticelli Erberia Barsilutia Frisinaria (2) Rivum Cervinum terram de petro Albesano terram quam tenuit Lintaldus cum manzo de Belinzona Tulianum Castorianum Caucomate Vergimini Geberlaseum cum districtu duorum milliarum in circuitu Viridarium prope Palatinam portam, et S. Iositam cum (3) omnibus pertinentiis suis et adiacentiis tam infra civitatem Tineinensem quam extra pratum regium: insuper monasterium S. Dei Genitricis Mariae in loco Pomposa dicto constructum et omnia quae in Comaelo eidem monasterio pertinent infra castrum seu extra tam in Reda, quam in Quinta Corva Cervino Figariolo (4), Zonzadega Zonzano Seminiano et omnes salinas et oliveta vel omnia, quae ad iam dictum monasterium S. Dei Genitricis Mariae, vel ad alia loca omnia quae Coenobio S. Salvatoris D. N. I. Christi pertinere videntur tam ibi quam in caeteris aliis locis necnon et Armentaria et Blondi cum pertinentiis ineffabilibus illi in proprium corroboramus. Praecipientes itaque iubemus ut nullus Episcopus, Dux, Marchio, Comes, Vicecomes, Gastaldus, nullaque regni nostri persona magna parvaeque de rebus mobilibus sive immobilibus sive de qualibet terra devestire idem monasterium sine legali iudicio praesumat. Sancimus insuper, et hac nostra regali auctoritate concedimus, ut si contigerit, quod soepe contingit quatenus Abbas praenominati monasterii huius huius habitaculum deserat liceat monachis ex sinu eiusdem Ecclesiae quem meliorem viderint eligere in patrem omnium Episcoporum vel omnium mortalium contradictione remota nec fas sit alicui monacho ex alio monasterio ad id transitum facere sine voluntate monachorum ibi Deo servientium in perpetuum. Si quis autem huius nostrae promulgatae auctoritatis et praecepti violator extiterit sive praedicto S. Salvatoris minorationem

(1) Olona.

(2) Herbaria, Basilutia, Frisinaria.

(3) S. Iohannis situm cum.

(4) Quinta terra Corvina Tiguriolo.

facere aut in castellis villis vel in quibuscumque locis eius arbergare placitum, sine eiusdem Coenobii Abbatis iussione ullatenus tenere aut aliquam angariam publicam functionem aut teloneum extorquere, aut tollere vel monachos de aliqua re praesumpserit molestare, sciat se compositurum auri cocti libras mille medietatem camerae nostrae ac medietatem Abbati eiusdem monasterii qui pro tempore fuerit et insuper quod ei deterius est cum Iuda traditore Domini Salvatoris nostri in cuius nomine iam dictum Monasterium constructum est aeternis deputabitur incendiis. Ut autem verius credatur hoc praeceptum nostra auctoritate peractum praesentem paginam manu propria et ut infra roborantes sigillo nostro iussimus insigniri.

R. S Signum D. Arduini regis invictissimi

Cunibertus Cancellarius vice Petri Cumani Episeopi Archicancellarii recognovit.

Dat. x. kal. martii, Anno Dominicæ Incarnationis 1002. Anno D. Arduini regis primo. Actum in Papiensi palatio feliciter. Amen (1).

N. 22. Privilegium Arduini regis Andreae Laudensis episcopo, eiusque successoribus concessum.

In collectanea
instrum. p. 17

An. 1002.

In nom.^e &c.

Arduinus gratia Dei rex. Si quis succursu pauperum, et subventionem Ecclesiarum sacris, et honorabilibus locis erogaverit, procul dubio (2) centuplum accipiet, et quod maximum est uitam aeternam possidebit. ideoque omnibus sanctae Dei Ecclesiae, nostrisque fidelibus praesentibus scilicet, atque futuris notum esse volumus tenore praesentium, Bertam videlicet dilectissimam coniugem nostram adisse clementiam deprecantem, quatenus ob amorem Dei, et nostrarum pariter redemptionem animarum, (3) nostrorumque parentum, filiorum, per nostri praesentis paginam concederemus Episcopatu Laudensi, ubi Andreas venerabilis Episcopus praesulatur, omnem redditum auri (4) quod in anno levatur in toto dominio (5) Castellorum Canavesi, et Galignani, qui redditus pertinere videntur Camerae nostrae. Nos autem

(1) L'originale di questo documento esiste in Milano nell'arch. diplomatico (scalf. n. 9 tav. n. 93.) e tiene l'Ind. xv, che manca in MARGARINO, la quale corrisponde perfettamente coll'anno 1002.

(2) Procul dubio a Deo, et quod maximum etc. (ap. UGHELLI II. S. I. IV. col. 661.)

(3) Nostrorumque . . . filiorum, per nostri Praecepti paginam etc. (ib.).

(4) Quod in anno levatur etc. (ib.).

(5) Castellorum Cavenaci, et etc. (ib.).

paupertatem praefatae Ecclesiae Laudensis in (1) augmentum considerantes, iustae praelibatae Bertae reginae dulcissimae coniugis preces, atque voluntates. Per hanc nostri praecepti paginam prout iuste hoc in supradictis ripis lenatur per tota confinia praedictorum Castellorum cum omni districtione, ordinatione, defensione de nostra (2) regia auctoritate Episcopatus Laudensi concedimus, donamus, et pro aeternis temporibus habendum largimur. Cunctorum regum, omniumque hominum (3) contradictione remota Si quis contra hanc nostri praecepti donationem insurgere, atque contravenire tentaverit aeternae se gehennae vinculo astringatur, aut si violaverit manussos mille medietatem Camerac suae (4), et medietatem praedictae Ecclesiae Laudensi debita et ut hoc nostrum praeceptum scribere, nostroque sigillo iussimus insigniri.

Signum R. S. Arduini Ser.^{mi} et Invict.^{mi} regis, ego Eribertus Cancellarius uice Petri Cumani Episcopi, et Archicancellarii recognoui. Dat. &c. in palatio Episcopatus Laudensis. Anno Incarnationis Dom.^{ae} mil. Ind.^c xv. an. d.ⁿⁱ Arduini ser. regis regnante primo.

N. 25. Arduini Italiae regis diploma quo Petro Cumaio episcopo, castrum Berizonae (*Belinzona*) cum omnibus publicis redditibus concedit.

Dagli Annali
sacr. della Chi.
di Como del
P. TATTI (Mil.
1683, 3 vol. in
4.^o) Decade
seconda t. 2.
p. 817.

Extat in libul
episc. Novoc.

An. 1003
die 25 mart

In nom.^e s.^{tae} et indiv. Trinitatis

Arduinus Divina fauente elementia rex. Notum sit omnibus fidelibus nostris, quia interventu Bertae reginae nostrae dilectae coniugis, pro Diuino respectu, et pro salute nostra, et propagatione regni, et pro remedio animae nostrae dedimus in integrum, et in perpetuum Sancto Abondio omnem illam partem de castro Brizona, quae ad nostram publicam pertinuit, tam intus, quam foris, cum omnibus appendiciis suis, cum mercatis, teloneis, seruis, et ancillis, aldionis, et aldiabus, cum omnibus publicis redditibus, et functionibus, cum ipsa quoque porta, quae publico usui haecenus deseruiuit, ut libere, secure, et quiete, pacifice cum omni potestate. Et Petrus Cumanus Episcopus pro integritate suae fidei, et puritate seruiti, et omnes sui successores habeant, teneant, et quicquid uoluntas eorum decreuerit, ad cultum Diuinum fa-

(1) In augmentum considerantes iuxta praelibatae Bertae reginae dulcissimae coniugis preces atque voluntates, per hanc etc.

(2) Regia Laudensi concedimus etc.

(3) Contradictione Si quis etc.

(4) f.^e nostrae

ciant. Quia praedictum castrum Berizona cum omnibus, quae ad illud aut intus, aut foris pertinerunt, a nostro iure, et dominio, et ab omni publica repetitione in ius et dominium S. Abondii omnino transfundimus, dedimus, donauimus ut absque publico respectu, et sine omni ulla inquietatione publica, omnia suprascripta pertinentia cum seruis, et ancillis iam teneant; indicent et ordinent, sicut caetera loca, quae ante centum annos Ecclesia S.^{ti} Abondii acquisiuit, et tenuit. Decet enim regno nostro, et incrementum de hiis, quae Deus dedit, Deo dare; et ei honorem retribuere; qui gratis honorat, et a quo omnis honor procedit. Quod ergo Deo damus, de suo est, et quod eius sanctis conferimus, Dei dono, et sanctorum precibus recipimus. Honoremus ergo sanctos, ditemus loca sanctorum, ut ipsos apud Deum adiutores habeamus, et intercessores. Per hoc enim predecessores nostri multum Deo placuerunt. Per hoc et nos speramus, et uitae salutem, et regni augmentum, et pacis, prosperitatisque honorem. Iubemus igitur, ut nullus Dux, Marchio, Comes, Vicecomes, nullus Latinus, nullus Tentonius, nulla regni nostri magna, uel parua persona deinceps de praedicto castro Berizona, aut de aliqua eius pertinentia, aut intus, aut foris ullo tempore per aliquod ingenium se intronittere audeat, nec unquam Ecclesiam sancti Abondii disuestire praesumat, aut Petrum nostrum fidelissimum Episcopum Cumanum aut ullum eius successorem inde inquietare, molestare, aut per ullum placitum fatigare contendat, et praesumat. Si quis autem fecerit, mille libras coctissimi auri componat medietatem nobis, et S. Abondio alteram. Et hoc praeceptum omnibus temporibus in sua maneat firmitate. Quod ut credatur uerius, conseruetur diligentius, hoc praeceptum scribi iussimus, manu nostra firmavimus, et nostro sigillo insigniri praecepimus.

Signum Domni Arduini serenissimi et invictissimi regis

Cobertus Cancellarius vice Petri Cumani Episcopi, et Archicancellarii recognovit.

Dat. octavo kal. aprilis Anno Dominicae Incarnationis millesimo secundo Ind. v. Anno vero Domni Arduini regis regnante primo actum castro Montigio. feliciter Amen.

N. 24. Privilegium Arduini regis quo clero Comensis ecclesiae Clusas et Pontem et comitatulum de Clavenna confirmat.

Uud. p. 819.

Ex eod. tabul.

An. 1002
die 25 martii.

In nom.^e S.^{ae} et Indiu.^{ae} Trinitatis

Arduinus Divina fauente clementia rex. Si sanctis, ac uenerabilibus Christo dicatis locis, Deoque seruientibus nostrae serenitatis munus conferimus, per quod eorum religio sublimatur, procul dubio credimus apud omnipotentem Dominum undique remunerari. Quapropter omnium

sanctae Dei Ecclesiae fidelium, nostrorumque, praesentium scilicet, ac futurorum comperiat industria, quoniam Berta regina nostra dilecta coniux, nostrique regni consors, pietatis nostrae celsitudinem petiit, ut pro sempiterni retributoris amore, et salute animae nostrae, omniumque parentum nostrorum sanctae Cumanae Ecclesiae gregi, tam de Cardine, quamque omnium sacerdotum eunctorum, uel clericorum, cui fautore domino Petrus uenerandus Pontifex praeesse uidetur, Clusas, et Pontem, et comitatulum iuris nostri de Clavenna, cum omni reddito, et exhibitione, et districtione, quae usque modo ad partem Reipublicae inde exigi, et exire solebat, deinceps perpetualiter possidendum confirmare, concedere dignaremur. Quorum quia ratam prospeximus postulationem, eorum precibus libenter acquieuiamus, concedentes, atque confirmantes iam dicto sanctae Cumanae Ecclesiae gregi, tam de Cardine, quamque omnibus sacerdotibus, praefatas Clusas, et Pontem, et comitatulum de Clavenna, cum omni reddito, et exhibitione, et districtione, cum omnibus, quae ad publicum exinde solui possunt, omnia in integrum concedimus, et perdonamus, atque confirmamus eidem sanctae Cumanae Ecclesiae gregi, tam de cardine, quamque omnibus sacerdotibus, sicut hactenus iuris regni nostri uisa sunt. Eo uidelicet ordine, ut suprataxatus Grex sanctae Cumanae Ecclesiae, caeterique successores sui potestatem habeant, eas Clusas, et Pontem, et comitatulum tenere possidere, seu quicquam ex redibitionibus, uel censum facere uoluerint ad laudem, et honorem Dei, et sancti Abondii confessoris perpetualiter faciendum ex nostra plenissima auctoritate. Iubentes ergo sanctimus, ut nostris ac futuris temporibus nullus Dux, Comes, aut quislibet Reipublicae Procurator, neque alia qua (1) magna, paruaque persona cuiuscumque ordinis, aut dignitatis, ex praetaxatis Clusis, ac praelibato Ponte, Comitatum, censum ex hiis aliquid subtrahere, vel minutionem facere quoque tempore praesumat. Sed liceat praedicto Gregi sanctae Cumanae Ecclesiae, tam de Cardine, quamque aliis sacerdotibus, qui pro tempore fuerint, iam fatas Clusas, et Pontem, et Comitatum in integrum ad suorum usum quiete, et pacifice possidere, remota omni publica excubia, vel totius potestatis inquietudine. Si vero quod minime credimus, contra huius nostri praecepti statuta quisque temerarius extiterit, sciat se compositurum auri purissimi libras centum, medietatem palatio nostro, et medietatem praefato Gregi sanctae Cumanae Ecclesiae. Quod ut uerius credatur, et diligentius ab omnibus observetur, manu propria annotatum sigilli nostri impressione iussimus sigillari.

Signum Domni Arduini inuictissimi, ac serenissimi regis.

Cunibertus Cancellarius uice Petri Episcopi, et Archicancellarii recognouit.

Dat. octavo kal. april. an. Dominicae Incarnationis millesimo secundo Indictione quintadecima. Anno uero domini Arduini serenissimi regis regnante primo. Actum Castro Montigio. feliciter.

(1) f. aliqua.

N. 25. Eiusdem Arduini regis diploma Petro Comensi episcopo
 concessum, quo praedecessorum Imperatorum atque
 Regum privilegia Comensi ecclesiae elargita confirmat.

Ibid. p. 821.

Ex eod. tabul.

An. 1092
 die 25 mart.

In nom.^e S.^{ctae} et Indiv.^{ae} Trinitatis.

Arduinus diuina fauente elementia rex. Credimus Deo omnipotenti esse acceptum, animaeque saluti in praesenti, et in futuro magnum esse subsidium, si loca venerabilia, seruorumq. Dei coenobia sub nostra pio affectu retinere decreuerimus potestate, et quibus temporalem potestas praebet tranquillitatem, non dubitamus meritis, ac precibus eorum sempernam nos posse consequi felicitatem. Ideoque omnium sanctae Dei Ecclesiae fidelium, nostrorumque praesentium scilicet, et futurorum cognoscat deuota religio, quia uir uenerabilis Petrus sanctae Comensis Ecclesiae Praesul, serenitatis nostrae sublimitatem adiens, innotuit pietati nostrae, quomodo diuinae memoriae Karolus Magnus, atque Christianissimus Imperator, seu etiam et Ludouicus gloriosissimus Augustus, necnon Lotharius Caesar, filiusque illius Ludouicus Imperator, Karolus itemque et Berengarius reges, decessores nostri eandem sanctam Comensem Ecclesiam, et rectores ipsius una cum Clero, et rebus ad se iuste, et legaliter pertinentibus ob amorem Dei, et reuerentiam Beatissimi Abondii confessoris Christi, qui ibidem ueneranter humato corpore requiescit, sub plenissima defensione atque immunitatis tuicione affectu deuoto retinuissent, unde, et sacris nostris obtutibus uerissimas auctoritates immunitatum praedictorum praedecessorum nostrorum Imperatorum, atque Regum, in quibus continebatur, qualiter sub sua defensione eandem constituerant Ecclesiam, atque singulas quacrimonias studio inde sustulerant, diuersasque inquietudines concedendo submouerant, uidelicet concedendo cum cunctis hominibus eiusdem sanctae Ecclesiae ab omni publico obsequio, uel publica functione esse immunes. Sed quia contra praefatas auctoritates regum, atque imperatorum usque modo parte ipsius Ecclesiae de concessa publica functione, uel redibitione, et de teloneo mercati Luani, seu Cumani per hebdomadas aliquid ad publicum exigebatur, petiit pietatem nostram, ut et publicam functionem ad partem telonei, sicut olim a parte publica concederemus, ut exacta fuit, sicut et deinceps sub omni integritate praefatae Ecclesiae perpetualiter habendam, quod et fecimus. Nam et praedicta praedecessorum nostrorum praecepta, nostra auctoritate confirmauimus, seu etiam piscarias cum ripa Laci Cumis, et Mezole, uel quicquid ibi de comitatu Leuco fuit aliquando, uel fluminum, seu etiam Abbatiam sanctae Mariae, quae dicitur monasterium uetus quod Lotharius, et Ludouicus imperatores delegauerunt, confirmantes firmas, et stabiles eidem Ecclesiae permanere sanctimus. Praecipientes ergo iubemus, atque per hoc nostrum regale praeceptum interdiciamus ut nullus iudex publicus, uel quislibet iuditiariae potestatis minister, tam superioris, quam inferioris gradus,

in Monasteria, Senodochia, Ecclesias baptismales, seu reliquas Ecclesias, Curtes, loca, vel agros, Broilum cum arena, maenia civitatis, seu ripa Laci Cunis, et Mezolae, quicquid ibi de comitatu Leuco pertinuit, seu et fluminum, et littoreas possessiones memoratae Ecclesiae, quas moderno tempore cum quibuslibet pagis, vel territoriis infra ditionem regni oostri iuste, et legaliter possidet, vel quae deinceps in iure, et potestate praelibatae Ecclesiae Divina pietas noluerit augeri, aut causas iudiciario more audiendas, vel freda exigenda, aut mentiones (1), vel paratas faciendas, aut fideiussores tollendos, aut homines ipsius Ecclesiae tam ingenuos, quam, et servos distringendos, nec ullam redibitionem de hiis usque modo, quae ad partem publicam exigebatur, aut illicitas occasiones requirendas, nostris, et futuris temporibus ingredi audeat, nec aliquid easdem auctoritates quippiam repetitionis inferre praesumat; nec eisdem hominibus praefatae Ecclesiae, quod nos eidem venerabili Episcopo concedimus, ullo in tempore pro qualibet functione, aut redibitionis exactione, vel excubia publica molestare audeat, nec aliquid de hiis, quae supra memoravimus, abstrahere, vel diminutionem facere aliquo tempore praesumat. Nam et rebus, unde munimina perdit, vel cremata fuerunt, sine alicuius molestatione perhemniter habere statuimus, et Aduocatum ipsius Ecclesiae nullus Iudex publicus distringat sine Episcopo aut eius Misso, et suos liberos, sive servos nullus Ministrorum nostrorum publicus banniscat extra suam parochiam ad faciendam iustitiam. Habeantque ipsi liberi homines facundiam, cuiuscumque sint natione fideiussores, et sacramentales, seu testes esse secundum suam legem, et contradare, et ad partem ipsius Ecclesiae inquisitionem facere posse, et liceat memorato praesuli, suisque successoribus, res praedictae Ecclesiae suae cum omnibus fredis concessis, et rebus, vel hominibus ad se iuste aspicientibus tam liberis, quam et servis suis sub munitatis defensione nostrae quiete possidere. Quicumque autem hoc nostrum praeceptum in aliquo violauerit, centum libras auri componet, medietatem palatio nostro, et medietatem iam dictae Ecclesiae. Ut autem verius credatur, et diligentius ab omnibus observetur, manns propriae inscriptionis signo roboratum anuli nostri impressione iussimus sigillari.

Signum () Domni Arduini serenissimi, et invictissimi regis.

Cunibertus Cancellarius uice Petri Cumani Episcopi, et Archicancellarii recognovi.

Data vii. kal. April. an. Dom. Incarnationis millesimo secundo. Indiet. quintadecima; anno uero domini Arduini regis regnante primo. Actum Castro Montigio feliciter. Amen.

(1) *Le mansiones.*

N. 26. Privilegium concessum Monialibus S. Iustinae de Luca
ab Ardoino Rege.

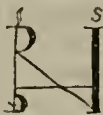
Ex
cod. Lucano
Bern. BARONI
cum ch. orig.
collato.

An. 1002

Inedito.

*In nomine Sanctae et Individuae Trinitatis. Ardoinus diuina fauente
clementia rex. Omnium fidelium Sanctae Dei Ecclesiae nostrorumque
presentium scilicet et futurorum nouerit Universitas Bertam nostrum di-
lectissimam Conjugem nostre Celsitudinis exorasse clementiam quatenus
pro Dei amore, animarumque nostrarum remedio Ailelpergam Abbatissam
cum Monachabus in Monasterio Domini et Saluatoris qui dicitur Pri-
seiano Deum militantibus in usum et sumptum In Flexo Manentes quin-
que; in Tempaniano unum; in Turre quinque et Sundrium unum; in
Castagnolo manentes octo cum domnicato Salinas omnes que ad ipsum
pertinent Monasterium Cafugio domnicato. In Flexo terras et uineas
cum omnibus que ad ipsum pertinet Monasterium, et alias pecias de
terra que sunt propè Flexum, et Oliuetum quod ibi pertinet. In Pru-
pulis manentem unum; in Nebulo petias de uineis duas; a Caprugnano
manentes tres; in Saltudo manentes quinque et unam peciam de uinea
et unum Sundrium domnicatum. In Fraca manentes quatuor. In Piseia
manentes decem cum terris et uineis domnicatis. In Rotta Ecclesiam
unam cum massariis tribus et cum terris et uineis domnicatis. In Pa-
ganico Manentem unum, petias de prato tres in loco qui dicitur Pe-
tronaco, et alias petias de prato quatuor; in Tassignano Massarium
unum. In Petrognano massarios quatuor; in Puliciano massarium unum;
sortem unam in Massa; in Quiesa Massarium unum. A. . . . massa-
rium unum per nostri precepti paginam donare concedere confirmare et
corroborare dignaremur. Cuius petitionibus aures accomodantes pro
Dei amore animarumque nostrarum remedio prenomatis Monialibus in
prefato Monasterio Dñi Saluatoris quod Prieseiano dicitur pro tempore
Dñi militantibus in usum et sumptum in Flexo manentes quinque; in
Tempaniano unum; in Turre quinque et in Sundrium unum; in Casta-
gnolo manentes octo cum domnicato Salinas omnes que ad ipsum per-
tinet Monasterium Cafugio domnicato in Flexo terras et uineas in Flexo
cum omnibus que ad ipsum pertinet Monasterium, et alias petias de
terra que sunt prope Flexo, et Oliuetum quod ibi pertinet de petruccio
manentem unum in uacula petias de uinea duas a Caprugnano manentes
tres; in Saltudo Mansos quinque et unam petiam de uinea, et unum
Sundrium domnicatum in Fraca manentes quatuor; in Piseia manentes
cum terris et uineis domnicatis; in Rotta Ecclesiam unam cum mas-
sariis tribus et cum terris et uineis domnicatis; in Paganico manentem
unum pecias de prato tres. in loco qui dicitur Petronaceo, et alias
petias de Prato quatuor. In Tassignano massarium unum. In Petro-
gnano masarios quatuor; in Puliciano massarium unum, sortem unam
in Massa, in Quiesa massarium unum; a Caprile massarium unum
prout iuste et legaliter possumus per hoc nostrum preceptum donamus,
concedimus, confirmamus et corroboramus una cum casis, sediminibus,*

terris, vineis, pratis, pasturis, montibus, uallibus, aquis, aquarumque decursibus, molendinis, pricationibus, servis et ancillis, aldís et aldialibus omnibus rebus mobilibus et immobilibus cum omnibus ad prenominatam Abbatissam pertinentibus in integrum. Insuper etiam concedimus et confirmamus per hanc nostri præcepti paginam atque inuiolabili auctoritate ut quandocumque Abbatissam de ipso Monasterio ex hac luce migraverit, qualem digniorem ac meliorem nobisque fidelem inter se ipsa congregatio eligere uoluerit Abbatissam, licentiam habeant eligendi ac faciendi Abbatissam ea scilicet ratione quatenus Monache in jam dicto Monasterio pro tempore Deo militantes pro nobis atque successorum nostrorum Domini misericordiam exorare ualeant. Precipientes itaque iubemus ut nullus Dux, Marchio, Archiepiscopus, Episcopus, Comes, Vicecomes, uel aliquem Regni nostri magna paruaque persona predicto Monasterio de jam nominatis rebus disuestire, inquietare, uel diminorare audeat. Si quis autem huius nostri violator extiterit, sciat se compositarum auri optimi libras centum: medietatem Camere nostre, et medietatem Abbatisse atque Monachabus in supradicto Monasterio Domini militantibus. Quod ut uerius credatur diligentiusque ab omnibus obseruetur manibus propriis subter firmauimus et sigilli nostri impressione inferius eum sigillari iussimus



Signum Domini Ardoini regis

(Locus sigilli cerei deperditi)

Cunibertus Cancellarius uice Petri Cumani Episcopi et Archiepiscopi
larii recognouit

*Acta XI kal: septembris anno Dominice Incarnationis Mill. II: Indict.
XII: Anno vero Domini Ardoini Regis Primo. Actum Papiæ in Dei no-
mine feliciter Amen (1).*

(1) Questo documento finora inedito, vien ricordato dal FIORENTINI (*Memorie della Contessa Matilde*, ediz. del MANSI lib. V. p. 9.): esso è pregievole perchè serve di risposta a coloro, i quali pretesero che Ardoino non estendesse la sua potenza regale fino alla Toscana. Io ne ebbi dapprima copia dall'originale, per mezzo del Conte SARDI di Lucca, che corrispose gentilmente alla richiesta, ch'io gliene faceva porgere nel 1838 dal Marchese Felice di S. TOMMASO, giovane di molte speranze del quale ora rammentiamo tutti con dolore la perdita. Nel 1839 tornando io da Roma ne presi copia novella nell'archivio del monastero di Santa Giustina ne' Servi, di Lucca. Ma l'una e l'altra copia erano assai manche, perocchè l'originale è in pessimo stato. Finalmente dal signor Prof. Abbate BINI, Bibliotecario della città di Lucca, io ne ebbi una nuova copia meno imperfetta, e ch'egli estrasse dal Codice ms. Lucano del BARONI, compilato prima della metà del secolo scorso, nel qual tempo convien credere che i caratteri del documento fossero meno scassati e guasti.

La parte di questo documento stampata in lettere corsive è tratta da questo Codice

N. 27. Donatio Arduini Regis Cuniberto Ecclesiae vercellensis
Praeposito, atque Regis Cancellario, Curtis Desianae
sen Decianae.

Dall'archiv. di
Corte (Prov.
d'Ivrea, mazzo
13), in Mon. H.
P. I. u. ccvii.
col. 356

An. 1003.

In nomine Sanctae et Individuae Trinitatis. Ardoinus misericordia Rex Fidelium petitionibus adsensum praebemus deuocios eos fore nostrae fidelitatis obsequio minime Idcirco nouerit omnium fidelium sanctae Dei Ecclesiae nostrorumque praesentium ac futurorum nouerit solertia qualiter interuentu ac petitione Bertae dilectissimae consortis regni nostri per hoc nostrum praeceptum prout iuste et legaliter possumus confirmando corroboramus et confirmamus Cuniberto Verecellensi Ecclesiae preposito atque nostri cancellario curtem Desianam sibi iure proprietario pertinentem eum Castro et Capella ibidem consistente una cum mansis terris vineis pratis pascuis siluis molendinis aquis aquarum decursibus piscariis omnibusque que dici vel nominari possunt ad ipsam Cortem aspicientibus in integrum uerum etiam concedimus atque donamus ipsi prefato Cuniberto omne publicum districtum mercata Telloncum atque Sagumum curaturas omnemque publicam redibicionem quam infra Desianam uillam pars publica exigere aut sperare potuerat, aut defforis iuxta ipsam uillam usque ad unum miliarium in circuitu de Comitatu uerecellensi haecenus pertinentem. statuantes omnes querelas et intenciones omnium hominum in ipsa uilla degentium et habitantium ut ipse Cuniberto nostri Cancellarius suique heredes aut cuiumque ipse dederit nostri existentes missi ita deffiniant legaliter Comitum palatii ibi adesset presentia. Predictum igitur districtum omnemque publicam functionem Desianae uille sicut superius dicimus praefati Cuniberti ius et dominium omnino transfundimus atque delegamus ut ipse suique heredes uel quibuscumque aut firmiterque possideant iure perpetuo atque omnium hominum contradictione remota. Precipientes igitur regali iubemus potestate.

del BARONI: il rimanente in caratteri soliti, si legge tuttora nell'originale. Le note cronologiche concordano con quelle che ci dà il FIORENTINI (loc. cit.)

Molti altri consimili diplomî furono certamente concessi da Ardoino in quell'anno 1002 ma o sono perduti, o giacciono tuttavia sepolti in qualche archivio pubblico o privato. Così oltre i molti che cita il ROVELLI (passim) nella sua storia di Como, come esistenti nell'archivio di Sant'Enfemia dell'Isola, noteremo quello che ricorda il SUGANO (*De regno Italiae* lib. vii col. 471.) dato da Ardoino a' canonici di Modena, se pure non fu concesso nel 1003, del quale non feci nemmeno prova di aver copia.

Anche le carte pubbliche intitolavansi dovunque ad Ardoino re, in quell'anno in tutto il reame; fra l'altre una carta di Milano, citata dal GIULINI (*Mem. di Mil.* P. 3 p. 24.) porta: *Ardoinus gr. D. rex, anno regni eius primo, tertidecimo kal. Iulius, Ind. quattodecima*; altra di Piacenza ne reca il CAMPI (*storia eccl. di Piacenza* t. I. p. 497.) del mese di giugno, stesso anno: altra ancora leggesi nell'arch. capitolare d'Asti al n. 15 del 21 maggio 1002, *Actum in Loro Publici*, cioè Piobesi, terra presso Torino, la quale dimostra che nel comitato di Torino, l'autorità regia di Ardoino era riconosciuta.

..... Archiepiscopus Episcopus Dux Marchio Comes Vicecomes nullaque regni nostri magna paruaque persona iamdictum Cunibertum prepositum suosque heredes uel eos quibus de de prelibate uille districto Teloneo curatura Segumo uel de omnibus nari (1) possunt ad nostre regie potestatis iure pertinentibus usque ad unum milliarium in circuitu inquietare molestare vel disuestire presumat igitur huius nostri precepti statutum aliquando infringere aut fuerit sciat se compositurum auri optimi libras mille medietatem camere nostre et medietatem iam dicto Cuniberto preposito et nostri Cancellario eiusque he..... Quod ut uerius credatur diligentiusque ab omnibus obseruetur manu propria presentem paginam confirmantes sigilli nostri impressione inferius iussimus sigillari.

Signum Domini Hadoini serenissimi (*monogramma*) et inuictissimi regis (*sigillo*) (2).

..... Episcopi et Archicancellarii recognouit.

N. 28. Ardoini Italiae Regis concessio Theodeberto Iporediensi Diacono, pro iuribus vallis Clivitanæ.

Ex collectan.
instrum.
DD. Comitum
Valpergiæ de
Maximo.

An 1003 (?).

In nomine Sanctæ et Individuæ Trinitatis.

Arduinus diuina fauente gratia inuictissimus rex. Si aduentibus digne postulata largimur praecepit conuenit ut nostrae dilectissimæ coniugis Bertæ postulationibus (3) acclinemus. Quocirca omnium fidelium sanctæ Dei Ecclesiæ nostrorumque praesentium et futurorum nouerit industria, qualiter interuentu dietæ nostræ amatissimæ coniugis Bertæ, et Petri Pontificis Cumani, nostrique praestantissimi fidelis Teudeberto (4) sanctæ Iporiensis Ecclesiæ diacono concedimus et donamus Curtem de Oreo (5) quæ olim Curtis Regia nominalatur nunc vero ab loci (6) incolis sancti Georgii castrum appellatur in comitatu uidelicet Iporiensi Reiaresensem (7), et uallem etiam supra montem quæ *clarus* dicitur (8) eidem Teudeberto leuitæ similiter largimur, cum omnibus illarum

(1) *se nominari*

(2) Mancano nella copia autentica di questa carta (R. arch.) le note cronologiche. Nella pubblicazione fattane dal GUYOTON (Bibl. Sebus, cent. II, cap. XI) dopo le firme leggesi: « Datum anno Incarnationis Dominicæ 1003. »

(3) Libentissime acclinemus (H. P. M. tom. I, col. 355).

(4) Teudeberto (ib.).

(5) De Oreo plurium quæ (ib.).

(6) Illas incolis (ib.).

(7) Reiaresensem (ib.).

(8) Quæ clivis dicitur (ib.).

pertinentiis, et adiacentiis, scilicet (1) castellis plurimis, capellis, uillis, montibus, alpihus, uallibus pascuis, siluis, astasseris (2), castanetis, ripis, rupinis, paludibus, aquis, aquarumque decursibus, terminis, accessionibus, forestri (3) in praedicto comitatu consistentibus, nec non etiam illis Aldionibus (4), et Aldianis, omnibusque rebusque, rebus mobilibus, et immobilibus in integrum. Insuper tribuimus supradicto Levitae Teodeverti (5) omnem districtum, mercatum, teloneum, custaturam (6) redditionibus (7) ad eandem cortem, et (8) ad praefatam valle pertinentibus, et de nostro iure ac dominio in eius ius et dominium transfundimus, ac delegamus: eo uidelicet cui dederit vel (9) animus eorum decreverit voluntas faciendi sine publica molestacione ac omni contradictione, vel fatigacione funditus remota. Si quis contra hanc cartam concessionis, ac donationis uiolator extiterit, aut frangere tentauerit, sciat se compositurum auri coeti libras ducentas (10), medietatem Camerae nostrae, et medietatem Tedeuerto leuitae, uel qui Chartulae dederit. Quod ut uerius credatur, diligentius (11) ab omnibus seruetur, manu propria roborantes sigilli nostri impressione fieri iussimus.

Signum Dñi Arduini Ser.^{mi} et Iniuel.^{mi} regis.

Cunibertus uice Petri Cumani (12) Archicancellarii recognouit, et scripsit anno Dom.^{cae} Incarnationis mul (13). Actum Papiae in Ticinensi palatio feliciter Amen.

(monogramma) (14).

(1) Cum (H. P. M.).

(2) Astallareis (H. P. M.).

(3) Forestibus (ul s.).

(4) (Gnasto nell'Ucn. fino alle firme l. c.) illis Aldiones et aldianes omnibusque rebus mobilibus et immobilibus in integrum. Insuper (H. P. M.).

(5) Tedeuerto (H. P. M.).

(6) Curaturam (H. P. M.).

(7) Redditionibus (H. P. M.).

(8) Vel ad praefatas valles (H. P. M.).

(9) Dederit aut proprietarii iuris inde cartam fecerit habeant teneant firmiterque possideant, sitque eis facultas uendendi tenendi pro anima iudicandi donandi vel animus eorum etc. (H. P. M.).

(10) Ducenti (H. P. M.).

(11) Diligentiusque ab omnibus obseruetur (H. P. M.).

(12) Episcopi (H. P. M.).

(13) Indict. prima anno vero domni Arduini regis iniunctissimi regnantis primo (secundo) (Ucn. et H. P. M.).

(14) Di quest'anno 1003 un nuovo diploma dato dal Re Ardoino, nota il ROVELLI (St. di Como part. 2. p. 79.), esistente nel già citato archivio di Sant'Eufemia dell'Isola Altro ancora ne cita (ibid. p. LXXXV.) dello stesso anno, mense decembr. Ind. 2. Dat. in Urbe Cumana. Da una carta privata (nell'arch. Capit. d'Asti, Jura Capituli lib. I. n. 12.) vediamo che Asti riconosceva sempre come re Ardoino. In altra dell'arch. diplomatico di Milano leggesi: *In nom. D. Dei et Salvat. nri I. Ch.*,

N. 29. Odelricus Cremonensis Episcopus in placito Cremonensi
 ab Adelelmo, qui et Azo, misso Arduini regis, impetrat
 Baunum regium, pro tutela quarundam terrarum sui
 Episcopatus.

MURAT.
 Ant. m. aev.
 t. II col. 965.
 An 1001

Dum in Dei nomine, ciuitate Cremona, in laubia maiore domus episcopii ipsius ciuitatis, per data licentia domni Odelrici episcopi in iudicio resideret Adelelmus qui et Azo, Missus domni Arduini regis, singulorum omnium iustitias faciendas ac deliberandas, residentibus cum eo Adelbertus, Andreas, Iohannes, item Adelbertus, Dominicus, iudices Sacri Palatii, Amizo, Ardericus, Walbertus, Bonizo, et reliqui plures. Ibiq[ue] eorum ueniens presencia Rolandus Auocatus ipsius episcopo retulit: *Ab eo et teneo ad parte iam dicto episcopo proprietatem petias duo de terra, quas esse uidentur prima in loco Piciningo, hoc est pro mensura iusta iugias decem et octo. Coëret ei ad seras, a mane, a meridie Sancti Siluestri. Secundu in loco Laudacisca, et per mensura iusta iugias sedecim. Coëret ei a mane uia communis Sancte Marie. Tercia ibi prope est per mensura iusta iugias sex. Coëret ei da trex partes terra ipsius episcopo. Quarta est in Matidelle pro mensura iusta iugias quin. . . . Coëret ei da omnes partes terra eidem episcopo. Quinta in Dardi Casale est per mensura iusta iugias quadraginta. Coëret ei da omnes partes prenominato episcopo. Sexta in Visidanelli, est per mensura iusta iugias trex. Coëret ei da duabus partibus prefata episcopo. Septima in eodem loco ibi prope est per mensura iusta iugias duas. Coëret ei da duabus partibus eidem episcopo. Octaua ibi non multo longe est per mensura iusta iugias septem. Coëret ei da duabus partibus iam dicto episcopo. Nonu in eodem loco, que est per mensura iusta iugias sex. Coëret ei ad sera Sancte Marie. Decima in silua Bonella et est per mensura iusta iugias sex. Coëret ei da duabus partibus eidem ecclesie. Undecima ibi non longe, que est per mensura iusta iuges nouem. Coëret da duabus partibus prefate ecclesie. Duodecima in Fatiximago, et est pro mensura iusta iuges octo. Coëret ei ad sera prefate ecclesie, sibi que alii sunt in is omnibus coërentes. Et si quislibet omo exinde aliquit dicere uolt, paratus sum cum eo da parte iam dicti episcopii inde ad racionem standum, ac legitime finiundo. Et quod plus est, quero, ut uos domnus Adelelmus Missus pro Dei amore, et*

reguante d.^o n^{ro} Ardoinus in Italia anno secundo mense februius Ind. 2.^a (dovrebbe dir 1.^a) Actum in loco Montanicii. Altra carta dell'arch. suddetto della Cattedrale d'Asti, porta queste note: Ardoinus gr. D. rex an. regni eius Deo propitio secundo (1003), sec.^o die mensis apr. Ind. 1.^a Actum in loco Nante fel. In altra dello stesso archivio leggesi: Ardoinus gr. D. rex etc. an. secundo, sexto die mensis madii Ind 2.^a Actum in Castro Novo qui dicitur Sup. Belbo.

anime Arduini regis mercedem, *Bannum da pars regi mittatis, ut nullus omo de predictis rebus prenominato episcopio sine legali iudicio disuere audeat*. Cum ipse Auocatus taliter retulisset, tunc ipse Adelelmus pro Dei amore et anime Domni regi *Bannum da parte eius misit in mancosos auri mille*, ut nullus omo prenominato episcopio de predictas petias de terra sine legali iudicio deuestire audeat. Qui uero fecerit predictos mille mancosos se compositurus agnoscat, medietate parti camere domni regis, et medietatem parti eiusdem episcopio. Et anc noticia pro securitate.

Ego Adam not. S. P. ad iussione prefato Misso, et iudicum amonicionis scripsi. Factum est hoc anno regni domni Arduini regis, Deo propicio tercio, v. kalend. marcii, indict. secunda.

Adelelmus Missus *subscripsi*.

Adelbertus iudex sacri Palatii *interfuit*.

Andreas iudex sacri Palatii *interfuit*.

Iohannes iudex sacri Palatii *interfuit*.

Dominicus iudex sacri Palatii *interfuit*.

N. 50. Arduini regis privilegium, quo nonnulla mansa confirmat Alberico, villae Gassingo habitatori.

Dell'originale
R. arch. dicort.
nel t. I. II. P.
Mem. n. ccviii,
col. 357.

An 1004
die 27 febr.

In nomine sanete et indiuidue trinitatis Arduinus diuina fauente clementia Rex. Si petitionibus nostrorum fidelium assensum prebuimus promtiores eos esse in nostra obsequia minime titubamus. Quocirca omnium fidelium nostrorum tam presentium quam futurorum nouerit industria. Eo quod interuentu ac petitione nostre dilectissime coningis bertae Albericus uillae Gassingo habitator nostram adiit excellentiam supplici prece deprecans. quatenus quedam mansa in Gassingo mansa tria. in potinglo mansa duo. in faennollio xli. in sarmacia quae dicitur curacia terra arabilis cum pascuis et omnibus rebus eidem pertinentibus in lidrimo mansa tria. in eiriaco mansa tria cum molendino. in grosso mansa vi. cum seruis et ancillis. pratis. pascuis. siluis. cultis. et incultis. ripis. rupinis. aquis. aquarumque ductibus. et omnibus predictis mansis pertinentibus nostrae confirmationis praecepto confirmare et corroborare dignaremur. Cuius petitionem iustam ducentes amore nostrae predictae coniugis superscripta mansa in integrum cum omnibus pertinentiis et adiacentiis suis mobilibus. et immobilibus. rebus quae dici uel nominari possunt. uidelicet cum seruis et ancillis. casalinis. ortis. uineis. campis. pratis. cultis. et incultis. siluis stellareis. pascuis. uenationibus. aquis. aquarumque ductibus. molendinis. paludibus. piscationibus. et omnibus rebus quae ad eadem mansa pertinere uidentur

ad predicti Alberici suisque credum aut cui ipse dederit ius dominium et potestatem confirmamus. corroboramus. concedimus. et largimur. prout iuste et legaliter possumus. Eo uidelicet ordine ut nullus dux archiepiscopus. marchio. comes. uicecomes. sculdacius. gastaldus. uel aliquis publicae rei exactor. magna paruaque nostri regni persona. prelibatum albericum aut credes eius umquam disuestire inquietare uel molestare presumat. Et si inuentus fuerit qui contra hoc nostrum confirmationis preceptum facere temptauerit centum libras auri optimi componere cogatur medietatem nostrae camerae et medietatem sepe nominato alberico aut credibus eius quos inquietauerit. Et ut uerius credatur diligentiusque ab omnibus obseruetur. manu propria subter confirman-tes sigilli nostri impressione iussimus annotare.

Signum domni Ardoini serenissimi et inuictissimi regis.

(monogramma e sigillo)

Gotefredus Cancellarius et sancte Mediolanensis Ecclesiae presbiter presciuit.

Data tertio kal. marcias anno dominicae incarnationis millesimo quarto. anno uero domni Ardoini regnantis quarto. (cioè tertio) (1).

N. 31.

Ardoini Regis diploma pro Fructuariensi S. Benigni monasterio.

Ex Tabulario
TERRANEI
l. II. p. LXX.
et ap. DE LEVIS
in vita S. VIII.
p. XXXV.
An. 1005.

In nomine Sanctae et Individuae Trinitatis. Ardoinus diuina ordinante prouidentia Rex. Sanctorum Patrum decretis canonica auctoritate fulti et experimento mundanae legis instruimur ut publice (2) regni et sanctarum Ecclesiarum causas aequa lance, et iusto examine pensemus, quae duo maxime bona inter se uario sunt ordine distincta, ita tamen sibi ad inuicem coniuncta Dei dispositione sunt (3) connexa ut si alte-

(1) Dal LUPI (Cod. Bergom. l. II. p. 439.) abbiamo una carta privata con queste note: *Ardoinus gr. D. rex an. regni eius tertio (1004) mense genoarius Ind. 2.^a Actum Bergamo*. Altra ivi del mese di marzo. *Act. Pergamo*.

Anche in su quello d'Asti le carte intitolavansi ad Ardoino nel marzo di quest'anno, come da nuova carta dell'arch. Capitolare n. XI: *Ardoinus Dei gr. rex etc. Petrus Astensis Epus permutat Geribaldo f. quondam Ametoni petias d.... positas in loco et fundo Caliano etc.* Invece dal P. BUCCHINI (*Storia del monastero di Polirone*, App. p. 20.) abbiamo una donazione del marchese Bonifacio (padre della contessa Matilde) data nel mese stesso di marzo e che già porta: *Henricus gr. D. rex, anno regni eius Deo propitio hic in Italia primo Ind. 3.^a Act. Mantuae*: e notisi che Arrigo re di Germania non fu eletto a re d'Italia che il dì 14 di quel mese.

(2) Publici (Valeriano Castiglione annot. 547 al Tesoro 3.^o regno d'Italia p. 679.).

(3) Annexa et connexa (V. C. come sopra).

rum pereat alterum praecipitum pati non sit ambiguum. Nouerit (1) omnium sanctae Dei Ecclesiae fidelium meridicaque (2) praesentium scilicet et futurorum solertia Bertam dilectam coniugem nostram, nostri-que regni consortem nostrae celsitudinis adisse elementiam, ut pro remedio nostrae eiusque animae, atque omnium nostrorum expiatione criminum Abbatiam in honorem sanctae Dei genitricis semper virginis Mariae, quam Abbas Willielmus uenerabiliter aedificare desiderat eum omnibus adiacentis et pertinentis, quae nunc habet locus ipse ubi aedificanda est, et quae Deo uolente in futurum sunt conferenda, nostra auctoritate confirmaremus, et regali uigore corroboraremus. Nos uero tantam (3) tantae nostro amoris connexae reginae, dignamque non paruipendentes dilectionem ac praedicti Abbatis supplicationem, *nostri-que status, et totius Italiae nationis salutem*, per hoc praesens praecceptum, et huius nostrae auctoritatis confirmationem, futuram in loco, qui ab incolis appellatur Fructuaria in comitatu Iporiensi inter duos fluuios, quorum unus Oreo, et alter dicitur Amalon Abbatiam in honore beatae Virginis Mariae suprascripti (4) Abbatis construendam deuotione cum adiacentis et pertinentis suis, quae ipsi loco pertinent, uel quae in posterum uolente Deo a nobis, uel ab ipsa regina, siue a quibuscumque legitime condonanda sunt fidelibus, cum seruis et ancillis, aldionibus et aldianibus, cum casis, curtibus, castris, ecclesiis, capellis, edificiis, campis, uincis, pratis, pascuis, syluis, stallariis, saltilibus, piscationibus, molendinis, aquis, aquarumque decursibus (5), montibus, uallibus, planitiebus, et omnibus, quae dici uel nominari uerbis, et literis comprehendi possunt, confirmamus, et corroboramus. Ea uidelicet ratione ut ipse Willielmus Abbas Christi opitulante gratia, piaque eius castae (6) matris incomparabilibus meritis hinc (7) sit dispensator et rector, quatenus ab eo, diuina clementia, sanctae religionis constituentur fratres, et ordinentur fratres, qui secundum regularem normam Deo seruietes, ad nostram, omniumque fidelium uiuorum, et defunctorum salutem supplices effundant preces. Qui (8) morte praeventus id si implere nequiverit, per quaecumque eiusdem religionis uirum coeptum tam bonum concedimus perficere, quo nullo modo desint, qui secundum Beati Benedicti regulam iam praedicto in loco Fru-

(1) Igitur (V. C.).

(2) Meridica (V. C.).

(3) Tanto amore nostrae connexae reginae dignam semper impendentes dilectionem ad praedicti Abbatis piam supplicationem (*Scritti di Roma contro la corte di Savoia per l'abbazia di S. Benigno. Documenti n. 1.*).

(4) Sancti Benedicti Abbatis (*Scr. di Roma, come sopra*).

(5) Ductibus (Scr. di R.).

(6) Sanctae (ib.).

(7) Fidelis (ib.).

(8) Qui cum morte praeventus id adimplere (ib.).

ctuaria Deo militent (1) Abbatis imperio. Hoc autem ut securius, et liberius fiat, seclusa omnium clericorum, laycorumque potestate perpetuo (2), *et ut simoniaca haeresis* uel ab ipso procul pellatur loco per huius Praecepti nostri contradicimus auctoritatem omnem donationis uel ambitiosae praelationis occasionem unde quasi sub obtentu ecclesiastici ordinis plurima uidentur destructa monasteria. Ideoque consulendo potius, quam imperando, et impictati, quae soepe (3) sub specie fit pietatis, diuino elypeo munitus obuiando tam sub (4) huius Praecepti regalem auctoritatem, quam per tremendum, quod multo amplius timendum est (5), examinis condicimus, contestamurque iudicium, ut nullus etiam Imperator, aut Rex, Dux, Episcopus, Marchio, Comes, Vicecomes, Iudex, Iudicialis (6), magna, paruaque persona Ecclesiastici uel mundani Officii aliquam vim, uel molestiam, ausu nefario iam dicto Abbati, uel successoribus eius (7) de aliquibus rebus uel ordinationibus et pertinentiis iam nominati loci praesumant inferre, uel ab eodem Monasterio, et eius Abbate, Monachis, et familia, aut uillanis ad ipsum locum pertinentibus bannum, uel aliquam conditionem requirere. Cuius Monachi Abbas, cum de hoc mundo migraverit, quem ipse uiuens cum timore Dei designauerit, et fratres elegerint, suscepto ab Antecessore, uel si ipse defunctus fuerit a principali Altari (8) regiminis baculo, dignissime loco praecedenti (9) subrogetur, et ordinetur, ut (10) ubicumque, et a quoecumque sibi placuerit, *etiam* (11) *si necesse est*, sine ullius contradictione ab extero consecretur Episcopo. Omnibus igitur patet (12), quod nulli mortali, non ipsis etiam nostris successoribus, Imperatoribus uidelicet, ac Regibus de praefato monasterio eiusque pertinentiis uel in dominatione, uel in ordinatione super Abbatem uel monachos ibi degentes aliam aliquam relinquimus potestatem: sed omnes sint adiutores eorum, et loci (13) in bono, et quauis in mercedis retributione. Qui hoc fecerint, consortes efficiantur nostri, et qui deleuerint deleantur (14) et qui de libro uitae anathematis iaculo diuina ultione percussi. Si quis autem hoc nostrum Praeceptum infringere

(1) Vel Abbatis militent imperio (ib.).

(2) Perpetua (ib.).

(3) Manca (ib.).

(4) Per (ib.).

(5) Diuini (ib.).

(6) Manca (ib.).

(7) Manca (ib.).

(8) Altiori (ib.).

(9) Praecedentis (ib.).

(10) Et (ib.).

(11) Mancano le parole segnate (ib.).

(12) Patet (ib.).

(13) Hoc in bono quamvis in.

(14) Manca (ib.).

tentauerit, sciat se compositurum mille libras auri, medietatem Camerac nostrae, et medietatem Abbati ipsius loci, cui injuria lata fuerit. (1).

Signum (2) Domini Ardoyni Ser.^{mi} et Inv.^{mi} regis

Cunibertus Cancellarius vice Petri Cumani Ep̄i et Archican. recognouit.

Datum quinto kal. febr. anno Dominice Incarnationis millesimo quinto (5) anno vero Domini Ardoyni Seren.^{mi} Regis (4) regnante anno tertio. (quarto?).

Actum Verceilis feliciter. Amen. (5).

N. 52. Diploma Henrici II regis pro Fructuariensi monasterio.

Dal M. B. P.
tom. I p. 362.
n. CCXI.
(origin. dell'
arch. di corte)

An. 1006
die 31 aug

In nomine S.^{ao} et Indiv. Trin.

Henricus diuina fauente elementia rex. Omnibus sancte Dei Eccl.^e fidelibus. presentibus scilicet et futuris. Notum sit qualiter venerabilis abbas Willelmus nostram adiit elementiam humill.^{me} postulans quatinus monast.^m fructuaria dictum in honore setae mariae sanctique benigni martyris constructum ac dedicatum sub n^{rae} tuitionis mundiburdium susciperemus. praeceptaliq. pagina n^{ra} confirmaremus. Cuius rogatus pios cognoscentes. iam dictu^m mon^{trium} sub nostrae defensionis manum recepimus ac nostra auctoritate prout firmissime potuimus corroborauimus. Cum corte etiam obiani dicta quam *berta filia hamedei* (6) loco antedicto proprietauit et aecclesia in eadem corte sita cum omni utilitate eidem corti et aecclesie adherente. nec non cum o^mb^{us} mon^{trio} fructuario dicto appendentibus. tam quesitis quam inquirendis. datis uel dandis. u^{is} inu^{is}. exitibus et redditibus arcis aedificiis terris cultis et incultis mancipiis utriusque sexus aldionibus uel aldiabus uineis uinetis aquis piscationibus molendinis pratis pascuis siue compaseuis seu o^mb^{us}

(1) &c. (ib.).

(2) Mancano le firme di Ardoino e di Cuniberto (ib.).

(3) Quarto (in collectanea saepe cit.).

(4) Regis secundo (Ser. di R. e nella collectanea).

(5) Questo diploma leggesi pure stampato nel tom. 2. part. 2. *Ragioni della santa Sede sopra la badia di Fruttuaria*. Segue la bolla di Papa Giovanni XVIII a favore dello stesso monastero, iv non. decemb. 1006. Colla data di quest'anno 1005 e del mese di marzo, ho veduto in Milano (arch. diplem. scaff. n. 1. tav. n. 4.) una carta di donazione a favore del monastero di Sant'Ambrogio: *facta per Ioannem fil quond. Ioannis* ma ora in essa l'invocazione del Re: perocchè Arrigo era assente dall'Italia, ed Ardoino stando per ripigliare il potere, l'Arcivescovo Arnolfo per non inimicarsi nè l'uno nè l'altro, non voleva che nelle carte milanesi s'invocasse nessuno.

(6) Chi era questa BERTHA filia HAMEDEI? Era forse egli suo padre quell' AMEDEVS fratello d'Ardoino, nominato nel Documento n. 9, morto, come sospettammo nella guerra d'Ivrea mossa da Ardoino al vescovo Warmendo?

que dici uel scribi queunt qua quolibet modo utilitatibus. Praecipientes igitur ut nullus dux archiepiscopus episcopus marchio comes uicecomes, sculdatio, gastaldio castellanus, seu aliqua magna uel parua persona eundem prescriptum abbatem suosq. successores de prefatae ecclesiae rebus a *Gumthardo* (1) taurinensis ecclesiae archidiacono iudiciali lege quod *iudicatus* appellant traditis et addicatis inquietare molestare uel disuestire presumat. Si quis ergo huius praecepti paginam uiolare temptauerit sciat se compositurum auri excoeti libras centum medietatem camerae nostrae et medietatem prelibato abbati suisque qui tunc temporis erunt successoribus. Quod ut uerius credatur diligentiusque ab omnibus obseruetur hanc cartam inde conscriptam manu propria roborantes, sigillique nostri impressione insigniri iussimus.

Signum domni Heinrici (*monogr.*) regis inuict.^{mi} eberhardus cancellarius uice uuillinti archicapellani recognoui (*sigillo*)

Data 11. kal. sept. An. ab incarn.^e domini v. Anno uero domni Heinrici secundi regni v. Actum aquisgrani fel.^r amen.

N. 52.^{bs}

Ex Tabulario
Cello-Lig.I.T
TERRANEI
Ms. I. 9.

An. 1007.

Henrici regis praeceptum quo Ecclesiae Vercellensi curtem regiam, vallem Cliui et alia concedit.

In nomine sc̄e et indinid. Trinitatis. Henricus Dei gr. rex. Notum sit omnibus Cortem regiam quae dicitur Orto et uallem Cliui et omnia eius pertinentia sancto Eusebio donauimus in perpetuum secundum praeceptum domini Karuli imperatoris tempore Liutuardi episcopi concessum quod bene credimus et melius fecimus quia ipsum praeceptum manibus propriis tenuimus oculis uidimus Dei gratia legimus, et praeceptum etiam legimus de ualle Cliui a seniore nostro Ottone imperatore sancto Eusebio concessum. Damus et reddimus sc̄o Eusebio Cortem Romanianum in integrum iuxta donum Karuli imperatoris et Sestegnum (2) Bedolium Clauasam Pedrorum Causade in integrum montem Rustimoli (5). Si quis de his omnino Verecellensem ecclesiam disuestierit uel molestauerit mille libras auri componet medietatem nobis et ecclesiae alteram, et ecclesia sua retineat in perpetuum. Quod ut credatur et conseruetur (4) hoc praeceptum manu nostra firmauimus et iussimus sigillari.

Signum () Domini Heinrici regis inuictissimi

(1) V. Hist. P. M. tom. I. Doc. n. CCXLIV. col. 414.

(2) F.^e Sostegnum (TERR.).

(3) F.^e Victumuli (TERR.).

(4) F.^e obseruetur (TERR.).

Heberardus cancell. uice archicancellarii recognouit.

Anno Domini. Incarn. Mvii Ind.^e v Anno domini Heinrici regis v.

Actum Radaspone (1).

N. 55.

Diploma Widi Papiensis episcopi canonicis
S. Ioannis Domnarum concessum.

BALLADA Stor.
della chiesa di
S. Gio. Domn.
F. 124 tergo :
ap ROBOLINI:
Notiz. appart.
alla St. di Pavia
tom. 2. p. 300.

AN. 1007
in fine (?).

In nom.^e S. et Ind. Trinitatis. Wido S.^{iae} Ticinensis Eccl. Ep^{us}
Catholicis uniuersis christianae fidei professionem habentibus tam presentibus quam futuris conspirationem, ac fidelium tam clericorum quam laicorum dignam commemoratione et instigatione aliunde S. Iohannis Baptistae quae dicitur Domnar. Liberam et absolutam esse ab omni onere exceptisque tempore Canonicam salutare animae nostrae praedictisque fidelium animabus instigantibus remota omni et roboratione seu res omnes eidem Ecclesiae cum omnibus easdem res quae modo illas quas praefata Ecclesia suum uel detinuit quam illos quae per beneficium vel alio modo ab uniuersa nostra seu fodro Albergariis inuestitura subrogatione praeter tres sollemnitates in anno transitibus uel Canonicos eiusd.^m tertia et Beati Iohannis Euangelistae non posthac nulla uia et ingenio Ecclesias, domos, uites, terras, siluas, prata Eccl.^{ae} S.^{ti} Io. que modo habet et habitura et adquisitura est in Beneficium uel libello seu quolibet alio modo clericis praedictae Eccl.^{ae} tam presentibus quam futuris fructum neque fodrum cenum, fictum aut per nos seu per nostros homines ablaturus nostrum gastaldionem eorum nullis aut terris imposituros aliquos vel aliquam

(1) Questo Documento pubblicato (a quel che sembra scorrettamente) dal solo FERRERIO (*De vita et gest. S. Eusebii Vercell. episcopi, Romae 1602 Zanetti*, p. 358.) meritava d'essere qui ripubblicato come novella prova dell'avidità di Leone vescovo di Vercelli. Le note cronologiche concordano, e la data di Ratisbona supplisce alla indicazione del giorno che quasi sempre si desidera ne' diplomi d'Arrigo II re di Germania. Infatti avendo noi dagli Annali di Quedlimburg (ap. PERTZ, M. G. H. t. v. an. 1007), che Arrigo celebrò in quella città la pasqua di quell'anno, che cadde il 6 d'aprile, e che egli vi si fermò pochi giorni, egli è chiaro che questo diploma vuol essere stato spedito nella prima decina di quel mese. Sembra inoltre che questa donazione non abbia avuto un intero effetto, giacchè la Corte Regia per esempio, qui donata alla chiesa di Vercelli, trovasi noverata fra' beni donati al monastero di Fruttuaria nell'anno 1019 da Otton-Guglielmo figlio del fu Adalberto re d'Italia (H. P. M. t. i. col. 428.). In quel tempo i beni di Otton-Guglielmo erano forse tuttora sotto l'unghe del fisco, epperò Leone faceva d'ingoiarne la parte sua, e ad Arrigo poco costava di concedergliene.

dationem vel conditionem et quae haecenus cō Canonica more seculari inchoatur, et Dei merito et diuina eidem Ecclesiae constituiamus et confirmamus ut in electione sit Clericorum, qui pro tempore praedictae Ecclesiae cum aliquis eorum a saeculo migraverit qui supererint alium eligant qui Deo digne seruiant, et Ecclesiae. Si quid de suis dederint Eccl.^{ae} solummodo prolicuo aut in emendis praediis aut in restaurandis thesauris quibus olim ditissima nobiliter fulsit aut in manifesta utilitate Eccl.^{ae} operat remoto omni uenundationis et diuisionis negotio. Quod quanto amore et deuotione charitatis de fidelium tamen auribus intimamus. *Temporibus etenim nostris orta seditione inter Regem Henricum et sedis Antistitem dominante Saxonia Ungaria et Suetia uniuersaque Italia fame et bellorum fremitu fere pessimdata Christianis destructio instantis Regis coacti sumus et thesauros Ecclesiarum et Ecclesias Senatoribus (1) miserabiliter subdere.* Quapropter dolentes Canonici praefatae Eccl.^{ae} nostrosque intollerabiles labores intuentes, nostram humiliter et fideliter deprecari pietatem ut pro remedio aīe nostrae et antecessorum successorumue nostrorum seu etiam parentum concedimus ei praedictam Ecclesiam foeneratorum aduncis manibus eripere et libertati restituere eligentes potius etiam honestius cō inopiam sub libertate tollere quam foeneratorum auaritia in abundantia subiacere. Eorum igitur iustis petitionibus nostrorumq. fidelium consiliis adquiescentes oīa supradicta concedimus, largimur tribuimus cum fodris, districtis, albergariis teloneis omniq. censu et fictu, redditibus seu aliquibus praestationibus. Cum terris, silvis, aquis, aquarumq. decursibus, molendinis, piscationibus, pratis, cultis et incultis rationibus quae ad utilitatem Eccl.^{ae} uel clericorum pertinere uidentur nihil inde potestati nostrae penitus reseruantes praeter supramemoratos praeceptos ter in aīo illud praecipue ex toto animi affectu inferentes ut neque nobis, neq. nostris successoribus aliqua potestas quauis calliditate tribuatur praedictam Eccl.^m uniuersasq. terras et bona memoratae Eccl.^{ae} ex toto vel ex parte uendere vel commutare aut inuasare uel inuestire uel libellare, uel aliquo modo intromittere clerici tamen praefatae Eccl.^{ae} et in sacris ordinibus et eustodiendis synodis nobis nostrisq. successoribus secundum sanctorum Patrum instituta subiaceant ad hanc aī^m decreti nostri corroborandam paginam iure iurando firmauimus ut nulla ratio^e uel meditatio^e aliquo tempore uiolari possit uel a nobis uel aliquo successore nostro, et ut diligentius et firmitus poenam quae est multa, posuimus auri uidelicet libras centum

(1) Leggi *foeneratoribus* come a liq. 20. — le parole *instantis regis* si riferiscono al re Arrigo nominato di sopra: e siccome una sola volta tutta l'oste Tedesca qui ricordata, portò la guerra a Pavia, così ne segue che tutti i danni qui lamentati dal vescovo Guido, e l'essere quella chiesa caduta nelle mani degli usurari, furono la conseguenza dell'essere stata quella città messa a fuoco ed a sangue da Arrigo, che fu al tempo della sua coronazione a re d'Italia nell'aprile dell'anno 1004.

argenti totidem ponderis. Decreto uero n^{ro} semper in suo consistente robore cum defensione et aminiculo PAPIENSIS POPULI. Si quis uero huius decreti n^{ri} quod minime credimus contemptor aut uiolator (extiterit) existerit dominus aut miles, seruus aut liber, consiliarius aut familiaris, ex parte Omnip. Dei et S.^{ci} Io. Bapt^{ae} sanctiq. Io. Evang.^{tae} in quorum honore Ecclesia est constructa et ex parte sancti Syri, et o^mium SS.^{um} et Pia^e Dei Genitricis Mariae nostraq., cum Iuda Domini traditore in aeterna gehena ignis anatematizetur cum Dathan et Abiron reputetur, omnesq. maledictio^{es} quae sunt septem in nouo et ueteri testamento super caput eius eternaliter dextendant et anathema in hic et in pptu^m Amen. (1).

N. 54. Donatio aqueducti in territorio Ravennati per Honestum Consulem facta monasterio Sanctae Mariae in Palatiolo.

Ex MANGARINI
Bullar. cassin.
l. 2. const. 74.
p. 68.

An. 1009
die 8 ianuar.

In nom.^e Patris &c. anno Deo propitio pontificatus D.ⁿⁱ Ioannis S. P. et universalis Papae in Apl^{ica} sacrat.^{ma} B. Petri Ap^{li} D.ⁿⁱ sede, sexto, IMPERANTE NEMINE (2), die octava mensis ianuarii Ind.^e septima Ravennae. D^{nae} Setae et meritae et ter beatiss.^{ae} semperq. virginis Dei genitricis Mariae quae vocatur in Palatiolo in qua Deo protegente Ioannes ven. presbiter et Abbas ipsius regulae esse videtur. Ego Honestus Arim: filius quondam Honesti Ducis praes. praes. &c. Qua de re dictus Honestus Consul filius quondam Honesti Ducis donator &c.

Petrus Tabellio huius civit. Ravennae scriptor huius cartulae &c. complevi &c.

N. 55. Donatio Othonis Comitis, Arduini Italiae Regis filii, Ecclesiae S. Syri Papiensis.

Ex Bibl. sehus.
cent. 2. cap. 3.

An.
1008-1009.

In nom.^e Dei et Salvat. &c. Ardoinus divina tribuente gratia piissimus rex anno regni eius propitio septimo Ind.^e vii. Nos Otho Comes filius

(1) Ved. in ROBOLINI op. cit. l. 2. p. 94. e p. 301. e seg. nota (MM), le ragioni per cui assegna agli ultimi mesi dell'anno 1007 la data di questo documento.

(2) Una carta della badia di Pomposa porta questo noto cronologico: « Actum » Ravennae An. D.ⁿⁱ Ioannis (xviii) Papae die 29 oct. Ind. vii (1009), IMPERATOREM » IN ITALIA NONDUM HABEMVS. » Un'altra dell'anno seguente tiene: Actum Comacini An. D.ⁿⁱ Sergii Papae 2.^o, HENRICI REGIS 9.^o, die 13 decembris.

eiusd. seren.^{mi} dñi et metuend.^m patris mei dñi Ardoini regis. ipso namq. dño patre meo mihi consentiente atq. iubente qui professus sum ex natione mea lege uiuere salica praes.^m praes.^{bs} dico. quisquis in sanctis &c. ideoq. me qui supra Otho comes dono a presenti die infrascripte ecclae S. Syri ep̄i papiensis et martyris ubi uenerabilis et reuerendus dñs R. (1) pracesse uidetur Ep̄us ad usum canonicorum ibi Deo famulantium pro anima mea, antecessorum et parentum meorum mercede oēs illas res quas habere uisus sum inter Ticinum et Granolonum quae sunt jugera terrae arabilis centum septuaginta quinque per mensuram secundum quod olim illustris princeps dñs Ardicinus dilect.^{ms} frater et ego qui supra Otho comes fecimus cartulam in suprascr.^a Ecclesia ad usu^m predictor.^m canonicor.^m cum oībus honoribus et redditibus atq. districtis ipsis rebus oībus per aliquem modum pertinentibus omnia cum oībus. Quas autem res oēs juris mī supradictas una cum accessio- nibus et ingressibus &c. dono et offero atq. confirmo pro anima mea et antecessorum et parentum meorum mercede ita ut faciant ab hac die uen. dñs R. Ep̄us et canonici praed.^c Ecclae aut eorum successores qq̄ uoluerint sine omni mea uel meorum successorum contradic.^c Et quidem spondeo atq. promitto mihi, qui supra Otho comes una cum meis heredibus aduersus nos qui supra D. R. Ep̄us et aduersus in dicta Ecclā supradictam offersionem qualiter supra legitur ab oībus hominibus uarentare quod si factum uel scriptum est conseruare promitto. hanc enim cartam offersionis donationis et concessionis pagine Ruitpertus sacri Palatii scriptor tradidit et scribere rogauit ex praecepto seren.^{mi} dñi Ardoini regis metuend.^m genitoris mei quam subter confirmaui testibus obtuli roborandam. Actum ap. Papiam in palatio juxta Ecclesiam sc̄i Michaelis fel.

Signum manibus dñi Ardoini seren.^{mi} ac inuictissⁱ regis, atq. Othonis Comitis ejus filii qui hanc cartam offersionis rogauit, et ipse dñs Ardoinus rex eidem filio suo concessit ut supra.

Signa manuum *Berengarii comitis et Viberti Comitis* test. (2).

Et haec carta fuit tradita in manu dñi magistri Adelmari Archidiaconi a parte supradictae Eccl.^{ae} et tunc erat D. Canonicus Alcherius et D. Amizo, et D. Boso et D. Fulcherius et D. Domengus et alii quam plures.

Ego qui s.^a Ruitpertus not. S. P. scriptor huius cartulae offersionis praedictum compleui et tradidi.

(1) Forse RAYNALDVS V. UGHelli Ital. S. T. I col. 1088.

(2) Berengario e Viberto sono nominati come ribelli nelle sentenze date da Arrigo I Imp. nell'an. MXXV. Doc. n. 39 e 40.

N. 56. Henrici 1 Imperatoris sententia, contra Vbertum comitem, filium Aldeprandi, Othbertum marchionem et filios eius, et Albertum nepotem, Ardoini regis fautores.

Il. P. Monum.
tom. I. p. 405.
n. CCXXXVIII.

MIRATORI
Ant. Estensi
part. I. p. 108.

An 1014.

In nom.^e s. et indiuiduae trin.

Henricus fauente diuina elementia Romanor. imper. aug. Notum esse uolumus uniuersis scē dei ecclesiae fidelibus Vbertum comitem filium aldeprandi othbertum marchionem et filios eius et albertum nepotem illius postquam nos in regem et imperatorem elegerunt et post manus nobis datas et sacramenta nobis facta cum dei nostroque inimico Arduino regnum nostrum inuasisse rapinas predas uastationes ubique fecisse et quod sine luctu non est dicendum territoria et pertinentia omnium ecclesiarum miserabiliter bonis omnibus expoliasse magnus dolor nimius luctus inaudita intus et foris desolatio. si ergo ita destructis ecclesiis subuenitur quod deo placebit nulli bonorum displicendum erit consilioq. ergo cum amicis dei habito scrutata et inuenta est lex longobardor.^m quae ita iubet. Si quis contra animum regis cogitauerit aut consiliatus fuerit animae suae incurrat periculum et res illius infiscentur. Secundum igitur legem eorum nostra propterea sunt oīa bona ipsorum quia manifestum est *ipsos contra nos non solum cogitasse aut consiliatos fuisse scilicet etiam ausus nefarios et conatus impuros opere exercenisse et publice bella contra nos preparasse.* Quia ergo legibus eorum nostra sunt bona ipsorum Ecclesiae scē Syri episc.¹ Ticinensis quam ipsi in suis pertinentiis igne et rapinis uehementer deuastauerunt de praediis eorum partem dare uolumus ut sic uel in aliquo recompensatione facta tolerabilius illata ualeat substinere dispendia donec deo donante commodae sibi succrescant maiora. iuste igitur et legaliter damus sibi de rebus Vberti filii Hildeprandi castellum de cerreto et uulparia cum omnibus eorum adiacentiis ad iugera tria millia cum suo toto districtu de rebus Vberti et filiorum eius et Alberti nepotis ipsius marchionis quidquid habuisse uisi sunt in seadraino prope castrum de Balbiano et in territorio scē martini in strata et in casale ad iugera quingenta quatenus ecclā beatī confessoris domini Syri et pastor qui per tempora ibi fuerit omnia quae supra nominata sunt cum suis pertinentiis aquis scilicet aquarumque decursibus ripis molendinis piscationibus terris cultis et incultis uadis uenationibus stalariis seruis et ancillis capellis montibus et ualibus rupibus et pratis mercatis et districtibus et cum oībus quae nominari possunt in aeternum iure proprietario habeat atq. disponat nostra nostrorumq. successorum et omnium hominum contradictione et molestatione et diminoratione remota. Concedimus insuper s. Syro patrono nostro districtum de Setema (1) ad miliaria octo in omni parte in circuitu sicut ad nostram partem pertinere ui-

(1) De Secema (Ant. Est. p. 109. P. 1.).

detur pro pace et quiete ipsius Eccl̃ae et remedio et salute animae nostrae nostrorumq. successor.^m regum et imperator.^m Si quis igitur contra hoc nostrum preceptum in eternum deo propitio ualiturum ire temptauerit et ecclesiam beati Syri uel pastorem suum disuestire uel in aliquo molestare de predictis rebus presumpserit componat mille libras auri purissimi medietatem sc̃e Ticinensis eccl̃ae et camerae nostrae alteram medietatem. Quod ut uerius credatur et ab omnibus inuiolabiliter conseruetur hoc preceptu^m manu ñra firmauimus et ñro sigillo insigniri precipimus.

Signum d̃ni Henrici (*monogr.*) inuiet.^{ml} Imp. Aug.

Henricus cancell. uice Coradi Ep̃i et Archiep̃ell.^l recognouit

Factum a. incar. dom.^{sc} m̃xiii. ind. duodecima an. uero d̃ni Henrici Imp. augusti regni xii. imperii uero primo. Actum Solega.

Interfuer. testes isto precepto domnus Kan. Archidiaconus et Lanerlagus de Beccaria Canonicus papiensis et Gaiferius Isimbardus.

N. 37.

Henrici I Imperatoris sententia, qua ecclesiae Vercellensi complura praedia Ardoini regis fautorum attribuit, et alia bona restituit.

Dal Mon. H. P.
t. I. n. ccxxxix.
p. 406.
(dall'origin.,
arch. vercell.)

Id. DURANDI
Ant. cond. del
Verc. p. 126.

In Tabul.
TERRANEI
ad an
An. 1014.

In nom.^e s.^{aa} et indiuid. trinitatis. Henricus diuina fau. elem. Romanorum imper. aug. Notum sit omnibus, quod nos donauimus, imo reddidimus s. Eusebio uerecellensi monasterium (1) de coliadēs, Bornadem, monasteriolum cum castello Grignasco, cum terra, et districtu uallis Sicidae, sicut Ricardus (2), et uxor eius Waldrada tenuerunt. Dedimus karon (3) fontanarum (4), reddimus caualli cerro (5), sulziam (6) con-

(1) *Monasterium de Coliades*. Nel diploma di Ottone III dato in Roma il 7 di maggio 999 pubblicato dal DURANDI (Piemonte trasp. Alpi Graie e Pennine p. 148.) leggesi. *Sanctum Mariam in Oliade quae dicitur Monasteriolum*. Anche nel Tabul. part. II. del TERRANEI, nella parte stampata a p. 30 e 36, leggesi in *Oliade*: così pure legge il CUSANO (serie delle donaz. p. 355.): lezione, dice il DURANDI (Ant. condiz. del Vercell. p. 129.) migliore di quella del MURATORI che pubblicò pure (Ant. m. aev. t. VI. col. 318.) il documento Ottoniano.

(2) *Ricardus et uxor eius Waldrada*. Di Ricardo Conte, e di Waldrada sua moglie si fa menzione in Basilicapetri Nov. sacra p. 318., in Ant. m. aev. t. III. col. 741. an. 998., e nel dipl. di Corrado Imp. an. 1028. per la chiesa di Novara, in Basilicap. p. 329. (DURANDI Ant. cond. del Verc. p. 130.).

(3) *Eliam* (TERRANEI Tab. ms. t. II.).

(4) *Fontanetum* (TEN. ib.).

(5) Di Cerro si fa menzione nel diploma di Corrado sopracitato dell'anno 1028.

(6) *Salugiam* (TER. ib.).

firmavimus trentino (1). dedimus et olinolum, de kalendustra (2) medietatem confirmavimus, quia eius erat dono amizonis, alteram medietatem donavimus, quia lege italica (3) ad nostrum ius devenit. *Damus etiam omnia quae papiae aut in tota italia habuerunt Damus* omnia praedia Odonis de Grignaseo (4), et nepotum eius Ingezonis, Rainaldi, et Gezonis de Rade, Riglozonis et filiorum eius de arbori (5), Vgonis, et Widonis de calpignano, Auguberti (6) de Meleto, et nepotis eius (7) Armanni, Ugonis de Brinade (8), Aldonis de Aurello, Aldonis de Ceresane, Curtii, Ascherii, et Reulfi de Mortara, Ascheri, et Walonis de Mortara, Amilongi, et fratrum eius de Castello nono, filiorum Aribaldi de Cocio, Mainfredi de Ponzana (9), Auiberti de Stüppiana (10), Roberti de Carisio, Liup̄ci (11) iudicis, et generi eius Bruningi, et filiorum eius, Armanni diaconi, et filiorum eius, Arlebaldi Remedii, Landrici, filiorum Gisalberti iudicis, Wilhelmi Nigri, Azonis de Pezana, Azonis de Sala, filiorum Vidonis de Balzola, filiorum Girardi de Morano, Flodenerti de Alise (12), Ansigisi filii Liuzonis (13) Ep̄i. Vberti iudicis de Sporeia (14), Tealdi Atonis, et Arnaldi Olrici, et fratrum eius Wilcherami, Sigifredi, et Aleheri de Falara (15), Iohannis de Gondezone, Milonis de Iporeia, Bonfilii de Solario (16), Verimperti Milonis de Saluzula, Vnfredi de Tontano (17) Roderardi, et Walmundi Olrici de Lama (18), Atonis et Angilmanni (19), filiorum Astulfi, et Odonis, et Adam de Waldingo, Aimonis de Waklingo, Berardi de Monte, Mainardi de Aue-

(1) Reventino (TER. ib.).

(2) Kalendustra (TER. ib.).

(3) *Legge italica*. « Arrigo prende qui la legge italica nell'istesso senso nel quale verso » il fine del diploma prendo quella de' Longobardi, cioè si serve di una parte della » legge Giulia *Maiestatis* per aggiudicare al fisco i beni de' ribelli; nominando l'imp. » i beni de' ribelli che furono devoluti al suo fisco *lege italica*, c'indica che i medesimi » vivevano secondo le leggi romane, e così li distingue da quelli che erano addetti alle » leggi longobardo secondo le quali parimenti li giudica. » (DUR. I. c.).

(4) Ghergnaseo (TER. ib.).

(5) Arborio (TER. ib.).

(6) Angualberti (TER. ib.).

(7) Eius filii (TER. ib.).

(8) Urnade (TER. ib.).

(9) Pezana (TER. ib.).

(10) Stüppiana (TER. ib.).

(11) Luprandi (TER. ib.).

(12) f. Alice (TER. ib.).

(13) f. Ugonis vel Ingonis (TER. ib.).

(14) Iporeia (TER. ib.).

(15) et Altieri de Salara (TER. ib.).

(16) *Bonfilii de Solerio*. La famiglia de Solerio fiorì poscia io Ivrea.

(17) Tronzano (TER. ib.).

(18) Baia (TER. ib.).

(19) Indelmari (TER. ib.).

gna (1), Alberici Clerici filii Himerici de Salizola, Willielmi de Salizola, Raderardi filii Ilani (2), et Operli filii Azonis de Casale, Vgonis de Palestre, Adam vicecomitis, Ribaldi de Suno, Baldoli de Casale. Dedimus praedia *Wiberti* (3) *filii Dadonis* in Ceprione (4) Canuesese (5), Pertuso, Agamio, Plumbia, et ubique habuit in Italia. Dedimus praedia Girardi (6), et fratrum eius, filiorum Roberti de Vulpiano (7), Aimini Willielmi, et Ozonis de Liurno, Gosllini (8) et Girardi Confredi de Liurno Lemurni, filii presbiteri Liuzonis, Asmundi et Berizonis filiorum Berardi, Ingizonis fratris Isaac, Gribaldi (9) clerici, et Alberti, filiorum (10) presbiteri Delimberti, filiorum Roconis, et Graseneri de Scaramanno, Ebonis de Bulano, Roderadi et Aimonis de Vliaco, Aziperti et Sindiconis de Auaringo, aldonis, et fratrum eius de Sualingo, Sigimani de Monte, Algonis (11), filiorum Tediti, filii Alberici de Monterone, Ebonis, et filiorum eius de Firminiana, Ogerii de Plaioles, Rodulfi de canales, Salieonis de Conflentia, Sigifredi, et Ingelberti de Tredino (12), Tebaldi, et Widonis fratrum de Plazo, Ingonis de Ariaco, aldonis, et filii eius, Bennonis de Leurano (13), Aimonis de Campale, Alberti de Eimerici de Torella, filiorum Armanni iudicis de scto Euasio, Folcadi de Casale (14) Rogerii de scto Salvatore, et filiarum

(1) Quaregna (TER. ib.).

(2) Alaci (TER. ib.).

(3) *Wiberti filii Dadonis*. Questo Wiberto era dunque fratello di Ardoino, giacchè questo re era pur figlio di Dadone; di lui si fa menzione in un Placito tenuto in Pavia da Ottone Conte del sacro Palazzo, presieduto da Ottone Imp. l'anno 1001 a' 14 d'ottobre (MEN. Ant. Est. part. I.) al quale assistette fra gli altri primati *Wibertus Comes filius b. m. Dadonis itemq. Comitis*. Si osservi che quivi Dadone vien detto Conte o non Marchese. Ma nel presente diploma Arrigo non dà più il titolo di Conte a Wiberto, perchè ribelle. Parimenti il medesimo Wiberto è sottoscritto al decreto di fondazione del monastero di S. Giusto di Susa (M. II. P. Tom. I. N. CLXXXII.), ma il GUICHENON ed altri lo scambiarono malamente con Umberto Conte di Savoia (dal DURANDI l. c. p. 131.).

(4) Cerrione (TER. ib.).

(5) Canaueso (TER. ib.).

(6) Forse si deve leggere Nitardi.

(7) *Filiorum Roberti de Vulpiano*. Erano quattro: S. Guglielmo, Abbate del monastero Divionense, Gotifredo, Nitardo e Roberto nati da Roberto da Vulpiano e da Perinza sorella del re Ardoino (Cfr. II. P. M. Tom. I. Doc. cexliv., et GLAB. Rod. in vita S. Willielmi Divion. Abb. cap. I. IX. ecc.).

(8) Aimonis, Rosellini, Girardi, Confredi de Livorno (TER. ib.).

(9) Gribaldi.

(10) Filii (TER. ib.).

(11) Aldonis.

(12) Ceredono. (TER. ib.).

(13) Leozano (TER. ib.).

(14) « De Casale. Adunque S. Evasio e Casale erano allora due luoghi distinti: bensì » unironsi posea in un solo. I luoghi rammentati dal diploma in questa parte sono » di là dal Po, cioè: Piozzo, Lavriano, Brusasco, Torcello, Casale, S. Salvatore, » Brosolo, Cereseto etc. (DUR. l. c.).

eius, Mainfredi de Brosilo, Brascueri de Ceresido, et fratres (1) Aldonis, astulfi aribaldi, et Vberti, Mainfredi de Coee Birardi de Wu-lingo, Rozonis, et Ugonis de Monticlo (2), constantii de Palazolo, et filior^m eius, Aribaldi de Caualiaca omnia predia Tushardi (3), et Walderade et Viberti, filii Dadonis, et omnium istorum hominum, quorum nomina hic scripta continentur, lege (4) Longobardorum nostra sunt propria, *quia isti, postquam nobis fidelitatem iurauerunt, corona Regni lonbobardici, et diademate Imperii nobis iam attributa, Ardoino Regni nostri inuasori inuncti, omnia nastauerunt*, et maxime Eusebianam Eccl^{am} miserabiliter afflixerunt, ideo quod quia legibus perdidierunt, legibus nostra sunt, et quia legibus nostra sunt legibus S^{cto} Eusebio o^{ia} in ppetuum damus. Quicumq. aut^m s^{ctm} vercellensem Eccl^m de his oib^{us} disuestiuerit, uel inquietauerit, componat kamere n^{re} mille libras auri, et s^{cto} Eusebio alteram. Quod ut credatur, et conseruetur hoc preceptum, manu nostra firmauimus, et sigillo nostro iussimus insigniri.

Signum domini Henrici inuietissimi, et gloriosissimi serenissimi imperatoris augusti.

..... (5) Iricus cancellarius uice Heberardi episcopi, et archicancellarii recognouit.

Anno Domini Incarnationis m^{xi}l. indictione xil. anno uero Regni domini Henrici Imperatoris Aug. xil. Imperii uero i. Actum Folega (6) feliciter amen.

N. 58.

Ex Novar. sacr.
Car. a Basili-
capetri lib. II.
p. 313.
et ex UGHELL.
Ital. sacra IV.
col. 700.
An. 1011.

Eiusdem Henrici i Imperatoris diploma quo Petro Novariensi episcopo quendam comitatulum vallis Ausulae, necnon plebem Trecate, et curtem Gravalona pro damnorum recompensatione concedit.

In nom.^e S.^{ae} et Ind.^{ae} Trin. Henr. diu. ord. clem. Rom. Imp. Aug.
Dum fidelium petitionibus nostrae Imp.^{is} celsitudinis assensum prae-

(1) Fratrum (TER. ib.).

(2) Montido (TER. ib.).

(3) Ricardi (TER. ib.). V. la nota (2) pag. 379.

(4) « *Legge Longobardorum*. I ribelli qui deseriti vivevano dunque secondo la legge longobarda a norma di cui sono puniti colla confisca (Leg. Rotharis l. 3. 4. Rer. Ital. t. I. Part. II. p. 1. 2.). Sembra però, che da questi si debba eccettuare Wiberto figlio di Dadone, perciocchè Ottone figliuolo del re Ardoino fratello di esso Wiberto, nella succennata carta dell'anno 1009 per la cattedrale di Pavia si propose di vivere secondo la legge italica, cioè Romana (DUR. l. c.).

(5) Oldericus (TER. ib.).

(6) Solega (TER. ib.).

buerimus, eos nostro seruitio promptiores, ac deuotiores esse minime dubitamus. Quapropter cunctorum Eccl.^{ae} catholicae fidelium, nostrorumq. tam praesentium quam futurorum solertia recognoscat, Petrum Ven. Virum S.^{ae} Novar.^{is} Ecclesiae Epum. nostrumq. fidelem, *qui nuae fidelitatis causa multa sustinuit, fumen uidelicet, sitim, aestus, et frigus; et insuper glaciosas rupes, collesque satis asperos nudis pedibus, persequentibus inimicis fugiendo superauit; qui etiam nunc praesentialiter nulla damna Arduino deuastante recepit; nam Ecclesiae illius sunt depredatae, castra disrupta, domus euersae, vineae incisae, urbores decorticatae; insuper plebes ipsius, et curtes ab Arduino pro beneficio, suisq. inimicis datae sunt*: nostram imperialem adiisse excellentiam, quatenus pro sui laboris recompensatione (1), et suorum damnorum restauratione, quendam Comitatum qui in Valle Ausula infra ipsius Episcopatus Parochiam adiacere dignoscitur, praedictae Eccl.^{ae} Novariensi cum omnibus functionibus, quae de ipso comitatu publicae parti pertinent concederemus. Nec non etiam deprecatus est nos, ut quamdam plebem sui Episcopatus, quam olim malo ordine, et iniusta ratione sua perdidit Ecclesia, quae sita est in villa quae nominatur *Trente*, non adeo procul a Civitate; Curtem quoque quae *Gravalona* dicitur quondam ipsius Episcopi continentem, sed quae nunc iniuste pervasa esse dignoscitur, suae Ecclesiae restitueremus. Itaque dignum est ut sui laboris praenominatus praesul retributionem a nobis suscipiat. Et quoniam iustum est ut supranominata Plebs, atq. Cors iam dicta suo restituantur Episcopatu, et ut alii nostri fideles hoc cognoscentes nostrae fidelitati amplius stabiliantur eius precibus annuentes iam dictum Comitatum a nostro iure in eius Ecclesiae potestate omnino transfundimus, et perdonamus, et praefatam Plebem, atq. Cortem per hoc nostrae auctoritatis praeceptum iam supradictae Novariensi Ecclesiae reddimus et concedimus, cum omni districtu, et teloneis, ac piscationibus quae in flumine Toxo sunt, in illis scilicet locis, ubi ipsa Ecclesia ex utraque fluminis tenet parte et cum venationibus, seu omnibus rebus, quae ad publicam partem ex eodem comitatu exigi possunt cum capellis, domo curtili (2) massaritiis, easis, sediminibus, campis, pratis, vineis, pascuis, silvis, stalariis, saletis, paludibus, aquis, aquarum decursibus, molenis, piscationibus, cultis, et incultis, divisis, et indivisis, terminis concessionis, piscariis, campariis, aliisque uniuersis redhibitionibus, cum servis, et ancillis, aldianibus, et aldianis utriusq. sexus, cum omnibus, quae dici vel vocari possunt ad iam dictam plebem, vel cortem pertinentibus vel respicientibus. Neenon et portum de Bestamo eidem plebi pertinentem, quem gloriosissimus avunculus noster Otto maior supradictae sedi per praeceptum concessit: ita ut nullus marchio, comes, vicecomes, sculatus eius, seu quaelibet magna, parvaeque persona,

(1) Compensatione (Ugh.).

(2) Domo, curtili, (Ugh. l. iv.).

homines iam dicti comitatus, seu plebis, vel cortis, audeat distringere, aut infra ipsum comitatum aliquid praesumant (1) exigere, vel paratas facere, nec ullas redhibitiones acquirere. Sed liceat memorato praesuli, suisq. successoribus, iam saepedictum comitatum, cum supradicta plebe, vel corte tenere, et omnes homines ipsius comitatus, sive ipsius plebis, seu cortis per se, vel suum legatum distringere, sicut et per nos, vel nostrum missum distringendi essent, et omnia quae de ipso comitatu ad publicam partem pertinent, vel inde exigi possunt; et praetaxatam plebem de Treceate, atq. cortem de Gravalona cum omnibus suis appenditiis, vel pertinentiis habeat, teneat, firmiterq. possideat, tam ipse quam successores illius qui Deo favente dispositionem ipsius sedis, et cathedram suscepturi sunt, omni nostro nostrorumq. successorum regum, et imperatorum omni hominum contradictione, vel diminutione remota. Si quis igitur hoc nostrae concessionis, et confirmationis praeceptum nefarie, ausu temerario violare praesumpserit, centum libras auri optimi componere cogatur, medietatem palatio nostro, et medietatem Novariensis Ecclesiae eiusq. rectori qui pro tempore inibi habetur. Et hoc ut verius credatur, diligentiusq. ab omnibus observetur, manu propria subter confirmantes, sigilli nostri impressione iussimus insigniri.

Signum D. Henrici Ser.^{mi} et Inuict.^{mi} Imp. Aug.

Dat. a. Incarn. Dominicae millesimo decimo quarto, Ind.^c duodecima Anno vero regni D. Henrici Imp. Aug. xii., Imperii primo. Actum Truciianae feliciter Amen.

N. 59.

TATTI
Annali Sacri
della città di
Como tom. II.
p. 837.

An. 1015.

Alterum Heinrichi I Imperatoris diploma, quo monasterio S. Abundii nonnulla bona tradit Alberti Parmensis, atque Wiberti et Sigefredi filiorum eius.

Heinricus Divino nutu Imperator Aug.

Si sanctis, ac venerabilibus locis &c. Deet enim et imperio nostro est incrementum Deo retribuere, et ei honorem impendere de his, quae ipse dedit, qui gratis honorat, et a quo omnis honor procedit &c. Quocirca omnibus Dei, nostrisque fidelibus praesentibus, et futuris notum esse volumus, quod nos pro remedio animae nostrae, et nostri imperii sublimitate donamus, atque concedimus sanctae Cumanae ecclesiae Monasterii S. Abundii, siti non longe foris ab Urbe, cui praestest dominus Albericus venerab. episcopus omnem portionem terrae ALBERTI Parmensis filiorumque eius scilicet WIBERTI et SIGEFREDI, quam haec-

(1) Praesumat (UGH.).

nus habere uisi sunt in Valletellina in loco ubi dicitur Talamona. uel, in aliquo loco in eadem ualle, quorum haereditas et proprietas fuit. Sed quia in nos offendentes contra nostrum imperium tractauerunt, et periuri atque rei in nostram maiestatem extiterunt, iure ac legaliter omnia, quae habuerunt, ad nostram partem publice deuenerunt. Merito ergo sua omnia perdunt, qui se ipsos gratis perdiderunt, dum fidem debitam non seruantes in nostra fidelitate minime permanserunt; ideoque dignum et iustum, ac Deo et nostris fidelibus placitum, insuper legibus approbatum perspicientes, libenter donamus, atque concedimus iam dicto monasterio S. Abundii quicquid habuerunt *supra memorati periuri* in praedicto loco Talamona, aut alicubi in praenominata ualle, tam in montibus, quam in planis, in terris cultis, et incultis, in pascuis, siluis, uinetis, in seruis quoque &c. et omnibus quae adhuc dici et nominari possunt, de iam dicta pertinentia, quae ad publicum solui possunt, omnino in integrum largimur, atque a nostro iure, et dominio, in ius, et dominium et proprietatem praefati coenobii transfundimus, et delegamus, sicut usque modo *praelibatis reis* pertinere uisa sunt. Eo uidelicet ordine ut Abbas, qui nunc praest, omnesque sui successores, qui ibidem pro tempore fuerint, potestatem habeant praedicta omnia illorum, quae sunt in iam dicta ualle, tenere, possidere, commutare, uel quicquid uoluerint facere ad laudem, et honorem omnipotentis Dei, et S. Abundii, et communem fratrum sustentationem, et utilitatem ex nostra plenissima auctoritate. Iubentes igitur sanctimus ut &c. si uero quod minime credimus contra huius nostri praecepti statuta quisquam temerarius uiolator extiterit, componat auri probatissimi libras centum medietatem nostrae parti, et medietatem praesenti Abbati, uel suis successoribus. Quod ut uerius credatur &c.

Signum † Domni Heinrici glorios. atque inuict. imperatoris semper Aug.

Heinricus Parmensis episcopus et cancellarius, uice Euerardi episcopi, et Archicancell. recognouit.

Data iiii. non. octobr. Anno D.^{co} Inc. mxy. Ind.^o xiv. regni uero Domini Heinrici imp.^o augusti xiiii. imperii autem ii. Actum Meresburg felice. Amen.

N. 40.

TATTI
Annali Sacri
della città di
Como tom II.
p 835.

An. 1015.

Privilegium Heinrici I Imp. quo Alberico Cumanus Episcopo villam Barzanorum concedit, quae fuit proprietas Berengarii et Ugonis rebellium.

Henricus superna elementia Romanorum Imperator Aug. Si petitionibus nostrorum fidelium, nobisque debite famulantium aures nostrae pietatis inclinauerimus, promptiores eos fore in nro seruitio non dubitamus. Uniuersitatem igitur omnium nobis obsequientium, praesen-

tium scilicet et futurorum nequaquam latere nolumus, quod Albericus sc̃tae Cumanae eccl.^{ae} venerabilis, et noster dilectus episcopus, nostrae pietatis celsitudinem adiit, suppliciter postulans, ut pro sempiterni retributoris amore, et salute animae nostrae, eiusque collato et conferendo seruitio, nostroq. imperio sublimando, eidem sanctae matri eccl.^{ae} ad honorem Dei Genitricis et Virginis Mariae dicatae, quamdam Curtem cum oībus suis pertinenciis, quae dicitur Villa Barzanorum quae fuit haereditas et proprietas filiorum comitis SIGIFREDI, BERENGARII ET YGONIS concedere et donare dignaremur. *Quorum quoniam in nos nimis offendentes contra nostrum imperium male tractauerunt, et periuri, atque rei in nostram maiestatem publice extiterunt, jure et legaliter non solum haec, sed et omnia quae habuerunt ad nostrum publicum denuerunt, unde sua omnia merito perdunt, qui se ipsos gratis perdiderunt, dum fidei debita obliuexentes in nostra fidelitate minime durarunt, et nostro inimico iurantes adhaeserunt.* Hanc ergo postulacionem dignam et ratam prospicientes et ullo modo negare ualentes, ipsius precibus libenter acquieuius. Concedentes atque confirmantes eidem Cumano uenerabili, et dilecto episcopo, omnibusque suis successoribus supradictam Curtem Villam Barzanorum nominatam cum oībus suis appenditiis, cum oībus redditibus et exhibitionibus, impensionibus et functionibus, cum seruis &c. et cum oībus quae adhuc dici, uel nominari possunt, ad eandem Curtem pertinentibus, atque omnino in integrum largimur, et a nr̃o jure et dominio in ius, et dominium, et proprietatem praefatae sc̃tae eccl.^{ae} transfundimus et delegamus, ut qui nunc praest episcopus, omnesque sui successores potestatem habeant iam dictam Curtem cum oībus quae ad eam plinent, tenere, possidere, commutare sicut haecenus *praelibatis periuris* uisa sunt pertinere, et ipsi hereditates possiderunt. Et facient idem episcopi de eadem Curte et oībus, quae inde solui possunt, quicquid sibi placuerit ad laudem et honorem Dei, et sc̃te Mariae ex nostra plenissima auctoritate. Iubentes ergo &c. si uero quod minime credimus contra huius nostri praecepti statuta &c. sciat se certissime compositurum auri libras mille, unam partem Camerae nostrae, alteram praenominato episcopo &c. Et ut hoc uerius credatur &c.

Sign. † Domni Heinrici glorios., atque inuiet. imp. semper Aug.

Heinricus Parmensis Ep̃us, et canzellar. uice Euerardi epise. et Archicanzell. recognouit.

Data quarto non. octobr. an. D.^{co} Inc. mxv. Ind.^o xiv., regni uero D.ⁿⁱ Heinrici Imp. Aug. xiv, Imperii autem eius ii. Act. Meresburg fel. amen.

N. 41. Epitaphium Adalberti iunioris, Oberti et Atestinorum principum satoris, filii, in ecclesia monasterii Castilionensis positum (1).

Ap.
SASSOVISO
Famigl. III.
p. 380.

Cfr. SCHREIBER
Orig. Gnelf.
tom. 1. lib. 2.
cap. ix. § 16

HECTOREOS CINERES ET ACHILLIS BVSTA SVPERBI
CAESAREVMQVE CAPVT PARIO HOC SVB MARMORE TECTVM
CERNERE NE DVBITES. PIETATE ALBERTVS ET ARMIS
INCLITVS AVSONIAE QVONDAM SPES FIDA CARINAE
QVO DVCE ROMVLEVS CYRNVS (2) SVBIECTA TRIVMPHIS
BARBARA GENS ITALIAQVE PROCVL DISPELLITVR VRBE.
MARCHIO DVX LATII SACER AEDIS CONDITOR HVIVS
IAC TVMVLATVR HVMO. MELIOR PARS AETHERE GAVDET.
OBIIT ANNO SAL. MXXXIV. DIE VI IANVAR.

(1) Il monastero di Castiglione, posto su quel di Parma fra Borgo S. Donnino e Bosseto.

(2) Ecco s'io non m'inganno il senso di questa frase: ROMVLEVS CYRNVS, QVO DVCE, BARBARA GENS (cioè i Saracini oppressori delle isole di Corsica e di Sardegna, ed i Tedeschi occupatori di Roma) SVBIECTA est TRIVMPHIS, et DISPELLITVR PROCVL VRBE ITALIA. — Egli è noto siccome nell'anno 1017 i Pisani ed i Genovesi alla chiamata di Papa Benedetto VIII trionfarono de' Saracini, in Corsica ed in Sardegna. Quel ROMVLEVS CYRNVS, e l'altro titolo di DVX LATII, dati ad Adalberto dall'epigrafista, mi fanno credere che esso come Capitano Romano (Romuleus) abbia avuto parte in quella vittoria, e venisse perciò dai Romani insignito del grado di DVX LATII. Dalla SCHREIBER poi (Orig. Gnelf. l. c.) abbiamo siccome quell'altre parole: ITALIAQVE PROCVL DISPELLITVR VRBE accennano la parte avuta dallo stesso Adalberto nella sommossa Romana del 1014, contro i Tedeschi. (V. il cap. ix di questi Studi p. 286 a 293 e seg.).

PARERE DELLA GIUNTA ACCADEMICA

INTORNO AGLI SCRITTI INVIATI AL CONCORSO DI PREMIO SUL SEGUENTE QUESITO

Quali furono le cause per le quali la Repubblica d'Atene andò da Pericle in poi decadendo, sinchè venne in potere de' Romani? e quale influenza ebbe essa sul decadimento della Grecia e particolarmente di Sparta?

Il decadimento dei Romani fu nello scorso secolo l'argomento d'un celebre libro, il quale, a malgrado dei posteriori trovati, dura ancora come monumento di quell'acuta sagacità, che sa, entro ristretto ma ricco quadro, condensare fatti, idee, generalità e particolari osservazioni, a fine di porre in chiara luce un altissimo soggetto. Il decadimento d'Atene dall'età di Pericle in poi, e la sua influenza sul decadimento della Grecia, e singolarmente di Sparta, fu il tema, che l'Accademia nostra delle Scienze, sin dal 15 maggio 1842, propose ai dotti, invitandoli ad emulare il gran Montesquien. Sette dissertazioni furono presentate; tal numero dimostra quanto l'argomento riuscisse gradito, ma il loro merito è vario.

La Dissertazione n.º 1, che porta per epigrafe *Omnia mutantur et nos mutamur cum ipsis. Omnia tempus edax depascitur, omnia carpit. Omnia sede movet, nec sinit esse diu*, fu dettata da chi avendo letto di volo e franteso un compendio della storia greca, vanamente sperò di risolvere un alto problema.

La Dissertazione n.º 2, distinta *Καὶ ἔστιν ὁ τοιοῦτος ὄψιμος ἀνάλογον τῶν μοναρχιῶν τῇ τυραννίδι* Arist. pol. 4, svela una profonda cognizione degli ordini politici, e molta filosofia nel dedurre dai fatti le loro conseguenze morali. Ma i fatti, oltre all'essere incompleti, sono talora od inesatti, o falsi. Così tre leggi sono attribuite a Solone, le quali ebbero un'origine assai posteriore; del che l'Autore sarebbesi avveduto, se avesse sempre riscontrate nei fonti le citazioni, che incontrò nei libri de' critici. Quindi avvenne pure, che qualche passo di Demostene prova appunto il contrario, se esso si legga nella sua integrità originale. L'Autore diligente nell'enumerare le cause interne ed esterne, che trassero la Grecia in rovina, anzichè esporle seconnesse, avrebbe potuto riunirle sotto poche, ma generali feconde di effetti. L'Egemonia è una di queste. Il lavoro, considerato come un primo getto, onora l'Autore.

Nella Dissertazione n.º 3, fregiata del motto *Rerum cognoscere causas*; si osserva un movimento di dicitura, una vivacità d'immagini, ed una vibrazione di concetti, che, ove sia temperata, consola la freddezza della critica, ma smodata fa danno al vero, ed offende il gusto. Le frasi *Pericle respinse il Rinaldo Ateniese dalla palestra di Marte alla selva in-*

cantata, ed anche *la corona dell'eloquenza messa dalle Filippiche sul capo di Demostene tramutossi in cipresso sul capo della patria*, ed altre tali assai frequenti mostrano un gusto privo di delicatezza, non che una finta passione per a tempo assunta. In altre si sente tutto lo sforzo dei contrasti laboriosamente cercati, seppur i due disparatissimi opposti non vi si buttano davanti stranamente appaiati, *Rafuello ciabattino*, e *Michelangelo garzone da muratore*. Questa via riconduce al secento, e mena alla *caduta d'un Angelo*. Quell'autore, che dopo lungo confronto di testi e di fatti abbia riconosciuto criticamente il vero positivo, e dopo profonda meditazione sia risalito dai fatti alle idee generatrici, costui rispettivo enuncia la verità circoscritta ne' limiti studiosamente trovati, od anche la sola probabilità secondo i varii suoi gradi; venendo poi nel campo della generalità filosofica nuovamente procede guardingo, perchè con una mente comprensiva vede ancora tutti i particolari, donde emerse l'idea generale. Le sue parole sono appropriate, anzichè esageratrici; il suo stile cammina con un andamento solenne, ammette bensì le grazie, ma quelle sole che spontanee ornano l'argomento, senza o mostrare l'artificio dello scrittore, o divagar le menti dei lettori.

Lo stile declamatorio, sebbene contaminato da alcuni costrutti falliti, regna nella Dissertazione n.º 4, contrassegnata ω *Quid Pandioniae restant, nisi nomen Athenae?* Ovid. Le rettoriche italiane, restringendosi ad insegnare la sola arte di far arringhe, avvezzano i giovani al solo stile di declamazione; donde avviene, che nei temi di critica, e persino nelle epistole, lo stile, quando non è al tutto trascurato, incede magnifico sui trampoli della rettorica. Se l'Autore avesse meglio distinto i tempi e le istituzioni, se con miglior ordine avesse collegati gli effetti colle cause, il bello sarebbe nato spontaneo dal buono, senza andarlo a cercare nello stile presuntuoso. Parecchie nuove proposizioni si ravvisano in questo lavoro, delle quali dovremmo dar lode all'Autore, seppure fossero con opportuni argomenti provate; ma, siccome egli non cita mai alcun testo antico, però ci mancano i mezzi per rifare con lui il lavoro, e per apprezzarne giustamente le parti nuove.

Nella Dissertazione n.º 5, *Cuncta tentavi in sapientia*, le prime trentacinque pagine offrono un accurato compendio della Storia di Tuciddide, che onora l'Autore come scrittore. Ma codesto sommario è inopportuno in una scrittura, che si indirizza a dotti. Imperò chè i fatti non strettamente collegati coll'assunto si dovevano accennare con parole generiche, e gli altri, che toccavano l'argomento, si dovevano con più minuta relazione indagare. Al compendio conseguivano le cause del deca-

dimento d'Atene. Molte stanno con poco ordine addensate, che avremmo voluto vedere svolte nel loro progresso. Propenso a declamare l'Autore talora trascura l'esattezza dei fatti, e tal'altra esagera i vizii. L'appendice, in cui tratta del decadimento di Sparta è insufficiente.

Per rispondere al tema proposto era necessaria una vasta erudizione, una sagace critica nell'apprezzarla, ed un giudizio politico e filosofico sugli ordini pubblici e sui loro fondamenti. In tutte queste tre parti l'Autore della sesta Dissertazione fregiata dei versi *vedi Solon, di cui fu l'util pianta, Che, s'è mal culta, mal frutto produce*, si mostra valente per quanto glielo acconsentivano i suoi mezzi privati, che erano alquanto ristretti in fatto di libri critici moderni. Imperocchè egli non possedeva le opere del Boeckh, del Muller, dello Schömann, del Wachsmuth (1), dei dotti illustratori di Tucidide, e di Senofonte, e di molti altri Tedeschi ed Olandesi, i quali dettarono o monografie compiute, o trattati generali sugli ordini politici, amministrativi, e giudiziarii della Grecia. Eppure, a malgrado di tali difetti, egli con molta perspicacia dichiarò il celebre passo di Polluce sul censo di Solone; tuttavia la spiegazione del Boeckh meritava d'essere esaminata, ed oltre al censo di Solone dovevasi toccare delle modificazioni fattevi da Euclide, e da Nausinico. Parimente egli con molto senno prese a considerare il commercio d'Atene, e la forza della sua marineria mercantile; ma dai libri mentovati avrebbe potuto ricavare nuovi lumi. Dubitiamo poi, che, oltre al testo greco di Polluce, egli disettesse di quello delle Vite di Plutarco; giacchè parlando delle doti Ateniesi, ch'ei dice abolite da Solone, cita la versione del Pompei al tutto inesatta, per non dir erronea. Sprovveduto di molte fonti d'erudizione l'Autore tuttavia compose la più pregiata fralle Dissertazioni, che ci furono presentate. Ma siccome la sua scrittura non corrisponde a quell'altezza, a cui oggidì si trova sollevata in Europa la scienza, mercè le indagini di molti critici; però l'Accademia, mentre loda l'ingegno e fa onorevole menzione del lavoro, non crede di doverlo coronare.

L'Autore della settima Dissertazione, che porta in fronte il verso *Felix qui potuit rerum cognoscere causas*, forse ristucco dal sentir ognora proclamare il progresso, accagionò questo del decadimento d'Atene. Ma se Atene però, perchè progredendo spinse la democrazia sino

(1) Boeckh, *Économie Politique des Athéniens*; Muller *the Dorians translated by Tufnell*; Schömann *de Comitibus Atheniensium*, ed anche *Antiquitates Iuris Publici Graecorum*; Wachsmuth *Hellenische Alterthümer*; Geel *Historia Critica Sophistarum*; Tilmann *Griechische Staatsverfassungen*, Hermann *Griech. Staats alterthümer*; Clarisse *Vita Periclis*; Tromp *de Pericle etc.*

alla tirannide, Sparta cadde, perchè tenace de' suoi ordini antichi ricusò di progredire e di riscontrarsi colla qualità de' nuovi tempi. Epperò il progresso può bensì citarsi come un carattere distintivo della stirpe Jonica; ma non prendendo forma di vizio o di virtù se non dal suo eccesso, ovvero dal difetto, non può dirsi causa di rovina o di fiorimento. Le altre idee generali dell'Autore lasciano desiderare applicazioni speciali all'argomento, che restringano e diano il giusto modo d'influenza alle varie cause. Imperocchè fralle cagioni, che trassero a rovina Roma e la Grecia, parecchie sono le medesime, come i vizii delle nazioni tornano sempre gli stessi; ma il grado loro, i contrasti, il modo di manifestazione, ed altri particolari diversificandosi, è necessario lo scendere alle specialità, che danno il proprio colore a ciascuna nazione nei varii suoi periodi. A tal fine mal risponde lo stile declamatorio facilmente esageratore, che mira a colpire anzichè a persuadere i lettori.

Da ultimo parlando in generale delle dotte Dissertazioni Italiane, giova ricordare il seguente passo di Cicerone: *Veteres omnem omnium rerum, quae ad mores hominum, quae ad vitam, quae ul virtutem, quae ad rempublicam pertinebant, cognitionem et scientiam cum dicendi ratione iungebant; postea', dissociatis a Socrate disertis et doctis, et deinceps a Socraticis item omnibus, philosophi eloquentiam despexerunt, oratores sapientiam* (1). Tal separazione dura tuttavia in molti scrittori italiani. Gli oratori, casti per lingua, musicali nei periodi, briosi per ingegno, difettano della necessaria sapienza; e gli scrittori di filosofici argomenti, trascurati nell'eloquio, inamabili per lo stile, e sdegnosi d'ogni grazia, sprezzano l'eloquenza didascalica.

L'Accademia sperando, che o qualcuno dei concorrenti vorrà purgare ed ampliare il suo lavoro, od altri dotti sieno per entrare nella lizza, prolunga il concorso, lasciandolo aperto sino all'ultimo giorno di marzo del 1846.

Le conclusioni del Parere furono approvate dalla Classe nella sua adunanza del 17 gennaio 1845.

(1) Cicerone de Orat. III. 19

Monte SALUZZO *Presidente*

Cav. GAZZERA *Segretario*

Barone MANNO

Conte SAULI

Cav. BERLOTTI

Cav. BONCOMPAGNI

Cav. PEYRON *Relatore.*

- Pag. 106. lin. 9 *a chi avrebbe* leggi: *a coloro che avrebbero*
- » ivi » 11 *tolgasi arringo*
- » ivi » penult. *tolgansi le parole: da un altro diploma*
- » 107. » 2 *ed appoggiò* leggi: *ed appoggia*
- » ivi » 10 *l'origine* » *l'origine francese*
- » 108. » 4 *Vedi qui la giunta alla pag. 127. lin. 13.*
- » 111. » 1 *anno 997* leggi: *anno 998*
- » 115. » 4 *della nota (2)*
maleficium » *maleficum*
- » 116. » 6 *della nota (1)*
inflatus » *inflatus*
- » 123. » 26 *dopo le parole altri molti aggiungi: e come di fatti egli ottenne nell'anno 1000 (n.º 17 Append.).*
- » 127. » 13 *Dopo la voce parola pongasi questa nota: Nel diploma di Arrigo re pel monastero di Fruttuaria dell'anno MVI (Append. n.º 32) viene nominata BERTA FILIA HAMEDEI: questo AMEDEO non potrebb'egli essere il fratello di Ardoino qui ricordato?*
- » 128. » 16 *e a questo* leggi: *ed a questo.*
- » 129. » 16 *provvedimento;* » *provvedimento,*
- » 130. » 3 *dopo la parola ostinazione si ponga una virgola.*
- » 132. » 6 *dopo 1011 metti: la durata dell'episcopato di Warmondo è ignota (vedi qui la giunta alla pag. 237).*
- » 136. » 14 *questa* leggi: *quella.*
- » 143. *Alla nota (1) s'aggiunga in fine: Siccome la versione italiana della Storia di Leo era in corso di stampa, io dovetti talvolta far uso della versione francese quantunque zeppa di errori.*
- » 148. » 16 *entrambe* leggi: *entrambi*
- » 171. *Dopo la nota (5) aggiungasi: Del resto il cronista del Monte Soratte dice che Marozia era figlia di Teofilatto, ma non già che questi fosse marito di Teodora: Liutprando scrive che Marozia e sua sorella erano figliuole naturali di quella, ed il Curzio che Teodora era moglie di Costantino Senatore; per metter d'accordo tutti questi scrittori si può credere adunque, che la madre di Marozia avesse per marito Costantino, e per amante Teofilatto,*

il che non è impossibile trattandosi di que' tempi turpi, e corrotti.

Pag. 178. lin. 2 e 3 stato . . . ceduto

o restituito leggi: stata . . . ceduta o restituita

» ivi » 4 della nota (4) Sauro » Scauro

» 180. Aggiungi alla nota (3): *Gli scrittori moderni, non eccettuato nè anche il Muratori, chiamano ALBERICO II tiranno ed oppressore di Roma, tenendogli severo conto delle private sue colpe, e non valutando l'uomo pubblico che salvò quella città dal furore delle parti, dalla dominazione di Marozia e dall'occupazione de' Borgognoni. A' passi già da me citati de' varii scrittori coevi, che rendono testimonianza della politica virtù del patrizio ALBERICO, aggiungasi la seguente epigrafe sepolerale trovata dal Galletti, e da esso pubblicata nel suo libro del PRIMICERO (Roma, 1776, in-4.º. p. 83 (raro)) eretta ad un fanciullo discendente di quel principe, per la quale apparisce pure, che i pontefici Benedetto VIII, e Giovanni XIX discendevano anch'essi da ALBERICO.*

AVREA PROGENIES LATET HIC VOCITATA IOHS
FLETV DIGNA GRAVI FLORE TENELLA RVDI.
GREGORIO PATRI FVIT ET DILECTIO MATRI
ATQVE NEPOS MAGNI PRINCIPIS ALBERICI
COMMISERE TIBI GENITOR GENITRISQVE GENISI
IIVNC TV SCĒ TVO SVSCIPIAS GREMIO
NATVS XIII.º KL. NOV. DENOS VIXIT
DIES DECESSIT V. KLEAS DE ANNO AB INCARNATIONE
DNI IXXX INDIC XIII
PONTIFICATV IOHIS XVIII PATRVI SVI.

Il pontefice Giovanni XIX qui nominato, fratello di Benedetto VIII suo predecessore, sedette dall'agosto dell'anno MXXVIII sino alla fine di maggio del MXXXIII (« Art de vérifier les dates »): l'indizione XIII corrisponde all'anno MXXX secondo lo stile pisano. Dove si dee badare che la lettera I che precede le tre X nell'indicazione dell'anno, significa assolutamente il migliaio; noi ne dedurremo adunque che nel-

l'anno MXXX, cioè circa tre quarti di secolo dopo la morte di ALBERICO, la memoria di lui era tuttora viva ed onorata.

- Pag. 187. lin. 3 tolgansi le parole: *per la prima volta*
 » 189. » 1 della nota (2) *neglecti* leggi: *neglecto*
 » 190. » 15 *fin dal 994.* » *fin dal 974.*
 » 196. » 12 *unaninamente* » *unanimemente*
 » ivi » 1 della nota (1) *Willigitus* » *Willigisus*
 » 204. si corregga la nota (*) in questo modo: *sembra che la frase voglia esser letta in questa guisa: « precor ut que nostri iuris in Sabino a quibuslibet detinentur. »*
 » 205. lin. 1 della nota (4) *urbi* leggi: *urbis*
 Pag. 207. lin. 6 della nota (3) invece di *S. Bernwardi* metti: *S. Romualdi*
 » 208. » 13 *di quelli, sospetti* si tolga la virgola
 » 222. nota (1) *« fictitia profecta,* metti *« fictitia profecto*
 » 225. lin. 17 *fermento* leggi: *fomento*
 » 227. » 5 *quanto fosse* » *quanta fosse*
 » 229. » 11 *e venire* » *o venire*
 » 237. Aggiungansi dopo la nota (*) queste parole: *L'UGHELLI mette Ottaviano vescovo d' Ivrea all'anno 1011, ma si appoggia ad un documento giudicato inammissibile (qui pag. 143, nota (4)): tuttavia non risulta ch' egli possedesse quella chiesa prima di quel tempo. Nel 1003 egli era forse vescovo in altro luogo. Tra Warmondo ed Ottaviano non ho trovato altro vescovo d' Ivrea.*
 » 242. lin. 6 nota (2) *alii in* leggi: *alii se in*
 » 249. lin. ult. *diradere* » *diradare*
 » 274. » 13 toglì le parole: *di nuovo*
 » 286. Aggiungasi alla nota (3); *Vedi: « Ordo priscus Rom. ad coronat. » Imp., ex Cod. Cincii Camerarii, in Spicileg. Rom. A. M. 111. » T. VI. »*
 » 291. Aggiungi alla nota (4): *Vedi la citazione del placito nella nota (1) pag. 294 qui appresso.*
 » 315. lin. 17 *volto* leggi: *volte*
 » ivi » 19 *privilegi;* » *privilegi,*
 » 362 In margine sotto la parola *Inedito* si metta: *L. G. Pr.*

INDICE

AGLI STUDI CRITICI SOVRA LA STORIA D'ITALIA
AI TEMPI DEL RE ARDOINO

	PROEMIO	pag. 69
CAPITOLO	I. Sunto delle cose italiane sotto la dominazione degli Ottoni (961-1002)	92
»	II. Origine e primi fatti di Ardoino	103
»	III. Continuazione del medesimo argomento. Fatti d'Ivrea ..	117
»	IV. Divisione politica dell'Italia verso il principio del se- colo XI	137
»	V. Continuazione e fine dello stesso argomento. Ducato Romano. Digressione sovra le cose di Roma ...	151
»	VI. Continuazione dello stesso argomento. Fatti di Roma sul finire del secolo X	181
»	VII. Elezione d'Ardoino a re d'Italia. Sue vittorie alle Chiuse dell'Adige (1002)	210
»	VIII. Fondazione del monastero di Fruttuaria. Arrigo II re di Germania scende in Italia. Tradimento di Verona. Incendio di Pavia (1003-1004)	233
»	IX. Ricerche sovra i fatti del re Ardoino dopo l'incendio di Pavia. Oberto II marchese della Liguria (1004- 1010)	253
»	X. Condizioni della città della Toscana regale. Gare tra Pisa e Lucca. Cose di Roma. Giovanni figliuolo del console Crescenzo vi è creato Patrizio. Stato delle fazioni sotto Benedetto VIII. S. P. (999- 1014)	269

CAPITOLO	XI. Coronazione imperiale di Arrigo re di Germania.	
	Sommossa in Roma destata dagli Estensi in favore	
	di Ardoino. Ultimi fatti di questo re, e sua morte	
	in Fruttuaria (1014-1015)	pag. 283
»	XII. Conseguenze della morte d'Ardoino. Vendette de' Te-	
	deschi. Prigionie, confische, esigli. Origine del-	
	l'Ordine degli Umiliati, e breve sunto della storia	
	loro	» 308
	CONCLUSIONE	» 317
	APPENDICE	» 323
	Giunte e principali correzioni	» 393



INDICE

CLASSE DELLE SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

- D**iscorsi Critici sopra la Cronologia Egizia; del Professore Francesco BARUCCI, Direttore del Museo Egizio pag. 1
- Studi Critici sovra la Storia d'Italia a' tempi del re Ardoino; del Cavaliere L. G. PROVANA » 66
- Parere della Giunta Accademica intorno agli scritti inviati al concorso di premio ecc. » 389



V.° Si Stampi:

Conte ALESSANDRO DI SALUZZO PRESIDENTE.



